

4 FÓRMULAS Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1 ► FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Página 115

1 Demuestra la fórmula (II.2) a partir de la fórmula:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha (-\sin \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

2 Demuestra (II.3) a partir de $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$.

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(-\beta)} \stackrel{(*)}{=} \frac{\operatorname{tg} \alpha + (-\operatorname{tg} \beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha (-\operatorname{tg} \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$(*) \text{ Como } \left. \begin{array}{l} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{array} \right\} \rightarrow \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

3 Demuestra la fórmula (II.3) a partir de las siguientes:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} \stackrel{(*)}{=} \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

(*) Dividimos numerador y denominador por $\cos \alpha \cos \beta$.

4 Si $\sin 12^\circ = 0,2$ y $\sin 37^\circ = 0,6$, halla $\cos 12^\circ$, $\operatorname{tg} 12^\circ$, $\cos 37^\circ$ y $\operatorname{tg} 37^\circ$. Calcula, a partir de ellas, las razones trigonométricas de 49° y de 25° , usando las fórmulas (I) y (II).

$$\bullet \sin 12^\circ = 0,2$$

$$\cos 12^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 12^\circ} = \sqrt{1 - 0,04} = 0,98$$

$$\operatorname{tg} 12^\circ = \frac{0,2}{0,98} = 0,2$$

$$\bullet \sin 37^\circ = 0,6$$

$$\cos 37^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 37^\circ} = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8$$

$$\operatorname{tg} 37^\circ = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

$$\bullet 49^\circ = 12^\circ + 37^\circ, \text{ luego:}$$

$$\sin 49^\circ = \sin(12^\circ + 37^\circ) = \sin 12^\circ \cos 37^\circ + \cos 12^\circ \sin 37^\circ = 0,2 \cdot 0,8 + 0,98 \cdot 0,6 = 0,748$$

$$\cos 49^\circ = \cos(12^\circ + 37^\circ) = \cos 12^\circ \cos 37^\circ - \sin 12^\circ \sin 37^\circ = 0,98 \cdot 0,8 - 0,2 \cdot 0,6 = 0,664$$

$$\operatorname{tg} 49^\circ = \operatorname{tg}(12^\circ + 37^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{tg} 37^\circ}{1 - \operatorname{tg} 12^\circ \operatorname{tg} 37^\circ} = \frac{0,2 + 0,75}{1 - 0,2 \cdot 0,75} = 1,12$$

$$\left(\text{Podría calcularse } \operatorname{tg} 49^\circ = \frac{\sin 49^\circ}{\cos 49^\circ} \right).$$

- $25^\circ = 37^\circ - 12^\circ$, luego:

$$\operatorname{sen} 25^\circ = \operatorname{sen} (37^\circ - 12^\circ) = \operatorname{sen} 37^\circ \cos 12^\circ - \cos 37^\circ \operatorname{sen} 12^\circ = 0,6 \cdot 0,98 - 0,8 \cdot 0,2 = 0,428$$

$$\cos 25^\circ = \cos (37^\circ - 12^\circ) = \cos 37^\circ \cos 12^\circ + \operatorname{sen} 37^\circ \operatorname{sen} 12^\circ = 0,8 \cdot 0,98 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,904$$

$$\operatorname{tg} 25^\circ = \operatorname{tg} (37^\circ - 12^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 37^\circ - \operatorname{tg} 12^\circ}{1 + \operatorname{tg} 37^\circ \operatorname{tg} 12^\circ} = \frac{0,75 - 0,2}{1 + 0,75 \cdot 0,2} = 0,478$$

5 Demuestra esta igualdad:

$$\frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)} = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)} &= \frac{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b} = \\ &= \frac{2 \cos a \cos b}{2 \operatorname{sen} a \cos b} = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{1}{\operatorname{tg} a} \end{aligned}$$

6 Demuestra las fórmulas (III.1) y (III.3) haciendo $\alpha = \beta$ en las fórmulas (I).

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen} (\alpha + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} (\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

7 Halla las razones trigonométricas de 60° usando las de 30° .

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \operatorname{sen} (2 \cdot 30^\circ) = 2 \operatorname{sen} 30^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \cos (2 \cdot 30^\circ) = \cos^2 30^\circ - \operatorname{sen}^2 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} (2 \cdot 30^\circ) = \frac{2 \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 30^\circ} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - (\sqrt{3}/3)^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - 3/9} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{2/3} = \sqrt{3}$$

8 Halla las razones trigonométricas de 90° usando las de 45° .

$$\operatorname{sen} 90^\circ = \operatorname{sen} (2 \cdot 45^\circ) = 2 \operatorname{sen} 45^\circ \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\cos 90^\circ = \cos (2 \cdot 45^\circ) = \cos^2 45^\circ - \operatorname{sen}^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \operatorname{tg} (2 \cdot 45^\circ) = \frac{2 \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 45^\circ} = \frac{2 \cdot 1}{1 - 1} \rightarrow \text{No existe.}$$

9 Demuestra que: $\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$

$$\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha (1 - \cos \alpha)}{2 \operatorname{sen} \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

Hazlo tú

1 Halla $\cos 15^\circ$ y $\operatorname{tg} 15^\circ$.

$$\begin{aligned}\bullet \cos 15^\circ &= \cos \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}}{2} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} \\ \bullet \operatorname{tg} 15^\circ &= \operatorname{tg} \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}\end{aligned}$$

Piensa y practica

10 Siguiendo las indicaciones que se dan, demuestra detalladamente las fórmulas IV.1, IV.2 y IV.3.

$$\bullet \cos \alpha = \cos \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Por la igualdad fundamental:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \rightarrow 1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

De aquí:

a) Sumando ambas igualdades:

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \rightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

b) Restando las igualdades ($2^a - 1^a$):

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \rightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

• Por último:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

11 Sabiendo que $\cos 78^\circ = 0,2$, calcula $\sin 78^\circ$ y $\operatorname{tg} 78^\circ$. Averigua las razones trigonométricas de 39° aplicando las fórmulas del ángulo mitad.

$$\bullet \cos 78^\circ = 0,2$$

$$\sin 78^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 78^\circ} = \sqrt{1 - 0,2^2} = 0,98$$

$$\operatorname{tg} 78^\circ = \frac{0,98}{0,2} = 4,9$$

$$\bullet \sin 39^\circ = \sin \frac{78^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 78^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,2}{2}} = 0,63$$

$$\cos 39^\circ = \cos \frac{78^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 78^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0,2}{2}} = 0,77$$

$$\operatorname{tg} 39^\circ = \operatorname{tg} \frac{78^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 78^\circ}{1 + \cos 78^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - 0,2}{1 + 0,2}} = 0,82$$

12 Halla las razones trigonométricas de 30° a partir de $\cos 60^\circ = 0,5$.

- $\cos 60^\circ = 0,5$
- $\sin 30^\circ = \sin \frac{60^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-0,5}{2}} = 0,5$
- $\cos 30^\circ = \cos \frac{60^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 60^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+0,5}{2}} = 0,866$
- $\tan 30^\circ = \tan \frac{60^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{1+\cos 60^\circ}} = \sqrt{\frac{1-0,5}{1+0,5}} = 0,577$

13 Halla las razones trigonométricas de 45° a partir de $\cos 90^\circ = 0$.

- $\cos 90^\circ = 0$
- $\sin 45^\circ = \sin \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 90^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-0}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 45^\circ = \cos \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 90^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+0}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan 45^\circ = \tan \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 90^\circ}{1+\cos 90^\circ}} = \sqrt{\frac{1-0}{1+0}} = \sqrt{1} = 1$

14 Demuestra: $2 \tan \alpha \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha = \tan \alpha$

$$\begin{aligned} 2 \tan \alpha \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha &= 2 \tan \alpha \cdot \frac{1-\cos \alpha}{2} + \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (1-\cos \alpha) + \sin \alpha = \sin \alpha \left(\frac{1-\cos \alpha}{\cos \alpha} + 1 \right) = \\ &= \sin \alpha \left(\frac{1-\cos \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha} \right) = \sin \alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \end{aligned}$$

15 Demuestra la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} &= \frac{2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (1-\cos \alpha)}{2 \sin \alpha (1+\cos \alpha)} = \frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha} = \tan^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Página 117

16 Para demostrar las fórmulas (V.3) y (V.4), da los siguientes pasos:

- Expresa en función de α y β :
 $\cos(\alpha + \beta) = \dots$ $\cos(\alpha - \beta) = \dots$
- Suma y resta como hemos hecho arriba y obtendrás dos expresiones.
- Sustituye en las expresiones anteriores:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \end{cases}$$

- $$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\text{Sumando} \rightarrow \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \quad (1)$$

$$\text{Restando} \rightarrow \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta \quad (2)$$

- Llamando $\begin{cases} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{A+B}{2}, \beta = \frac{A-B}{2}$ (al resolver el sistema)

- Luego, sustituyendo en (1) y (2), se obtiene:

$$(1) \rightarrow \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad (2) \rightarrow \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

17 Transforma en producto y calcula.

a) $\text{sen } 75^\circ - \text{sen } 15^\circ$ b) $\text{sen } 75^\circ + \text{sen } 15^\circ$ c) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$

$$\text{a) } \text{sen } 75^\circ - \text{sen } 15^\circ = 2 \cos \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \text{sen } \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \cos 45^\circ \text{sen } 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{b) } \text{sen } 75^\circ + \text{sen } 15^\circ = 2 \text{sen } \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \text{sen } 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{c) } \cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -2 \text{sen } \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \text{sen } \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = -2 \text{sen } 45^\circ \cos 30^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

18 Expresa en forma de producto el numerador y el denominador de esta fracción y simplifica el resultado:

$$\frac{\text{sen } 4\alpha + \text{sen } 2\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}$$

$$\frac{\text{sen } 4\alpha + \text{sen } 2\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{2 \text{sen } \frac{4\alpha + 2\alpha}{2} \cos \frac{4\alpha - 2\alpha}{2}}{2 \cos \frac{4\alpha + 2\alpha}{2} \cos \frac{4\alpha - 2\alpha}{2}} = \frac{2 \text{sen } 3\alpha}{2 \cos 3\alpha} = \text{tg } 3\alpha$$

2 ► ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Página 118

Hazlo tú

1 Resuelve $\operatorname{sen}(\alpha + 30^\circ) = 2 \cos \alpha$.

$$\operatorname{sen}(\alpha + 30^\circ) = 2 \cos \alpha$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cos 30^\circ + \cos \alpha \operatorname{sen} 30^\circ = 2 \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha = 2 \cos \alpha$$

Dividimos los dos miembros entre $\cos \alpha$:

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{3} = 4 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 4 - \sqrt{3}$$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} \alpha_1 = 66^\circ 12' 22'' \\ \alpha_2 = 246^\circ 12' 22'' \end{cases}$$

Hazlo tú

2 Resuelve $\cos \alpha = \operatorname{sen} 2\alpha$.

$$\cos \alpha = \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$\cos \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 0 \rightarrow \cos \alpha (1 - 2 \operatorname{sen} \alpha) = 0$$

$$\text{Posibles soluciones: } \begin{cases} \cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90^\circ, \alpha_2 = 270^\circ \\ 1 - 2 \operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 30^\circ, \alpha_4 = 150^\circ \end{cases}$$

Al comprobarlas sobre la ecuación inicial, vemos que las cuatro soluciones son válidas.

