Asíntotas verticales

La recta x = c es una asíntota vertical de una función f(x) si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

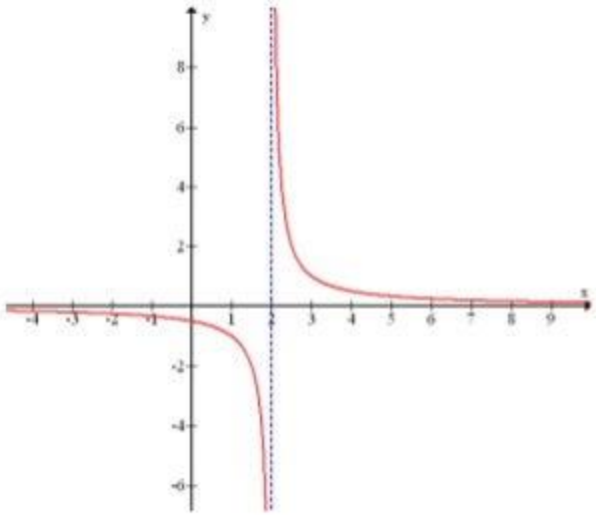
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$$

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

La recta $x = 2$ es una asíntota vertical



Asíntotas horizontales

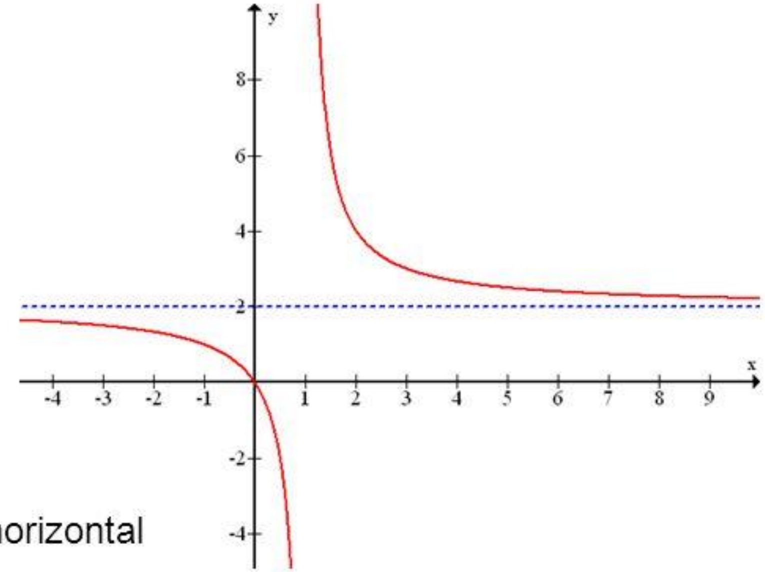
La recta x = L es una asíntota horizontal de una función f(x) si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Ejemplo: $$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$



La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal

Asíntotas oblicuas

La recta y = ax + b es una asíntota oblicua de una función f(x) si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - ax) = b$

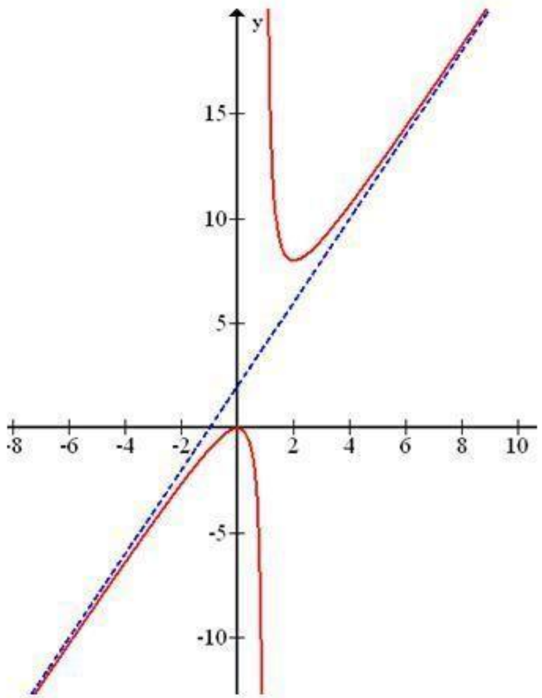
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - x} = 2$$

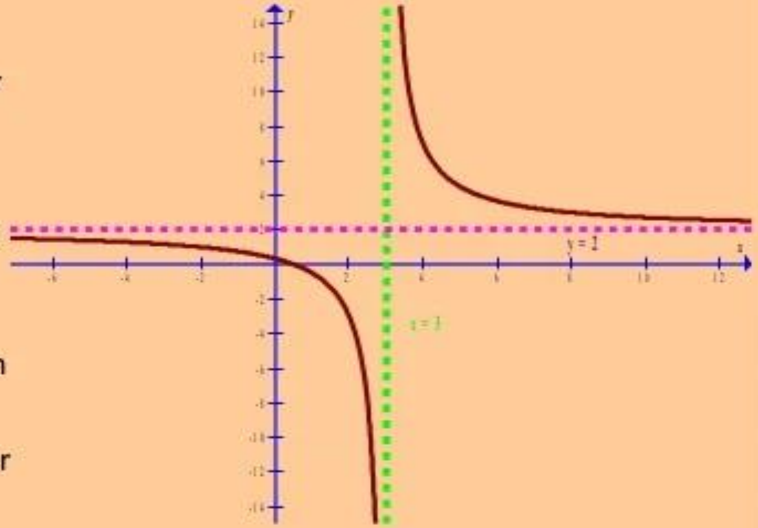
$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2}{x-1} - 2x\right) = 2$$

La recta $y = 2x+2$ es una asíntota oblicua



Calcular las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-3}$



- La posible asíntota vertical es x=3, pues es el valor que solo anula al denominador.
- Calculamos lo límites laterales.

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x-1}{x-3}=\frac{5}{0^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to 3^+}\frac{2x-1}{x-3}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

Como al menos uno de los límites es infinito, la función presenta una asíntota vertical en x=3.

Calculamos el límite cuando x tiende a infinito, para ver si tiene asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x-3}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{2}{1}=2$$

Cómo el límite en el infinito es 2, significa que la función posee una asíntota horizontal en y=2.

Asíntotas Oblicuas

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

Como el grado del numerador excede en 1 al grado del denominador, va a tener asíntota oblicua, no tiene horizontal, porque el límite en el infinito es infinito.

La asíntota oblicua será de la forma y=mx+n

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+x}=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}-1\cdot x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}-\frac{x^2+1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+1}=0$$

La asíntota oblicua sera de ecuación ***y=x.***