Página 119

Hazlo tú

3 Resuelve $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 0$.

$$\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 0$$

$$2 \cos \frac{3x+x}{2} \operatorname{sen} \frac{3x-x}{2} = 0 \rightarrow 2 \cos 2x \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \cos 2x \operatorname{sen} x = 0$$

$$\text{Si } \cos 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x = 90^\circ \rightarrow x_1 = 45^\circ \\ 2x = 270^\circ \rightarrow x_2 = 135^\circ \\ 2x = 90^\circ + 360^\circ = 450^\circ \rightarrow x_3 = 225^\circ \\ 2x = 270^\circ + 360^\circ = 630^\circ \rightarrow x_4 = 315^\circ \end{cases}$$

$$\text{Si } \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x_5 = 0^\circ, x_6 = 180^\circ$$

Piensa y practica

1 Resuelve.

$$\text{a) } \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3} \quad \text{b) } \operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha \quad \text{c) } \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \quad \text{d) } \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\text{a) } \alpha = 120^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ o bien } \alpha = 300^\circ + k \cdot 360^\circ$$

Las dos soluciones quedan recogidas en:

$$\alpha = 120^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{2\pi}{3} + k\pi \text{ rad} = \alpha \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} \text{Si } \operatorname{sen} \alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ rad} \\ \text{Si } \operatorname{sen} \alpha = -1 \rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ rad} \end{array} \right\} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$$

d) En ese caso debe ocurrir que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{O bien } \operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \alpha = k\pi \text{ rad} \\ \text{O bien } \cos \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 2k\pi \text{ rad} \end{array} \right\} \rightarrow \alpha = k\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$$

2 Resuelve estas ecuaciones:

a) $2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0$

b) $2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 1 = 0$

c) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 0$

d) $2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 3 \cos \alpha = 3$

a) $\cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \rightarrow \alpha_1 = 60^\circ, \alpha_2 = 300^\circ \\ -1 \rightarrow \alpha_3 = 180^\circ \end{cases}$

Las tres soluciones son válidas (se comprueba en la ecuación inicial).

b) $2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

• Si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha_1 = 45^\circ, \alpha_2 = 135^\circ$

• Si $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha_3 = -45^\circ = 315^\circ, \alpha_4 = 225^\circ$

Todas las soluciones son válidas.

c) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \alpha - 1) = 0 \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0^\circ, \alpha_2 = 180^\circ \\ \operatorname{tg} \alpha = 1 \rightarrow \alpha_3 = 45^\circ, \alpha_4 = 225^\circ \end{cases}$

Todas las soluciones son válidas.

d) $2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 3 \cos \alpha = 3 \xrightarrow{(*)} 2(1 - \cos^2 \alpha) + 3 \cos \alpha = 3$

(*) Como $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$2 - 2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha = 3 \rightarrow 2 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha + 1 = 0$

$\cos \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$

Entonces:

• Si $\cos \alpha = 1 \rightarrow \alpha_1 = 0^\circ$

• Si $\cos \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_2 = 60^\circ, \alpha_3 = -60^\circ = 300^\circ$

Las tres soluciones son válidas.

3 Transforma en producto $\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha$ y resuelve después la ecuación $\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha = 0$.

$\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha = 0 \rightarrow 2 \cos \frac{5\alpha+3\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{5\alpha-3\alpha}{2} = 0 \rightarrow 2 \cos \frac{8\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{2\alpha}{2} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cos 4\alpha \operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos 4\alpha = 0 \\ \operatorname{sen} \alpha = 0 \end{cases}$

• Si $\cos 4\alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} 4\alpha = 90^\circ & \rightarrow \alpha_1 = 22^\circ 30' \\ 4\alpha = 270^\circ & \rightarrow \alpha_2 = 67^\circ 30' \\ 4\alpha = 90^\circ + 360^\circ & \rightarrow \alpha_3 = 112^\circ 30' \\ 4\alpha = 270^\circ + 360^\circ & \rightarrow \alpha_4 = 157^\circ 30' \end{cases}$

• Si $\operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \alpha_5 = 0^\circ, \alpha_6 = 180^\circ$

Comprobamos que las seis soluciones son válidas.

4 Resuelve.

a) $4 \cos 2x + 3 \cos x = 1$

b) $\operatorname{tg} 2x + 2 \cos x = 0$

c) $\sqrt{2} \cos (x/2) - \cos x = 1$

d) $2 \operatorname{sen} x \cos^2 x - 6 \operatorname{sen}^3 x = 0$

a) $4 \cos 2\alpha + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow 4 (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow$
 $\rightarrow 4 (\cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)) + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow 4 (2 \cos^2 \alpha - 1) + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow$
 $\rightarrow 8 \cos^2 \alpha - 4 + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow 8 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha - 5 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow \cos \alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{16} = \frac{-3 \pm 13}{16} = \begin{cases} 10/16 = 5/8 = 0,625 \\ -1 \end{cases}$

• Si $\cos \alpha = 0,625 \rightarrow \alpha_1 = 51^\circ 19' 4,13''$, $\alpha_2 = -51^\circ 19' 4,13''$

• Si $\cos \alpha = -1 \rightarrow \alpha_3 = 180^\circ$

Al comprobar las soluciones, las tres son válidas.

b) $\operatorname{tg} 2\alpha + 2 \cos \alpha = 0 \rightarrow \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + 2 \cos \alpha = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \cos \alpha = 0 \rightarrow \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} + \cos \alpha = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} + \cos \alpha = 0 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos \alpha (\operatorname{sen} \alpha + \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow \cos \alpha (\operatorname{sen} \alpha + 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \rightarrow$

$\rightarrow \cos \alpha (1 + \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ 1 + \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 0 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \begin{cases} -1/2 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$

• Si $\cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 270^\circ$

• Si $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 210^\circ$, $\alpha_4 = 330^\circ = -30^\circ$

• Si $\operatorname{sen} \alpha = 1 \rightarrow \alpha_5 = 90^\circ = \alpha_1$

Al comprobar las soluciones, vemos que todas ellas son válidas.

c) $\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha = 1 \rightarrow \sqrt{2} \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}} - \cos \alpha = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{1+\cos \alpha} - \cos \alpha = 1 \rightarrow \sqrt{1+\cos \alpha} = 1 + \cos \alpha \rightarrow$

$\rightarrow 1 + \cos \alpha = 1 + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \rightarrow \cos^2 \alpha + \cos \alpha = 0 \rightarrow \cos \alpha (\cos \alpha + 1) = 0$

• Si $\cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 270^\circ$

• Si $\cos \alpha = -1 \rightarrow \alpha_3 = 180^\circ$

Al comprobar las soluciones, podemos ver que las únicas válidas son: $\alpha_1 = 90^\circ$ y $\alpha_3 = 180^\circ$

d) $2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha - 6 \operatorname{sen}^3 \alpha = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha (\cos^2 \alpha - 3 \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha - 4 \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha (1 - 4 \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0$

• Si $\operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 180^\circ$

• Si $\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 30^\circ$, $\alpha_4 = 150^\circ$, $\alpha_5 = 210^\circ$, $\alpha_6 = 330^\circ$

Comprobamos las soluciones y observamos que son válidas todas ellas.

5 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen}(180^\circ - x) = \cos(270^\circ - x) + \cos 180^\circ$

b) $\operatorname{sen}(45^\circ - x) + \sqrt{2} \operatorname{sen} x = 0$

a) $\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \cos(270^\circ - \alpha) + \cos 180^\circ$

$$\operatorname{sen} 180^\circ \cos \alpha - \cos 180^\circ \operatorname{sen} \alpha = \cos 270^\circ \cos \alpha + \operatorname{sen} 270^\circ \operatorname{sen} \alpha - 1$$

$$\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen} \alpha - 1 \rightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha = -1 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha_1 = 210^\circ, \alpha_2 = 330^\circ$$

b) $\operatorname{sen}(45^\circ - \alpha) + \sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha = 0$

$$\operatorname{sen} 45^\circ \cos \alpha - \cos 45^\circ \operatorname{sen} \alpha + \sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \alpha + \sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha = 0$$

$$\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha = 0$$

Dividimos entre $\cos \alpha$:

$$1 + \operatorname{tg} \alpha = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -1 \rightarrow \alpha_1 = 135^\circ, \alpha_2 = 315^\circ$$

3 ► FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Página 121

1 ¿Verdadero o falso?

- a) El radián es una medida de longitud equivalente al radio.
 - b) Un radián es un ángulo algo menor que 60° .
 - c) Puesto que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, un ángulo completo (360°) tiene 2π radianes.
 - d) 180° es algo menos de 3 radianes.
 - e) Un ángulo recto mide $\pi/2$ radianes.
- a) Falso. El radián es una medida angular, no es una medida de longitud.
b) Verdadero, porque un radián tiene $57^\circ 17' 45''$.
c) Verdadero, porque cada radián abarca un arco de longitud r .
d) Falso. 180° es la mitad de un ángulo completo y equivale, por tanto, a π radianes, algo más de 3 radianes.
e) Verdadero. Un ángulo recto es la cuarta parte de un ángulo completo y tiene $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ radianes.

2 Pasa a radianes los siguientes ángulos:

- a) 30°
- b) 72°
- c) 90°
- d) 127°
- e) 200°
- f) 300°

Expresa el resultado en función de π y luego en forma decimal. Por ejemplo:

$$30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 0,52 \text{ rad}$$

- a) $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \approx 0,52 \text{ rad}$
- b) $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 72^\circ = \frac{2\pi}{5} \text{ rad} \approx 1,26 \text{ rad}$
- c) $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \approx 1,57 \text{ rad}$
- d) $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 127^\circ \approx 2,22 \text{ rad}$
- e) $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 200^\circ = \frac{10\pi}{9} \text{ rad} \approx 3,49 \text{ rad}$
- f) $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 300^\circ = \frac{5\pi}{3} \text{ rad} \approx 5,24 \text{ rad}$

3 Pasa a grados los siguientes ángulos:

- a) 2 rad
- b) 0,83 rad
- c) $\frac{\pi}{5}$ rad
- d) $\frac{5\pi}{6}$ rad
- e) 3,5 rad
- f) π rad

- a) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 2 = 114^\circ 35' 29,6''$
- b) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 0,83 = 47^\circ 33' 19,8''$
- c) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{5} = 36^\circ$
- d) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = 150^\circ$
- e) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 3,5 = 200^\circ 32' 6,8''$
- f) $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \pi = 180^\circ$

- 4 Copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno y añade las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) de cada uno de los ángulos:

GRADOS	0°	30°		60°	90°		135°	150°	
RADIANES			$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2}{3}\pi$			π

GRADOS	210°	225°		270°			330°	360°
RADIANES			$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$		

La tabla completa está en la página 122 del libro del alumno y de la alumna.

Página 122

5 ¿Verdadero o falso?

- a) Las funciones trigonométricas son periódicas.
b) Las funciones *sen* y *cos* tienen un periodo de 2π .
c) La función *tg x* tiene periodo π .
d) La función *cos x* es como *sen x* desplazada $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda.

a) Verdadero. La forma de sus gráficas se repite a lo largo del eje horizontal, cada 2π radianes.

b) Verdadero.

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x \\ \text{cos}(x + 2\pi) = \text{cos } x \end{array} \right\} \text{ porque } 2\pi \text{ radianes equivalen a una vuelta completa.}$$

c) Verdadero.

$$\text{tg}(x + \pi) = \text{tg } x$$

Podemos observarlo en la gráfica de la función *tg x* en la página 122 del libro de texto.

d) Verdadero. Se puede observar en las gráficas de la página 122 del libro de texto.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 123

1. Razones trigonométricas de un ángulo a partir de las de otros con los que lo podemos relacionar

Hazlo tú

- Sabiendo que $\operatorname{sen} 54^\circ = 0,81$, halla:

a) $\cos 108^\circ$

b) $\operatorname{tg} 27^\circ$

c) $\operatorname{sen} 24^\circ$

d) $\cos 99^\circ$

$$a) \operatorname{sen}^2 54^\circ + \cos^2 54^\circ = 1 \rightarrow 0,81^2 + \cos^2 54^\circ = 1 \rightarrow \cos 54^\circ = \sqrt{1 - 0,81^2} = 0,59$$

$$\cos 108^\circ = \cos (2 \cdot 54^\circ) = \cos^2 54^\circ - \operatorname{sen}^2 54^\circ = 0,59^2 - 0,81^2 = -0,31$$

$$b) \operatorname{tg} 27^\circ = \operatorname{tg} \left(\frac{54^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 54^\circ}{1 + \cos 54^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - 0,59}{1 + 0,59}} = 0,51$$

$$c) \operatorname{sen} 24^\circ = \operatorname{sen} (54^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 54^\circ \cos 30^\circ - \cos 54^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = 0,81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,59 \cdot \frac{1}{2} = 0,41$$

$$d) \cos 99^\circ = \cos (54^\circ + 45^\circ) = \cos 54^\circ \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 54^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = 0,59 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0,81 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0,16$$

2. Demostración de una identidad trigonométrica

Hazlo tú

- Demuestra:

$$\cos \alpha \cos (\alpha - \beta) + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (\alpha - \beta) = \cos \beta$$

$$\cos \alpha \cos (\alpha - \beta) + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (\alpha - \beta) =$$

$$= \cos \alpha (\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + \operatorname{sen} \alpha (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) =$$

$$= \cos^2 \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \cos \alpha = \cos \beta (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) = \cos \beta$$

3. Simplificación de una expresión trigonométrica

Hazlo tú

- Simplifica:

$$\operatorname{sen} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha \cos 2\alpha$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha \cos 2\alpha = 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \left(2\cos \alpha - \cos \alpha + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} \right) = \operatorname{sen} \alpha \left(\cos \alpha + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} \right) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

4. Resolución de una ecuación trigonométrica factorizable

Hazlo tú

• **Resuelve:**

$$\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x \cos^2 x = 0$$

Extraemos factor común: $\operatorname{sen} x (\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) = 0$

Iguualamos a cero cada factor:

$$\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$$

$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x - (1 - \operatorname{sen}^2 x) = 0 \rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k$

Si $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $x = 225^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k$

5. Resolución de una ecuación trigonométrica con dos razones de un mismo ángulo

Hazlo tú

• **Resuelve:**

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 1$$

Elevamos al cuadrado:

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x &= 1 \rightarrow 1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 1 \rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x \cos x = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \text{ o } \cos x = 0 \rightarrow x = 0^\circ + k180^\circ \text{ o } x = 90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

6. Resolución de una ecuación trigonométrica con dos ángulos y dos razones

Hazlo tú

• **Resuelve:**

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

Utilizamos la fórmula de la tangente del ángulo mitad:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \right)^2 &= 1 - \cos x \rightarrow \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 1 - \cos x \rightarrow 1 - \cos x = 1 - \cos^2 x \rightarrow \\ &\rightarrow \cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x (1 - \cos x) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = 90^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 270^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \cos x = 1 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \end{aligned}$$

7. Resolución de una ecuación trigonométrica aplicando las fórmulas de suma de senos y cosenos

Hazlo tú

$$\bullet \frac{\cos 4x + \cos 2x}{\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x} = 1$$

Transformamos las sumas en productos:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cos \frac{4x+2x}{2} \cos \frac{4x-2x}{2}}{2 \cos \frac{4x+2x}{2} \operatorname{sen} \frac{4x-2x}{2}} &= 1 \rightarrow \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 1 \rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow \\ &\rightarrow x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 225^\circ + 360^\circ \cdot k \end{aligned}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 125

1. Razones trigonométricas de $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$

- Conociendo $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{5}{4}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, y $\sec \beta = 3$, $270^\circ < \beta < 360^\circ$, calcular $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$ sin hallar los ángulos α y β .

Por su definición sabemos: $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$

También por definición: $\sec \beta = \frac{1}{\cos \beta} \rightarrow \cos \beta = \frac{1}{3}$

Calcularemos $\cos \alpha$ y $\operatorname{sen} \beta$ a partir de la igualdad:

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$ (sabemos que es negativo porque α pertenece al segundo cuadrante).

$\operatorname{sen} \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (sabemos que es negativo porque β pertenece al cuarto cuadrante).

Por la fórmula del ángulo mitad:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) &= \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha + \beta)}{1 + \cos(\alpha + \beta)}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{1 + \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}}{1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{15}}} = \\ &= \sqrt{\frac{\frac{18 - 8\sqrt{2}}{15}}{\frac{12 + 8\sqrt{2}}{15}}} = \sqrt{\frac{2(9 - 4\sqrt{2})}{2(6 + 4\sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{9 - 4\sqrt{2}}{6 + 4\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

2. Identidades trigonométricas

- Demostrar:** $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x = (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{sen} x = \\ &= \cos^3 x - \operatorname{sen}^2 x \cos x - 2 \operatorname{sen}^2 x \cos x = \cos^3 x - 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x = \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{aligned}$$

3. Expresiones algebraicas equivalentes

- Escribir la expresión:** $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$ en función de $\cos \alpha$ y $\operatorname{sen} \beta$.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) &= (\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) (\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) = \\ &= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta = \cos^2 \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \beta) - (1 - \cos^2 \alpha) \operatorname{sen}^2 \beta = \\ &= \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta \end{aligned}$$

4. Simplificación de expresiones trigonométricas

- Simplificar esta expresión: $2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha &= 2 \operatorname{tg} \alpha \left(\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \right)^2 - \operatorname{sen} \alpha = 2 \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha (1 + \cos \alpha) - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

5. Otras ecuaciones trigonométricas

- Resolver estas ecuaciones:

a) $\cos^2 (2x + 30^\circ) = \frac{1}{4}$

b) $4 \operatorname{sen} x + 4 \cos^2 x \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x = 0$

Expresar el resultado obtenido en grados y radianes.

a) $\cos (2x + 30^\circ) = \pm \frac{1}{2}$

$$\text{Si } \cos (2x + 30^\circ) = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x + 30^\circ = 60^\circ \rightarrow x = 15^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 300^\circ \rightarrow x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 60^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 195^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 300^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$\text{Si } \cos (2x + 30^\circ) = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x + 30^\circ = 120^\circ \rightarrow x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 240^\circ \rightarrow x = 105^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 120^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 225^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 240^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 285^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

- b) Si $\operatorname{tg} x = 0$ entonces $x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k$; $x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$ son soluciones de la ecuación, ya que el seno de estos ángulos también es 0.

Si $\operatorname{tg} x \neq 0$, dividimos entre esta función los dos términos de la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{4 \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} + 4 \cos^2 x + 1 &= 0 \rightarrow \frac{4 \operatorname{sen} x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} + 4 \cos^2 x + 1 = 0 \rightarrow 4 \cos^2 x + 4 \cos x + 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \cos x = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 120^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 240^\circ + 360^\circ \cdot k \end{aligned}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Página 126

Para practicar

Fórmulas trigonométricas

- 1** Calcula las razones trigonométricas de $22^\circ 30'$ a partir de las de 45° .

$$\operatorname{sen}(22^\circ 30') = \operatorname{sen} \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos(22^\circ 30') = \cos \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{tg}(22^\circ 30') = \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}/2}{1 + \sqrt{2}/2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}$$

- 2** Si $\cos 78^\circ = 0,2$ y $\operatorname{sen} 37^\circ = 0,6$ halla las razones trigonométricas de 41° y de 115° .

$$41^\circ = 78^\circ - 37^\circ$$

$$\bullet \operatorname{sen} 78^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 78^\circ} = \sqrt{1 - 0,2^2} = 0,98$$

$$\bullet \cos 37^\circ = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 37^\circ} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8$$

Ahora ya podemos calcular:

$$\bullet \operatorname{sen} 41^\circ = \operatorname{sen}(78^\circ - 37^\circ) = \operatorname{sen} 78^\circ \cos 37^\circ - \cos 78^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,98 \cdot 0,8 - 0,2 \cdot 0,6 = 0,664$$

$$\bullet \cos 41^\circ = \cos(78^\circ - 37^\circ) = \cos 78^\circ \cos 37^\circ + \operatorname{sen} 78^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,2 \cdot 0,8 + 0,98 \cdot 0,6 = 0,748$$

$$\bullet \operatorname{tg} 41^\circ = \frac{\operatorname{sen} 41^\circ}{\cos 41^\circ} = \frac{0,664}{0,748} = 0,8877$$

$$\bullet \operatorname{sen} 115^\circ = \operatorname{sen}(78^\circ + 37^\circ) = \operatorname{sen} 78^\circ \cos 37^\circ + \cos 78^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,98 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,904$$

$$\bullet \cos 115^\circ = \cos(78^\circ + 37^\circ) = \cos 78^\circ \cos 37^\circ - \operatorname{sen} 78^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,2 \cdot 0,8 - 0,98 \cdot 0,6 = -0,428$$

$$\bullet \operatorname{tg} 115^\circ = \frac{\operatorname{sen} 115^\circ}{\cos 115^\circ} = \frac{0,904}{-0,428} = -2,112$$

- 3** a) Halla el valor exacto de las razones trigonométricas de 75° a partir de las de 30° y 45° .
b) Utilizando los resultados del apartado a), calcula las razones trigonométricas de 105° ; 165° ; 15° ; 195° y 135° .

$$\text{a) } \operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen}(30^\circ + 45^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} = \sqrt{3} + 2$$

$$b) \operatorname{sen} 105^\circ = \operatorname{sen} (30^\circ + 75^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ \cos 75^\circ + \cos 30^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 105^\circ = \cos (30^\circ + 75^\circ) = \cos 30^\circ \cos 75^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 105^\circ = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = -\sqrt{3}-2$$

$$\operatorname{sen} 165^\circ = \operatorname{sen} (90^\circ + 75^\circ) = \operatorname{sen} 90^\circ \cos 75^\circ + \cos 90^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 165^\circ = \cos (90^\circ + 75^\circ) = \cos 90^\circ \cos 75^\circ - \operatorname{sen} 90^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = -\operatorname{sen} 75^\circ = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 165^\circ = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \sqrt{3}-2$$

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen} (90^\circ - 75^\circ) = \operatorname{sen} 90^\circ \cos 75^\circ - \cos 90^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos (90^\circ - 75^\circ) = \cos 90^\circ \cos 75^\circ + \operatorname{sen} 90^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen} 75^\circ = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = 2-\sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} 195^\circ = \operatorname{sen} (270^\circ - 75^\circ) = \operatorname{sen} 270^\circ \cos 75^\circ - \cos 270^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = -\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 195^\circ = \cos (270^\circ - 75^\circ) = \cos 270^\circ \cos 75^\circ + \operatorname{sen} 270^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = -\operatorname{sen} 75^\circ = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 195^\circ = -\frac{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}{\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{-\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} 135^\circ = \operatorname{sen} (180^\circ - 45^\circ) = \operatorname{sen} 180^\circ \cos 45^\circ - \cos 180^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = \cos (180^\circ - 45^\circ) = \cos 180^\circ \cos 45^\circ + \operatorname{sen} 180^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = -\cos 45^\circ = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 135^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = -1$$

4 Sabiendo que $\cos \alpha = \frac{-7}{25}$ ($180^\circ < \alpha < 270^\circ$) y $\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$ ($180^\circ < \beta < 270^\circ$), calcula $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Usamos la relación $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ para calcular $\operatorname{sen} \alpha$:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{49}{625} = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{576}{625} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{24}{25} \text{ porque el ángulo está en el } 3.^{\text{er}} \text{ cuadrante.}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} = \frac{4}{3} \rightarrow \operatorname{sen} \beta = \frac{4}{3} \cos \beta$$

$$\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \rightarrow \frac{16}{9} \cos^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \rightarrow \frac{25}{9} \cos^2 \beta = 1 \rightarrow \cos^2 \beta = \frac{9}{25} \rightarrow \cos \beta = -\frac{3}{5} \text{ porque también pertenece al tercer cuadrante.}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

Como $360^\circ < \alpha + \beta < 540^\circ$, dividiendo las desigualdades entre 2 tenemos que $180^\circ < \frac{\alpha + \beta}{2} < 270^\circ$.

Por tanto, $\frac{\alpha + \beta}{2}$ pertenece al tercer cuadrante y la tangente de $\frac{\alpha + \beta}{2}$ es positiva.

$$\text{Calculamos } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{-7}{25} \cdot \frac{-3}{5} - \frac{-24}{25} \cdot \frac{-4}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{Por tanto, } \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha + \beta)}{1 + \cos(\alpha + \beta)}} = \sqrt{\frac{1 - (-3/5)}{1 + (-3/5)}} = 2$$

5 Si $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -3$ y $\alpha < 270^\circ$, halla $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -3 \rightarrow \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = -3 \rightarrow \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \cos \alpha = 9 + 9 \cos \alpha \rightarrow 10 \cos \alpha = -8 \rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4}$$

6 Si $\operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{6}$ y $\alpha < 90^\circ$, halla $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$.

$$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{6} \rightarrow 2 \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{6} - \sqrt{6} \operatorname{tg}^2 \alpha \rightarrow \sqrt{6} \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{6} = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2\sqrt{6}} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{6}}$$

Como α está en el primer cuadrante, solo puede darse que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-1 + \sqrt{7}}{\sqrt{6}}$.

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{6}} \cos \alpha$$

$$\left(\frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{6}}\right)^2 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{8 - 2\sqrt{7}}{6} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{7 - \sqrt{7}}{3} \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{7 - \sqrt{7}} \rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{7 - \sqrt{7}}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{3}{7 - \sqrt{7}}} = \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{2(7 - \sqrt{7})}}$$

7 Si sabemos que $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{3}$ y que $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, halla $\cos 2\alpha$, sin hallar el ángulo α .

Nos dicen que el ángulo está en el tercer cuadrante, por lo que su coseno será negativo y el seno también. En cambio $\frac{\alpha}{2}$ estará en el segundo cuadrante y tendrá seno positivo y coseno negativo.

Queremos encontrar $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ por lo que buscaremos $\cos \alpha$ y $\sin \alpha$.

$$\text{Calculamos: } \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Por las fórmulas del ángulo medio: } -\frac{1}{3} = \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\text{Elevando al cuadrado: } \frac{1}{9} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{7}{9}$$

$$\text{Por otra parte: } \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

Así podemos volver al principio y sustituir:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{49}{81} - \frac{32}{81} = \frac{17}{81}$$

8 Transforma las siguientes sumas en productos:

a) $\operatorname{sen} 65^\circ + \operatorname{sen} 35^\circ$

b) $\operatorname{sen} 65^\circ - \operatorname{sen} 35^\circ$

c) $\cos 48^\circ + \cos 32^\circ$

d) $\cos 48^\circ - \cos 32^\circ$

e) $\frac{1}{2} + \operatorname{sen} 50^\circ$

f) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 75^\circ$

a) $\operatorname{sen} 65^\circ + \operatorname{sen} 35^\circ = 2 \operatorname{sen} \frac{65^\circ + 35^\circ}{2} \cos \frac{65^\circ - 35^\circ}{2} = 2 \operatorname{sen} 50^\circ \cos 15^\circ$

b) $\operatorname{sen} 65^\circ - \operatorname{sen} 35^\circ = 2 \cos \frac{65^\circ + 35^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{65^\circ - 35^\circ}{2} = 2 \cos 50^\circ \operatorname{sen} 15^\circ$

c) $\cos 48^\circ + \cos 32^\circ = 2 \cos \frac{48^\circ + 32^\circ}{2} \cos \frac{48^\circ - 32^\circ}{2} = 2 \cos 40^\circ \cos 8^\circ$

d) $\cos 48^\circ - \cos 32^\circ = -2 \operatorname{sen} \frac{48^\circ + 32^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{48^\circ - 32^\circ}{2} = -2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 8^\circ$

e) $\frac{1}{2} + \operatorname{sen} 50^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ + \operatorname{sen} 50^\circ = 2 \operatorname{sen} \frac{30^\circ + 50^\circ}{2} \cos \frac{30^\circ - 50^\circ}{2} = 2 \operatorname{sen} 40^\circ \cos (-10^\circ) = 2 \operatorname{sen} 40^\circ \cos 10^\circ$

f) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 75^\circ = \cos 45^\circ + \cos 75^\circ = 2 \cos \frac{45^\circ + 75^\circ}{2} \cos \frac{45^\circ - 75^\circ}{2} = 2 \cos 60^\circ \cos (-15^\circ) = 2 \cos 60^\circ \cos 15^\circ$

9 Calcula el valor exacto de las siguientes expresiones sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora:

a) $\cos 195^\circ + \cos 75^\circ$

b) $\operatorname{sen} 195^\circ - \operatorname{sen} 105^\circ$

a) $\begin{aligned} \cos 195^\circ + \cos 75^\circ &= \cos(180^\circ + 15^\circ) + \cos(60^\circ + 15^\circ) = \\ &= \cos 180^\circ \cos 15^\circ - \operatorname{sen} 180^\circ \operatorname{sen} 15^\circ + \cos 60^\circ \cos 15^\circ - \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 15^\circ = \\ &= -\cos 15^\circ - 0 + \frac{1}{2} \cos 15^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} 15^\circ = -\frac{1}{2} \cos 15^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} 15^\circ \quad (*) \end{aligned}$

Buscamos el valor de $\cos 15^\circ$ a partir de la fórmula del ángulo mitad:

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$\operatorname{sen}^2 15^\circ = 1 - \cos^2 15^\circ = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \rightarrow \operatorname{sen} 15^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Ya podemos sustituir en (*):

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} = -\frac{1}{4} (\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{3} \sqrt{2 - \sqrt{3}}) = -0,707$$

b) $\begin{aligned} \operatorname{sen} 195^\circ - \operatorname{sen} 105^\circ &= \operatorname{sen}(180^\circ + 15^\circ) - (\operatorname{sen} 90^\circ + 15^\circ) = \\ &= \operatorname{sen} 180^\circ \cos 15^\circ + \cos 180^\circ \operatorname{sen} 15^\circ - (\operatorname{sen} 90^\circ \cos 15^\circ + \cos 90^\circ \operatorname{sen} 15^\circ) = \\ &= 0 - \operatorname{sen} 15^\circ - \cos 15^\circ - 0 = -\left(\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} \right) = -1,225 \end{aligned}$

Hemos usado los valores calculados en el apartado anterior de $\operatorname{sen} 15^\circ$ y $\cos 15^\circ$.

- 10** Si sabemos que $\operatorname{cosec} \alpha = 2,5$ y $\sec \beta = 1,25$, comprueba, sin hallar los ángulos α y β , que el valor aproximado de $\cotg(\alpha + \beta)$ es 0,57.

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = 2,5 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2,5} = 0,4$$

Aplicando la igualdad fundamental: $\cos \alpha = \sqrt{1 - 0,4^2} = 0,917$

$$\sec \beta = \frac{1}{\cos \beta} = 1,25 \rightarrow \cos \beta = \frac{1}{1,25} = 0,8$$

Aplicando la igualdad fundamental:

$$\operatorname{sen} \beta = \sqrt{1 - 0,8^2} = 0,6$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = 0,436$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} = 0,75$$

Por otro lado sabemos que $\cotg(\alpha + \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}$ y $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$:

$$\cotg(\alpha + \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \frac{1 - 0,436 \cdot 0,75}{0,436 + 0,75} = 0,567$$

- 11** Si llamamos $\operatorname{tg} \alpha = t$, escribe $\operatorname{sen} 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$ en función de t .

Como $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = 1 + t^2 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + t^2}$

Por la igualdad fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{1 + t^2} = \frac{t^2}{1 + t^2}$$

Por las fórmulas del ángulo doble:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{1 + t^2} - \frac{t^2}{1 + t^2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Finalmente, aplicando la igualdad fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 2\alpha = 1 - \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right)^2 = 1 - \frac{1 - 2t^2 + t^4}{1 + 2t^2 + t^4} = \frac{1 + 2t^2 + t^4 - (1 - 2t^2 + t^4)}{1 + 2t^2 + t^4} = \frac{4t^2}{(1 + t^2)^2} \rightarrow \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$$

- 12** Desarrolla, en función de las razones trigonométricas de α , y simplifica las siguientes expresiones:

a) $\operatorname{sen}(45^\circ + \alpha) - \cos(\alpha - 45^\circ)$

b) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha}$

c) $\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha$

a) $\operatorname{sen}(45^\circ + \alpha) - \cos(\alpha - 45^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cos \alpha + \cos 45^\circ \operatorname{sen} \alpha - (\cos \alpha \cos 45^\circ + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} 45^\circ) =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \alpha = 0$

b) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha} = \frac{(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)(\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha)}{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha} = \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha$

c) $\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha = \frac{(1 + \cos \alpha)}{2} \cdot \frac{(1 - \cos \alpha)}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{4} + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$

13 Simplifica estas expresiones:

a) $\frac{\operatorname{cosec} x}{\cot g x + \operatorname{tg} x}$

b) $\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\operatorname{cosec} x}{\cot g x + \operatorname{tg} x} &= \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x} = \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x(1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x(1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \\ &= \frac{1}{\cos x \left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \right)} = \frac{1}{\cos x \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos x}} = \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)} &= \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\sin^2 x - \cos^2 x} = -\frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)}{-\sin^2 x + \cos^2 x} = \\ &= -(\cos^2 x + \sin^2 x) = -1 \end{aligned}$$

Identidades trigonométricas

14 ¿Verdadero o falso? Desarrolla y comprueba.

a) $\sin(\alpha + 270^\circ) = -\cos \alpha$

b) $\cos(270^\circ + \alpha) = \sin \alpha$

c) $\sin(270^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

d) $\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$

e) Si $\alpha + \beta = 120^\circ$, entonces: $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \sqrt{3}$

a) Verdadero.

Por la fórmula del ángulo suma: $\sin(\alpha + 270^\circ) = \sin \alpha \cos 270^\circ + \cos \alpha \sin 270^\circ$

Como sabemos el seno y coseno de 270° , sustituimos:

$$\sin \alpha \cos 270^\circ + \cos \alpha \sin 270^\circ = \sin \alpha \cdot 0 + \cos \alpha \cdot (-1) = -\cos \alpha$$

b) Verdadero.

$$\cos(\alpha + 270^\circ) = \cos \alpha \cos 270^\circ - \sin \alpha \sin 270^\circ = \cos \alpha \cdot 0 - (-1) \cdot (\sin \alpha) = \sin \alpha$$

c) Falso.

$$\sin(270^\circ - \alpha) = \sin 270^\circ \cos \alpha - \cos 270^\circ \sin \alpha = -1 \cos \alpha - 0 = -\cos \alpha$$

d) Verdadero.

$$\cos(270^\circ - \alpha) = \cos 270^\circ \cos \alpha + \sin 270^\circ \sin \alpha = 0 - 1 \sin \alpha = -\sin \alpha$$

e) Verdadero.

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \frac{2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)}{2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)} = \frac{\sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)} = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

15 Demuestra las siguientes identidades teniendo en cuenta las relaciones fundamentales:

a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 4 \sin \alpha \cos \alpha$

b) $\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha = \sin \alpha$

c) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$

d) $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} \cdot \cos 2\alpha = 1 + \sin 2\alpha$

$$\begin{aligned} \text{a) } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 &= \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - (\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha = 4 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^3 \alpha &= \operatorname{sen} \alpha (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cdot 1 = \operatorname{sen} \alpha \\
 \text{c) } \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos \alpha} &= \frac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha} \\
 \text{d) } \frac{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} \cdot \cos 2\alpha &= \frac{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \frac{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)(\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha) = \\
 &= (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)(\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = \\
 &= 1 + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 1 + \operatorname{sen} 2\alpha
 \end{aligned}$$

16 Prueba que son verdaderas las identidades siguientes:

a) $\cos(x + 60^\circ) - \cos(x + 120^\circ) = \cos x$

b) $\operatorname{tg}(x + 45^\circ) - \operatorname{tg}(x - 45^\circ) = \frac{2 + 2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \cos(x + 60^\circ) - \cos(x + 120^\circ) &= \cos x \cos 60^\circ - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 60^\circ - (\cos x \cos 120^\circ - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 120^\circ) = \\
 &= \cos x \cos 60^\circ - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 60^\circ - \cos x \cos 120^\circ + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 120^\circ = \\
 &= \cos x \cos 60^\circ - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 60^\circ - \cos x \cdot (-\cos 60^\circ) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 60^\circ = \\
 &= 2 \cos x \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos x = \cos x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \operatorname{tg}(x + 45^\circ) - \operatorname{tg}(x - 45^\circ) &= \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 45^\circ} - \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} - \frac{\operatorname{tg} x - 1}{1 + \operatorname{tg} x} = \\
 &= \frac{1 + 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - (-1 + 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x)}{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} = \frac{2 + 2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}
 \end{aligned}$$

17 Comprueba que se verifican las dos identidades siguientes:

a) $\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) = \cos \beta$

b) $\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$

* En b), divide numerador y denominador entre $\cos \alpha \cos \beta$.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen} \alpha (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) + \cos \alpha (\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) = \\
 &= \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \cos^2 \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \\
 &= (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cos \beta = \cos \beta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} &= \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \\
 &= \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}
 \end{aligned}$$

18 Demuestra.

a) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$

b) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \\ &= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \\ &= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = (1 - \sin^2 \alpha) \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \beta) = \\ &= \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) &= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = \\ &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin \alpha \cos \beta \cos \alpha \sin \beta + \cos \alpha \sin \beta \sin \alpha \cos \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \\ &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta = \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \end{aligned}$$

19 Demuestra la igualdad $\frac{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{2 \operatorname{tg}(\alpha/2)} = \operatorname{cosec} \alpha$.

$$\begin{aligned} \frac{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{2 \operatorname{tg}(\alpha/2)} &= \frac{1 + \left(\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\right)}{\pm 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}} = \frac{\frac{1 + \cos \alpha + 1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}{\pm 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}} = \frac{2}{\pm 2(1 + \cos \alpha) \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}} = \frac{1}{\pm (1 + \cos \alpha) \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha \end{aligned}$$

Por tanto, la igualdad queda demostrada.

20 ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

a) $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

b) $2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \sin \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

c) $\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha$

d) $\frac{1 - \sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1}{\cos x}$

e) $\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x} = 2 \operatorname{cosec}^2 x$

a) $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

b) Falso.

Basta con comprobar que no se cumple para $\alpha = 0$:

$$2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \sin \alpha = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha; \text{ para } \alpha = 0 \rightarrow 0 - 0 = 0$$

Sin embargo, $\frac{1}{\cos 0^\circ} = 1$.

c) Verdadero.

$$\begin{aligned}\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha &= \frac{1}{\tan^2 \alpha} - \cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} (1 - \sin^2 \alpha) = \frac{1}{\tan^2 \alpha} \cos^2 \alpha\end{aligned}$$

d) Falso.

Igual que en el apartado b) probamos qué pasa para $\alpha = 0$:

$$\frac{1-0}{1} - \frac{1}{1-0} = 1 - 1 = 0$$

$$\text{Sin embargo, } \frac{1}{\cos \alpha} = 1.$$

e) Verdadero.

$$\frac{1}{1 + \cos \alpha} + \frac{1}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha + 1 + \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2}{\sin^2 \alpha} = 2 \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

21 Comprueba, sin utilizar la calculadora, las siguientes igualdades:

a) $\sin 130^\circ + \sin 50^\circ = 2 \cos 40^\circ$

b) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $\sin 130^\circ + \sin 50^\circ = 2 \sin \frac{130^\circ + 50^\circ}{2} \cos \frac{130^\circ - 50^\circ}{2} = 2 \sin 90^\circ \cos 40^\circ = 2 \cos 40^\circ$

b) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \sin \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = -2 \sin 45^\circ \sin 30^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Página 127

Ángulos en radianes

22 Expresa en grados los siguientes ángulos dados en radianes:

$$\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{3}; \frac{4\pi}{9}; \frac{3\pi}{5}; 1,5; 3,2$$

$$\frac{5\pi}{6} \text{ rad} = \frac{5 \cdot 180^\circ}{6} = 150^\circ$$

$$\frac{7\pi}{3} \text{ rad} = \frac{7 \cdot 180^\circ}{3} = 420^\circ$$

$$\frac{4\pi}{9} \text{ rad} = \frac{4 \cdot 180^\circ}{9} = 80^\circ$$

$$\frac{3\pi}{5} \text{ rad} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$$

$$1,5 \text{ rad} = \frac{1,5 \cdot 180^\circ}{\pi} = 85^\circ 56' 37''$$

$$3,2 \text{ rad} = \frac{3,2 \cdot 180^\circ}{\pi} = 183^\circ 20' 47''$$

23 Pasa a radianes estos ángulos. Exprésalos en función de π :

135°; 210°; 108°; 72°; 126°; 480°

$$135^\circ = \frac{135 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

$$210^\circ = \frac{210 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

$$108^\circ = \frac{108 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{5} \text{ rad}$$

$$72^\circ = \frac{72 \cdot \pi}{180} = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

$$126^\circ = \frac{126 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{10} \text{ rad}$$

$$480^\circ = \frac{480 \cdot \pi}{180} = \frac{8\pi}{3} \text{ rad}$$

24 Prueba que:

a) $4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \pi = 2$

b) $2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} + 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 3$

c) $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{7\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

a) $4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \pi = 4 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-1) = 2 + 1 - 1 = 2$

b) $2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} + 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 = 3 + 2 - 2 = 3$

c) $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{7\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

25 Halla el valor exacto de cada una de estas expresiones sin utilizar la calculadora:

a) $5 \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 + 2 \cos \pi - \cos \frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi$

b) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \pi$

c) $\cos \frac{5\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}$

d) $\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$

Comprueba los resultados con calculadora.

a) $5 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot (-1) - 0 + 1 = -2$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0 = \frac{\sqrt{2} + 2}{2}$

c) $\frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

d) $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 3 = -2$

26 Halla las razones trigonométricas de estos ángulos e indica, sin pasar a grados, en qué cuadrante está cada uno:

a) 0,8 rad

b) 3,2 rad

c) 2 rad

d) 4,5 rad

e) $\pi/8$ rad

f) $7\pi/4$ rad

g) $3\pi/5$ rad

h) $1,2\pi$ rad

* Ten en cuenta: $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$; $\pi \approx 3,14$; $\frac{3\pi}{2} \approx 4,7$; $2\pi \approx 6,28$

Para saber en qué cuadrante está cada uno, podemos usar también los signos de las razones trigonométricas.

a) $\operatorname{sen} 0,8 = 0,72$

$\cos 0,8 = 0,69$

$\operatorname{tg} 0,8 = 1,03 \rightarrow$ Cuadrante I

b) $\operatorname{sen} 3,2 = -0,06$

$\cos 3,2 = -1$

$\operatorname{tg} 3,2 = 0,06 \rightarrow$ Cuadrante III

c) $\operatorname{sen} 2 = 0,91$

$\cos 2 = -0,42$

$\operatorname{tg} 2 = -2,19 \rightarrow$ Cuadrante II

d) $\operatorname{sen} 4,5 = -0,98$

$\cos 4,5 = -0,21$

$\operatorname{tg} 4,5 = 4,64 \rightarrow$ Cuadrante III

e) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} = 0,38$

$\cos \frac{\pi}{8} = 0,92$

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = 0,41 \rightarrow$ Cuadrante I

f) $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} = -0,71$

$\cos \frac{7\pi}{4} = 0,71$

$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} = -1 \rightarrow$ Cuadrante IV

g) $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{5} = 0,95$

$\cos \frac{3\pi}{5} = -0,31$

$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{5} = -3,08 \rightarrow$ Cuadrante II

h) $\operatorname{sen} 1,2\pi = -0,59$

$\cos 1,2\pi = -0,81$

$\operatorname{tg} 1,2\pi = 0,73 \rightarrow$ Cuadrante III

27 En cada caso halla, en radianes, dos valores para el ángulo α tales que:

a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,32$

b) $\cos \alpha = 0,58$

c) $\operatorname{tg} \alpha = -1,5$

d) $\operatorname{sen} \alpha = -0,63$

a) $\alpha_1 = 0,33; \alpha_2 = 2,82$

b) $\alpha_1 = 0,95; \alpha_2 = 5,33$

c) $\alpha_1 = -0,98; \alpha_2 = 2,16$

d) $\alpha_1 = -0,68; \alpha_2 = 3,82$

Ecuaciones trigonométricas

28 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2 \operatorname{sen}^2 x = 1$

b) $3 \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$

c) $1 - 4 \cos^2 x = 0$

d) $3 \operatorname{tg} x + 4 = 0$

a) $2 \operatorname{sen}^2 x = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

• Si $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 225^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k$

Es decir, las soluciones son todos los ángulos del tipo $x = 45^\circ + 90^\circ \cdot k$

b) $3 \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3} \rightarrow \operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

• Si $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 30^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 210^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 150^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 330^\circ + 360^\circ \cdot k$

c) $1 - 4 \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2}$

• Si $\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 300^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si $\cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 120^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 240^\circ + 360^\circ \cdot k$

d) $3 \operatorname{tg} x + 4 = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{4}{3} \rightarrow x = 126^\circ 52' 12'' + 360^\circ \cdot k; x = 306^\circ 52' 12'' + 360^\circ \cdot k$

29 Resuelve estas ecuaciones:

a) $2 \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$

b) $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$

c) $2 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = 0$

d) $2 \cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1$

a) $2 \cos^2 x - \frac{\operatorname{sen}^2 x + 1}{\cos^2 x} = 0 \left\{ \rightarrow 2 \cos^2 x + \cos^2 x = 0 \rightarrow 3 \cos^2 x = 0 \rightarrow \right.$

$\rightarrow \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ \\ x_2 = 270^\circ \end{cases}$

Al comprobarlas en la ecuación inicial, las dos soluciones son válidas. Luego:

$\begin{cases} x_1 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

Lo que podemos expresar como:

$x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

$$b) \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ \\ \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow x_3 = 90^\circ \end{cases}$$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que las tres son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k\pi \\ x_2 &= 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi \\ x_3 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, de otra forma:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k\pi = k \cdot 180^\circ \\ x_3 &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

(x_1 así incluye las soluciones x_1 y x_2 anteriores)

$$c) \cos x (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x_3 = 30^\circ, x_4 = 330^\circ \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 &= 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

NOTA: Obsérvese que las dos primeras soluciones podrían escribirse como una sola de la siguiente forma:

$$x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$d) 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow 2 - 2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \rightarrow x_1 = 90^\circ \\ -1/2 \rightarrow x_2 = 210^\circ, x_3 = 330^\circ \end{cases}$$

Las tres soluciones son válidas, es decir:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 210^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x_3 &= 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

30 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$

b) $\operatorname{sen} 2x - 2 \cos^2 x = 0$

c) $\cos 2x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

d) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2} \operatorname{sen} x = 0$

a) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos x - \cos \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} x + \cos \frac{\pi}{3} \cos x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \begin{cases} x_1 = \pi/3 \\ x_2 = 5\pi/3 \end{cases}$$

Comprobamos y vemos que:

$$x_1 \rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos 0 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 \rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Son válidas las dos soluciones. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 &= \frac{5\pi}{3} + 2k\pi = 300^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $2 \operatorname{sen} x \cos x - 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow 2 \cos x (\operatorname{sen} x - \cos x) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ \\ \operatorname{sen} x = \cos x \rightarrow x_3 = 45^\circ, x_4 = 225^\circ \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones. Todas son válidas.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 &= 45^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_4 &= 225^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

También podríamos expresarlas como:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x_2 &= 45^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \rightarrow x_1 = 30^\circ, x_2 = 150^\circ \\ -2 \rightarrow \text{¡Imposible!}, \text{ pues } |\operatorname{sen} x| \leq 1 \end{cases}$$

Comprobamos que la dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$d) \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} x - \sqrt{2} \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} x - \sqrt{2} \operatorname{sen} x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \cos x = \operatorname{sen} x \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

Al comprobar, podemos ver que ambas soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi = 45^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 &= \frac{5\pi}{4} + 2k\pi = 225^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos agrupar las dos soluciones en: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$ con $k \in \mathbb{Z}$

31 Resuelve.

$$a) \cos^2 \frac{x}{2} + \cos x - \frac{1}{2} = 0$$

$$b) \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 = \cos x$$

$$c) 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$$

$$d) 4 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 2 = 0$$

$$a) \frac{1 + \cos x}{2} + \cos x - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow 1 + \cos x + 2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3 \cos x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \begin{cases} x_1 = 90^\circ \\ x_2 = 270^\circ \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones: $x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$b) \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + 1 = \cos x \rightarrow 1 - \cos x + 1 + \cos x = \cos x + \cos^2 x \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 = \cos x + \cos^2 x \rightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} 1 \rightarrow x = 0^\circ \\ -2 \rightarrow \text{¡Imposible, pues } |\cos x| \leq 1 \end{cases}$$

Luego: $x = k \cdot 360^\circ = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \text{c) } 2 \cdot \frac{1 - \cos x}{2} + \cos^2 x - \sin^2 x &= 0 \rightarrow 1 - \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow 1 - \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ \\ \cos x = 1/2 \rightarrow x_3 = 60^\circ, x_4 = 300^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Se comprueba que son válidas todas. Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 &= 60^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_4 &= 300^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones quedaría:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x_2 &= 60^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_3 &= 300^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 4(1 - \cos^2 x) \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 2 &= 0 \rightarrow 4 \cos^2 x - 4 \cos^4 x + 2 \cos^2 x - 2 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow 4 \cos^4 x - 6 \cos^2 x + 2 = 0 \rightarrow 2 \cos^4 x - 3 \cos^2 x + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Sea } \cos^2 x = z \rightarrow \cos^4 x = z^2$$

Así:

$$2z^2 - 3z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} z_1 = 1 \rightarrow \cos x = \pm 1 \\ z_2 = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que todas son válidas. Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k\pi \\ x_2 &= 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi \\ x_3 &= 45^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_4 &= 315^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ x_5 &= 135^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x_6 &= 225^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, agrupando las soluciones:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180^\circ = k\pi \\ x_2 &= 45^\circ + k \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

32 Transforma estas ecuaciones en otras equivalentes cuya incógnita sea $\operatorname{tg} x$ y resuélvelas:

a) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$

b) $\operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$

c) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x = 0$

a) Dividimos toda la ecuación entre $\cos x$:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \rightarrow x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k$$

b) Dividimos toda la ecuación entre $\cos^2 x$:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - 2\sqrt{3} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x} + 3 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} &= 0 \rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 3 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \operatorname{tg} x &= \frac{2\sqrt{3} \pm 0}{2} = \sqrt{3} \rightarrow x = 60^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 240^\circ + 360^\circ \cdot k \end{aligned}$$

c) Dividimos toda la ecuación entre $\cos^2 x$:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x} = 0 \rightarrow \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases}$$

• Si $\operatorname{tg} x = 0 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si $\operatorname{tg} x = -1 \rightarrow x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k$

33 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos(x - \pi) = 2$

b) $\cos\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) + \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0$

c) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$

d) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \sqrt{3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$

a) $\sqrt{3} \left(\cos \frac{3\pi}{2} \cos x - \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \operatorname{sen} x \right) + \cos x \cos \pi + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \pi = 2 \rightarrow$

$$\rightarrow \sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x = 2 \rightarrow \sqrt{3} \operatorname{sen} x - 2 = \cos x$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$3 \operatorname{sen}^2 x - 4\sqrt{3} \operatorname{sen} x + 4 = \cos^2 x \rightarrow 3 \operatorname{sen}^2 x - 4\sqrt{3} \operatorname{sen} x + 4 = 1 - \operatorname{sen}^2 x \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 \operatorname{sen}^2 x - 4\sqrt{3} \operatorname{sen} x + 3 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{4\sqrt{3} \pm 0}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k; x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k$$

Ahora debemos comprobar las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

$$x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) = 1 \neq 2 \text{ No vale.}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \pi\right) = 2 \text{ Vale.}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos \frac{5\pi}{6} \cos x + \sin \frac{5\pi}{6} \sin x + \sin x - \sqrt{3} \cos x &= 0 \rightarrow -\frac{\sqrt{3} \cos x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{3}{2} \sin x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos x \end{aligned}$$

Dividimos los dos miembros entre $\cos x$:

$$\frac{3}{2} \operatorname{tg} x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k; x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi \cdot k$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sin \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x &= 1 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x + \cos x - \sin x) &= 1 \rightarrow 2 \cos x = \frac{2}{\sqrt{2}} \rightarrow \\ \rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k; x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi \cdot k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x - \sqrt{3} \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \sin x \right) &= 1 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\cos x}{2} + \frac{\sqrt{3} \sin x}{2} - \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3} \cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} \right) &= 1 \rightarrow \\ \rightarrow \cos x + \sqrt{3} \sin x - 3 \cos x + \sqrt{3} \sin x &= 2 \rightarrow \\ \rightarrow -2 \cos x + 2\sqrt{3} \sin x = 2 \rightarrow \sqrt{3} \sin x &= 1 + \cos x \end{aligned}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$\begin{aligned} 3 \sin^2 x = 1 + 2 \cos x + \cos^2 x \rightarrow 3 - 3 \cos^2 x &= 1 + 2 \cos x + \cos^2 x \rightarrow \\ \rightarrow 4 \cos^2 x + 2 \cos x - 2 &= 0 \rightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

- Si $\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k \rightarrow x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi \cdot k$
- Si $\cos x = -1 \rightarrow x = \pi + 2\pi \cdot k$

Ahora debemos comprobar las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

- Si $x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ Vale.
- Si $x = \frac{5\pi}{3} \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) = -2 \neq 1$ No vale.
- Si $x = \pi \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) - \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) = 1$ Vale.

34 Resuelve.

a) $\operatorname{sen} \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = \sqrt{2}$

b) $\cos 3x + \cos x = 2 \cdot \cos 210^\circ \cdot \cos x$

c) $4 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \cos x = 3$

a) Aplicamos las fórmulas del ángulo mitad:

$$\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} + \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{2}$$

Elevando al cuadrado:

$$\frac{1-\cos x}{2} + \frac{1+\cos x}{2} + 2\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = 2$$

$$1 + 2\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{4}} = 2 \rightarrow 1 + 2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{2}\right) = 2 \rightarrow \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow x = 90^\circ + 360^\circ k$$

Como hemos elevado al cuadrado debemos comprobar que las soluciones son válidas y observamos que cuando k es impar, el valor de α que resulta no es solución de la ecuación pero cuando k es par, sí que lo es.

Por tanto, la solución es: $x = 90^\circ + 720^\circ k$

b) Aplicando las fórmulas de la suma de cosenos:

$$2 \cos 2x \cdot \cos x = 2 \cos 210^\circ \cdot \cos x$$

Si $\cos x = 0$, la ecuación se cumple: $x = 90^\circ + 180^\circ k$

Si $\cos x \neq 0$:

$$2 \cos 2x = 2 \cos 210^\circ \rightarrow \cos 2x = \cos 210^\circ$$

Por tanto:

$$2x = 210^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 105^\circ + 180^\circ k$$

Y como $\cos 210^\circ = \cos 150^\circ$:

$$2x = 150^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 75^\circ + 180^\circ k$$

Solución: $x = 90^\circ + 180^\circ$; $x = 105^\circ + 180^\circ k$; $x = 75^\circ + 180^\circ k$

c) Aplicando la fórmula del ángulo medio y restando $\cos x$:

$$4\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = 3 - \cos x$$

Ahora elevamos al cuadrado:

$$\frac{16(1-\cos x)}{2} = 9 + \cos^2 x - 6 \cos x \rightarrow 8 - 8 \cos x - 9 - \cos^2 x + 6 \cos x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos^2 x + 2 \cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1 \rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ k$$

De nuevo, si comprobamos las soluciones, observamos que para valores impares de k , el valor de x obtenido no es solución de la ecuación mientras que para los valores pares sí que lo es, por tanto, la solución es: $x = 180^\circ + 720^\circ k$.

35 Resuelve transformando en producto.

a) $\operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 4x = 2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \operatorname{sen} x$

b) $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x = 2 \cdot \operatorname{sen} 240^\circ \cdot \cos x$

a) Por las fórmulas de la resta de senos:

$$2 \cos 5x \cdot \operatorname{sen} x = 2 \cos 60^\circ \cdot \operatorname{sen} x$$

Si $\operatorname{sen} x = 0$, la ecuación se cumple: $x = 0^\circ + 180^\circ k$

Si $\operatorname{sen} x \neq 0$, dividimos ambos miembros de la ecuación por $\operatorname{sen} x$:

$$2 \cos 5x = 2 \cos 60^\circ \rightarrow \cos 5x = \cos 60^\circ \rightarrow 5x = 60^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 12^\circ + 72^\circ k$$

Como $\cos 60^\circ = \cos 300^\circ$:

$$2 \cos 5x = 2 \cos 60^\circ \rightarrow 2 \cos 5x = 2 \cos 300^\circ \rightarrow \cos 5x = \cos 300^\circ \rightarrow 5x = 300^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 60^\circ + 72^\circ k$$

Solución: $x = 0^\circ + 180^\circ k$; $x = 12^\circ + 72^\circ k$; $x = 60^\circ + 72^\circ k$

b) Por la fórmula de la suma de los senos:

$$2 \operatorname{sen} 4x \cos x = 2 \operatorname{sen} 240^\circ \cos x$$

Si $\cos x = 0$, la ecuación se cumple: $x = 90^\circ + 180^\circ k$

Si $\cos x \neq 0$, dividimos ambos miembros de la ecuación por $\cos x$:

$$2 \operatorname{sen} 4x = 2 \operatorname{sen} 240^\circ \rightarrow \operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen} 240^\circ \rightarrow 4x = 240^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 60^\circ + 90^\circ k$$

Como $\operatorname{sen} 240^\circ = \operatorname{sen} 300^\circ$:

$$\operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen} 240^\circ \rightarrow \operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen} 300^\circ \rightarrow 4x = 300^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 75^\circ + 90^\circ k$$

Solución: $x = 90^\circ + 180^\circ k$; $x = 60^\circ + 72^\circ k$; $x = 75^\circ + 90^\circ k$

36 Resuelve.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} x + \operatorname{sen}^2 y = 2 \\ x + \cos^2 y = 1 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2} \\ \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}$$

* Da las soluciones del intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$.

a) De la segunda ecuación sabemos que $x = \operatorname{sen}^2 y$.

Sustituyendo en la primera ecuación: $\operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 2 \rightarrow \operatorname{sen}^2 y = 1 \rightarrow x = 1$

Por tanto: $1 = \operatorname{sen}^2 y \rightarrow \operatorname{sen} y = \pm 1 \rightarrow y = 90^\circ, y = 270^\circ$

Soluciones: $x = 1, y = 90^\circ$; $x = 1, y = 270^\circ$

b) Restamos las ecuaciones (1.ª ecuación - 2.ª ecuación)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x + \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y &= 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x - (1 - \operatorname{sen}^2 x) + 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x = 0 \rightarrow x = 0^\circ, x = 180^\circ \end{aligned}$$

Volviendo a la primera ecuación:

$$\cos^2 y = \frac{1}{2} \rightarrow \cos y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si $\cos y = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow y = 45^\circ, y = 315^\circ$

Si $\cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow y = 135^\circ, y = 225^\circ$

Soluciones:

$$x = 0^\circ, y = 45^\circ$$

$$x = 0^\circ, y = 135^\circ$$

$$x = 0^\circ, y = 315^\circ$$

$$x = 0^\circ, y = 225^\circ$$

$$x = 180^\circ, y = 45^\circ$$

$$x = 180^\circ, y = 135^\circ$$

$$x = 180^\circ, y = 315^\circ$$

$$x = 180^\circ, y = 225^\circ$$

37 Elige la respuesta correcta: «Las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en el intervalo $[0, 2\pi)$ son»:

a) $\frac{17\pi}{12}$ y $\frac{23\pi}{12}$

b) $\frac{\pi}{12}$ y $\frac{7\pi}{12}$

c) $\frac{5\pi}{12}$ y $\frac{11\pi}{12}$

Veamos que la solución correcta es a).

Para que se cumpla la igualdad dada se tiene que cumplir:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{6} - x = \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{6} - x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

De la primera igualdad: $x = -\frac{\pi}{12} = 2\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{23\pi}{12}$

De la segunda igualdad: $x = -7\frac{\pi}{12} = 2\pi - \frac{7\pi}{12} = \frac{17\pi}{12}$

Página 128

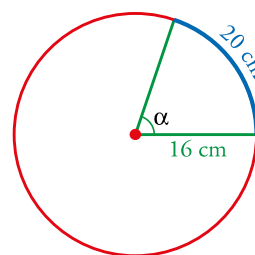
Para resolver

38 En una circunferencia de 16 cm de radio, un arco mide 20 cm. Halla el ángulo central que corresponde a ese arco en grados y en radianes.

Como la circunferencia completa (100,53 cm) son 2π rad, entonces:

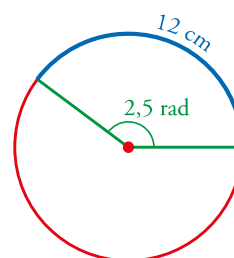
$$\frac{100,53}{20} = \frac{2\pi}{\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{20 \cdot 2\pi}{100,53} = 1,25 \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 1,25 = 71^\circ 37' 11''$$



39 En una determinada circunferencia, a un arco de 12 cm de longitud le corresponde un ángulo de 2,5 radianes. ¿Cuál es el radio de esa circunferencia?

$$\frac{2,5 \text{ rad}}{1 \text{ rad}} = \frac{12 \text{ cm}}{R \text{ cm}} \rightarrow R = \frac{12}{2,5} = 4,8 \text{ cm}$$



40 Halla, en radianes, el ángulo comprendido entre 0 y 2π tal que sus razones trigonométricas coincidan con las de $\frac{19\pi}{5}$.

Como $\frac{19}{5} = 3,8$, el ángulo α dado verifica $2\pi < \alpha < 4\pi$, luego tiene más de una vuelta completa y menos de dos vueltas.

Si le restamos una vuelta (2π) obtendremos el ángulo que nos piden.

Tiene las mismas razones trigonométricas que el ángulo $\frac{19\pi}{5} - 2\pi = \frac{9\pi}{5}$ y $0 < \frac{9\pi}{5} \text{ rad} < 2\pi$.

41 Haz una tabla de valores como la de la página 122 para cada una de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente en el intervalo $[0, 2\pi)$:

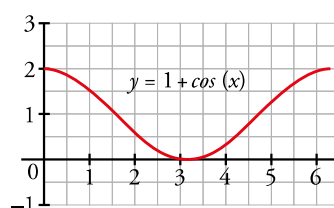
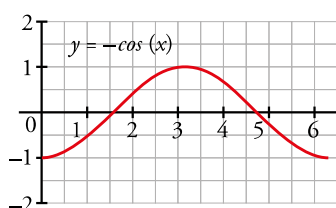
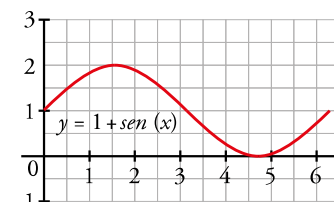
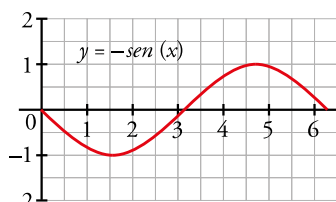
a) $y = -\operatorname{sen} x$

b) $y = 1 + \operatorname{sen} x$

c) $y = -\cos x$

d) $y = 1 + \cos x$

Grad (°)	rad	$-\operatorname{sen} x$	$1 + \operatorname{sen} x$	$-\cos x$	$1 + \cos x$
0	0	0	1	-1	2
30	$\pi/6$	$-1/2$	$3/2$	$-\sqrt{3}/2$	$1 + \sqrt{3}/2$
45	$\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$1 + \sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$1 + \sqrt{2}/2$
60	$\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$1 + \sqrt{3}/2$	$-1/2$	$3/2$
90	$\pi/2$	-1	2	0	1
120	$2\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$1 + \sqrt{3}/2$	$1/2$	$1/2$
135	$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$1 + \sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1 - \sqrt{2}/2$
150	$5\pi/6$	$-1/2$	$3/2$	$\sqrt{3}/2$	$1 - \sqrt{3}/2$
180	π	0	1	1	0
210	$7\pi/6$	$1/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1 - \sqrt{3}/2$
225	$5\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$1 - \sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1 - \sqrt{2}/2$
240	$4\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1 - \sqrt{3}/2$	$1/2$	$1/2$
270	$3\pi/2$	1	0	0	1
300	$5\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1 - \sqrt{3}/2$	$-1/2$	$3/2$
315	$7\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$1 - \sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$1 + \sqrt{2}/2$
330	$11\pi/6$	$1/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$1 + \sqrt{3}/2$
360	2π	0	1	-1	2



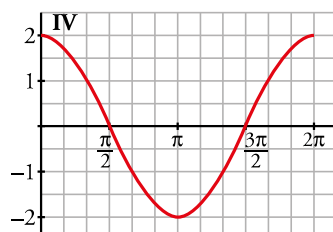
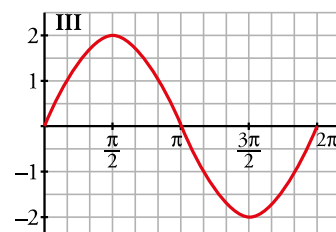
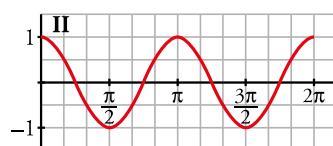
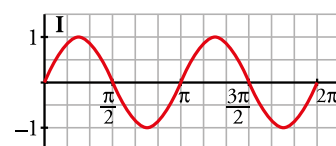
42 Asocia a cada una de estas funciones su gráfica:

a) $y = 2 \operatorname{sen} x$

b) $y = \cos 2x$

c) $y = 2 \cos x$

d) $y = \operatorname{sen} 2x$



a) Gráfica III.

b) Gráfica II.

c) Gráfica IV.

d) Gráfica I.

43 En un triángulo ABC conocemos $\hat{B} = 45^\circ$ y $\cos \hat{A} = -1/5$. Calcula, sin hallar los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$, las razones trigonométricas del ángulo $\hat{C}$.

Calculamos primero las razones trigonométricas de $\hat{A}$ y de $\hat{B}$.

$$\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1 \rightarrow \sin^2 \hat{A} + \frac{1}{25} = 1 \rightarrow \sin^2 \hat{A} = \frac{24}{25} \rightarrow \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{24}}{5} \text{ ya que } \hat{A} < 180^\circ.$$

$$\sin \hat{B} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \hat{B} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin \hat{C} &= \sin (180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})) = \sin 180^\circ \cos (\hat{A} + \hat{B}) - \cos 180^\circ \sin (\hat{A} + \hat{B}) = \sin (\hat{A} + \hat{B}) = \\ &= \sin \hat{A} \cos \hat{B} + \cos \hat{A} \sin \hat{B} = \frac{\sqrt{24}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \hat{C} &= \cos (180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})) = \cos 180^\circ \cos (\hat{A} + \hat{B}) + \sin 180^\circ \sin (\hat{A} + \hat{B}) = -\cos (\hat{A} + \hat{B}) = \\ &= -(\cos \hat{A} \cos \hat{B} - \sin \hat{A} \sin \hat{B}) = -\left(-\frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{24}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{\sin \hat{C}}{\cos \hat{C}} = \frac{\frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{10}}{\frac{4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{10}} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{25 - 4\sqrt{6}}{23}$$

44 Si $\sin x \cdot \cos x = 0,25$ comprueba sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora, que $\operatorname{tg} x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Según el enunciado:

$$\begin{aligned} \sin x \cos x &= 1/4 \rightarrow \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1/4 \rightarrow \sin^2 x (1 - \sin^2 x) = 1/16 \rightarrow \\ &\rightarrow \sin^4 x - \sin^2 x + 1/16 = 0 \end{aligned}$$

Obtenemos, por tanto, una ecuación bicuadrada en la que obtenemos como soluciones:

$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \text{ o bien } \sin x = \pm \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

Si comprobamos las soluciones en la ecuación inicial, observamos que solo son válidas las soluciones:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \text{ o bien } \sin x = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

Por otra parte, sabemos:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{1/(4 \sin x)} = 4 \sin^2 x$$

$$\text{Si } \sin x = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \rightarrow \operatorname{tg} x = 4 \left(\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \right)^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{Si } \sin x = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \rightarrow \operatorname{tg} x = 4 \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \right)^2 = 2 + \sqrt{3}$$

45 Demuestra estas igualdades:

a) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \cos 2\alpha$

b) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^3 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha \end{aligned}$$

$$b) \operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x \rightarrow \operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$$

Podemos aplicar la fórmula de la suma de senos:

$$2 \cos 2x \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x (2 - 4 \operatorname{sen}^2 x)$$

Aplicamos la fórmula del ángulo doble:

$$\begin{aligned} 2 (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen} x (2 - 4 \operatorname{sen}^2 x) \rightarrow \operatorname{sen} x (2 \cos^2 x - 2 \operatorname{sen}^2 x - 2 + 4 \operatorname{sen}^2 x) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{sen} x (2 \cos^2 x + 2 \operatorname{sen}^2 x - 2) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{sen} x (2 - 2) = 0 \rightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

Todos los valores de x son solución de la igualdad y, por tanto, es cierta.

46 Simplifica.

$$a) \frac{2 \cos (45^\circ + \alpha) \cos (45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha}$$

$$b) \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$\begin{aligned} a) \frac{2 \cos (45^\circ + \alpha) \cos (45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha} &= \frac{2 (\cos 45^\circ \cos \alpha - \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} \alpha) (\cos 45^\circ \cos \alpha + \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} \alpha)}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 (\cos^2 45^\circ \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 45^\circ \operatorname{sen}^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 \cdot [(\sqrt{2}/2)^2 \cos^2 \alpha - (\sqrt{2}/2)^2 \operatorname{sen}^2 \alpha]}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 \cdot 1/2 \cos^2 \alpha - 2 \cdot 1/2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos (2\alpha) - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} (2\alpha) &= \operatorname{sen} \alpha (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - \cos \alpha 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \\ &= \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha = -\operatorname{sen}^3 \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= -\operatorname{sen} \alpha (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$

47 Resuelve estas ecuaciones:

$$a) \frac{\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1$$

$$b) \frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x}{\cos 3x - \cos x} = \sqrt{3}$$

$$c) \operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = \cos 2x$$

$$d) \operatorname{sen} 3x - \cos 3x = \operatorname{sen} x - \cos x$$

$$a) \frac{2 \operatorname{sen} \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2}}{2 \cos \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2}} = 1 \rightarrow \frac{2 \operatorname{sen} 4x \cos x}{2 \cos 2x \cos x} = 1 \rightarrow \frac{\operatorname{sen} 4x}{\cos 2x} = 1 \rightarrow \frac{\operatorname{sen} (2 \cdot 2x)}{\cos 2x} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x}{\cos 2x} = 1 \rightarrow 2 \operatorname{sen} 2x = 1 \rightarrow \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 30^\circ \rightarrow x_1 = 15^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 150^\circ \rightarrow x_2 = 75^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 390^\circ \rightarrow x_3 = 195^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 510^\circ \rightarrow x_4 = 255^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \end{array} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Al comprobar, vemos que todas las soluciones son válidas.

$$b) \frac{2 \operatorname{sen} \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2}}{-2 \operatorname{sen} \frac{3x+x}{2} \operatorname{sen} \frac{3x-x}{2}} = \sqrt{3} \rightarrow \frac{2 \operatorname{sen} 2x \cos x}{-2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{-\operatorname{sen} x} = -\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \sqrt{3} \rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 150^\circ \\ x_2 = 330^\circ \end{cases}$$

Ambas soluciones son válidas, luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $2 \cos \frac{3x+x}{2} \operatorname{sen} \frac{3x-x}{2} = \cos 2x$

$$2 \cos 2x \operatorname{sen} x = \cos 2x \rightarrow 2 \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow x_1 = 30^\circ, x_2 = 150^\circ$$

Comprobando, vemos que las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = \cos 3x - \cos x \rightarrow 2 \cos 2x \operatorname{sen} x = -2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x \rightarrow$ (Dividimos entre $2 \operatorname{sen} x$)
 $\rightarrow \cos 2x = -\operatorname{sen} 2x \rightarrow \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = -1 \rightarrow \operatorname{tg} 2x = -1 \rightarrow$

$$\rightarrow \left\{ \begin{aligned} 2x &= 315^\circ \rightarrow x_1 = 157,5^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x &= 135^\circ \rightarrow x_2 = 67,5^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x &= 675^\circ \rightarrow x_3 = 337,5^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x &= 495^\circ \rightarrow x_4 = 247,5^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos comprobar que las cuatro soluciones son válidas. Agrupándolas:

$$x = 67,5^\circ + k \cdot 90^\circ \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

48 a) Demuestra: $\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$

b) Utiliza el resultado del apartado a) para demostrar:

$$\cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

a) El primer miembro de la igualdad es una diferencia de cuadrados, luego podemos factorizarlo como una suma por una diferencia:

$$\begin{aligned} & \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right] \cdot \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right] \stackrel{(*)}{=} \left[2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right] \cdot \left[2 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \right] = \\ & = 4 \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} = \sqrt{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \beta)} = \\ & = \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta)} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \beta} = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

(*) Transformamos la suma y la diferencia en productos, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} = \alpha \text{ y } \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} = \beta$$

b) Procedemos de manera análoga al apartado anterior, pero ahora:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha \text{ y } \frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} = -\beta \\ & \cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \left[\cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right] \cdot \left[\cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right] = \\ & = \left[2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{-\beta}{2} \right] \cdot \left[-2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{-\beta}{2} \right] = \left[2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right] \cdot \left[2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \right] = \\ & = 4 \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} = \sqrt{(1 + \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta)} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \beta} = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

NOTA: También podríamos haberlo resuelto aplicando el apartado anterior como sigue:

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) &= 1 - \sin^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - 1 + \sin^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \\ &= \sin^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \stackrel{(*)}{=} \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

(*) Por el apartado anterior.

49 En una circunferencia goniométrica dibujamos los ángulos α y β .

Llamamos $\gamma = \alpha - \beta$.

a) ¿Cuál de estas expresiones es igual a $\sin \gamma$?

I. $ac + bd$

II. $bc - ad$

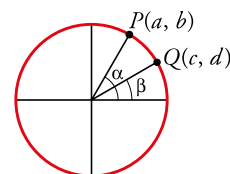
III. $ad - bc$

IV. $ab + cd$

b) ¿Alguna de ellas es igual a $\cos \gamma$?

a) $\sin \gamma = \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = bc - ad$ (II)

b) $\cos \gamma = \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = bd + ac$ (I)



50 Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante:

a)
$$\begin{cases} x + y = 120^\circ \\ \sin x - \sin y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 1 \\ \cos^2 x - \sin^2 y = 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ 4 \sin x \cos y = 1 \end{cases}$$

a) De la segunda ecuación: $2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$

Como:

$$\begin{aligned} x + y = 120^\circ &\rightarrow 2 \cos 60^\circ \sin \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \\ &\rightarrow \sin \frac{x-y}{2} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{x-y}{2} = 30^\circ \rightarrow x - y = 60^\circ \end{aligned}$$

Así: $x + y = 120^\circ$

$x - y = 60^\circ$

$2x = 180^\circ \rightarrow x = 90^\circ \rightarrow y = 30^\circ$

Luego la solución es $(90^\circ, 30^\circ)$

b) $x + y = 90^\circ \rightarrow$ complementarios $\rightarrow \sin x = \cos y$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema:

$\cos y + \cos y = 1 \rightarrow 2 \cos y = 1 \rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \rightarrow y = 60^\circ \rightarrow x = 90^\circ - y = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

Luego la solución es: $(30^\circ, 60^\circ)$

c) Como
$$\begin{cases} \cos^2 y = 1 - \sin^2 y \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$$

El sistema queda:

$$\begin{cases} \sin^2 x + 1 - \sin^2 y = 1 \\ 1 - \sin^2 x - \sin^2 y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin^2 x - \sin^2 y = 0 \\ -\sin^2 x - \sin^2 y = 0 \end{cases}$$

$-2 \sin^2 y = 0 \rightarrow \sin y = 0 \rightarrow y = 0^\circ$

Sustituyendo en la segunda ecuación (por ejemplo) del sistema inicial, se obtiene:

$$\cos^2 x - 0 = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 = \begin{cases} \cos x = 1 \rightarrow x = 0^\circ \\ \cos x = -1 \rightarrow x = 180^\circ \in 2.^\circ \text{ cuadrante} \end{cases}$$

Luego la solución es: $(0^\circ, 0^\circ)$

$$d) \begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos y = 1 \\ 4 \operatorname{sen} x \cos y = 1 \end{cases} \rightarrow \cos y = 1 - \operatorname{sen} x$$

$$4 \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen} x) = 1 \rightarrow 4 \operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow \cos y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Luego, la solución es: $(30^\circ, 60^\circ)$.

51 Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$:

$$a) \begin{cases} \cos x + \cos y = -1/2 \\ \cos x \cos y = -1/2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y = \pi/2 \\ \sqrt{3} \cos x - \cos y = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \operatorname{sen}(x - y) = 1/2 \\ \cos(x + y) = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos y = 1/2 \\ \operatorname{cosec} x + \sec y = -1 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} \cos x + \cos y = -\frac{1}{2} \\ \cos x \cdot \cos y = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos y = -\frac{1}{2} - \cos x \\ \cos x \left(-\frac{1}{2} - \cos x\right) = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow -\frac{1}{2} \cos x - \cos^2 x = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x + 2 \cos^2 x = 1$$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} \frac{-1-3}{4} = -1 \\ \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

• Si $\cos x = -1 \rightarrow x = \pi$

$$\cos y = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} y = \pi/3 \\ y = 5\pi/3 \end{cases}$$

• Si $\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \cos y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \rightarrow y = \pi \\ x = \frac{5\pi}{3} \rightarrow \cos y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \rightarrow y = \pi \end{cases}$

Soluciones: $\left(\pi, \frac{\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{5\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \left(\frac{5\pi}{3}, \pi\right)$

$$b) y = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\sqrt{3} \cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 \rightarrow \sqrt{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{2} \cos x - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \sqrt{3} \cos x = \operatorname{sen} x + 1$$

Elevamos al cuadrado:

$$3 \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x + 1 \rightarrow 3(1 - \operatorname{sen}^2 x) = \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x + 1 \rightarrow 4 \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x - 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

• Si $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$

$$x = \frac{\pi}{6} \rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ y } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) \text{ vale.}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} \rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} \text{ no puede ser porque no está en el intervalo dado.}$$

• Si $\operatorname{sen} x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = -\pi$ tampoco es posible por el mismo motivo.

c) De la primera ecuación tenemos:

$$x - y = 30 \text{ o bien } x - y = 150$$

De la segunda ecuación tenemos:

$$x + y = 90 \text{ o bien } x + y = 270$$

Tenemos que resolver 4 sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 30 \\ x + y = 90 \end{cases}$$

$$\text{Sumando las dos ecuaciones: } 2x = 120 \rightarrow x = 60 \rightarrow y = 30$$

$$\begin{cases} x - y = 150 \\ x + y = 90 \end{cases}$$

$$\text{Sumando las dos ecuaciones: } 2x = 240 \rightarrow x = 120 \rightarrow y = 330$$

$$\begin{cases} x - y = 30 \\ x + y = 270 \end{cases}$$

$$\text{Sumando las dos ecuaciones: } 2x = 300 \rightarrow x = 150 \rightarrow y = 120$$

$$\begin{cases} x - y = 150 \\ x + y = 270 \end{cases}$$

$$\text{Sumando las dos ecuaciones: } 2x = 420 \rightarrow x = 210 \rightarrow y = 60$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 60^\circ, y_1 = 30^\circ; x_2 = 120^\circ, y_2 = 330^\circ; x_3 = 150^\circ, y_3 = 120^\circ; x_4 = 210^\circ, y_4 = 60^\circ$$

d) De la primera ecuación tenemos que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} - \cos y$, y sustituimos en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec} x + \sec y &= -1 \rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{\cos y} = -1 \rightarrow \frac{\cos y + \frac{1}{2} - \cos y}{\left(\frac{1}{2} - \cos y\right) \cos y} = -1 \rightarrow \\ &\rightarrow \cos^2 y - \frac{1}{2} \cos y - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \cos y = 1 \text{ o bien } \cos y = -1/2 \end{aligned}$$

$$\text{Si } \cos y = 1 \rightarrow y = 0$$

$$\text{Si } \cos y = -1/2 \rightarrow y_1 = 120, y_2 = 240$$

$$\text{Volvemos a la primera ecuación: } \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} - \cos y$$

$$\text{Si } \cos y = 1 \rightarrow \operatorname{sen} x = -1/2 \rightarrow x_1 = 330, x_2 = 210$$

$$\text{Si } \cos y = -1/2 \rightarrow \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow x = 90$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 330^\circ, y_1 = 0^\circ; x_2 = 210^\circ, y_2 = 0^\circ; x_3 = 90^\circ, y_3 = 120^\circ; x_4 = 90^\circ, y_4 = 240^\circ$$

52 Halla los valores de α y β para los que se cumple la igualdad $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$.

$$\text{Como } \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta, \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \rightarrow \cos \alpha \operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$

Esta relación es cierta, obviamente si $\alpha = \beta$.

Por otro lado, dividiendo entre $\cos \alpha \cos \beta$ se tiene que $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}$, luego los ángulos α y β deben tener la misma tangente.

Esto ocurre cuando $\beta = \alpha + 180^\circ \cdot k$ por la periodicidad de la función $y = \operatorname{tg} x$.

Si $\cos \alpha = 0$ entonces $0 = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \rightarrow \cos \beta = 0$ ya que $\operatorname{sen} \alpha = \pm 1$.

Por tanto, la relación también es cierta si α y β son simultáneamente de la forma $90^\circ + 360^\circ \cdot k$ o $270^\circ + 360^\circ \cdot k$.

En resumen, se verifica la igualdad cuando $\beta = \alpha + 180^\circ \cdot k$.

53 Sin desarrollar las razones trigonométricas de la suma o de la diferencia de ángulos, averigua para qué valores de x se verifica cada una de estas igualdades:

a) $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen}(x - 60^\circ) = 0$

b) $\cos(2x + 60^\circ) - \cos(x - 45^\circ) = 0$

c) $\cos(2x - 30^\circ) - \cos(x + 45^\circ) = 0$

a) $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen}(x - 60^\circ) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow 2 \cos \frac{2x + x - 60^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{2x - (x - 60^\circ)}{2} = 0 \rightarrow \cos \frac{3x - 60^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{x + 60^\circ}{2} = 0$$

$$\bullet \text{ Si } \cos \frac{3x - 60^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{3x - 60^\circ}{2} = 90^\circ \rightarrow x = 80^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{3x - 60^\circ}{2} = 270^\circ \rightarrow x = 200^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

Si sumamos 360° encontramos otra solución: $\frac{3x - 60^\circ}{2} = 90^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 320^\circ + 360^\circ \cdot k$

$$\bullet \text{ Si } \operatorname{sen} \frac{x + 60^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x + 60^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{x + 60^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

b) $\cos(2x + 60^\circ) - \cos(x - 45^\circ) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow -2 \operatorname{sen} \frac{2x + 60^\circ + x - 45^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{2x + 60^\circ - (x - 45^\circ)}{2} = 0 \rightarrow \operatorname{sen} \frac{3x + 15^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{x + 105^\circ}{2} = 0$$

$$\bullet \text{ Si } \operatorname{sen} \frac{3x + 15^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{3x + 15^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 355^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{3x + 15^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 115^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

Si sumamos 360° encontramos otra solución: $\frac{3x + 15^\circ}{2} = 0^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 235^\circ + 360^\circ \cdot k$

$$\bullet \text{ Si } \operatorname{sen} \frac{x + 105^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x + 105^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 255^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{x + 105^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 255^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

c) $\cos(2x - 30^\circ) - \cos(x + 45^\circ) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow -2 \operatorname{sen} \frac{2x - 30^\circ + x + 45^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{2x - 30^\circ - (x + 45^\circ)}{2} = 0 \rightarrow \operatorname{sen} \frac{3x + 15^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{x - 75^\circ}{2} = 0$$

$$\bullet \text{ Si } \operatorname{sen} \frac{3x + 15^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{3x + 15^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 355^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{3x + 15^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 115^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

Si sumamos 360° encontramos otra solución: $\frac{3x + 15^\circ}{2} = 0 + 360^\circ \rightarrow x = 235^\circ + 360^\circ \cdot k$

$$\bullet \text{ Si } \operatorname{sen} \frac{x - 75^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x - 75^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 75^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{x - 75^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 75^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

Cuestiones teóricas

54 ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

- a) Las gráficas de las funciones $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ y de $y = \operatorname{sen} x$ son iguales.
- b) La gráfica de la función $y = \cos(x + \pi)$ es igual que la de $y = -\cos x$.
- c) Al duplicarse un ángulo su tangente también se duplica.
- d) La ecuación $\sec x = 2$ no tiene solución.
- e) La ecuación $\operatorname{sen} 3x = -\frac{1}{2}$ tiene seis soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

a) Falso.

Veamos que son distintos, por ejemplo, en $x = \frac{\pi}{4}$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- b) Verdadero, porque el signo del coseno cambia cada 180° .
- c) Falso, la fórmula del ángulo doble nos dice que no se cumple $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\operatorname{tg} \alpha$.
- d) Falso, ya que tiene por ejemplo $\frac{\pi}{3}$ es solución:

$$\sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

e) Verdadero.

$$\begin{aligned} \text{Sabemos que } \operatorname{sen}(3x) = -\frac{1}{2} &\rightarrow 3x = 210^\circ + 360^\circ k \text{ o } x = 330^\circ + 360^\circ k \\ &\rightarrow x = 70^\circ + 120^\circ k \text{ o } x = 110^\circ + 120^\circ k \end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones del intervalo $[0, 360^\circ)$ son:

$$x = 70^\circ, x = 110^\circ, x = 190^\circ, x = 230^\circ, x = 310^\circ, x = 330^\circ$$

Es decir, la ecuación tiene seis soluciones en el intervalo $[0, 360^\circ)$.

55 ¿En qué puntos del intervalo $[0, 4\pi]$ corta al eje X cada una de las siguientes funciones?:

- a) $y = \cos \frac{x}{2}$ b) $y = \operatorname{sen}(x - \pi)$ c) $y = \cos(x + \pi)$

Los puntos de corte con el eje X son aquellos para los que $y = 0$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos \frac{x}{2} = 0 &\rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \pi \\ \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = 3\pi \end{cases} & \text{b) } \operatorname{sen}(x - \pi) = 0 &\rightarrow \begin{cases} x - \pi = -\pi \rightarrow x = 0 \\ x - \pi = 0 \rightarrow x = \pi \\ x - \pi = \pi \rightarrow x = 2\pi \\ x - \pi = 2\pi \rightarrow x = 3\pi \\ x - \pi = 3\pi \rightarrow x = 4\pi \end{cases} \\ \text{c) } y = \cos(x + \pi) = 0 &\rightarrow \begin{cases} x + \pi = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{5\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{7\pi}{2} \rightarrow x = \frac{5\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{9\pi}{2} \rightarrow x = \frac{7\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

56 ¿Qué relación existe entre las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ y la de cada una de las funciones siguientes?:

a) $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ b) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ c) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ d) $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

La relación que existe es que la gráfica de la función $y = \cos x$ está desplazada horizontalmente hacia la izquierda $\frac{\pi}{2}$ unidades respecto de $\operatorname{sen} x$.

a) Coincide con la gráfica de la función $y = \cos x$.

b) Es la gráfica de la función $y = -\operatorname{sen} x$.

c) Coincide con la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$.

d) Coincide con la gráfica de la función $y = \cos x$.

(Además de comprobarse mediante la representación gráfica, puede probarse fácilmente usando las fórmulas de las razones trigonométricas de la suma o diferencia de ángulos).

Para profundizar

57 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2 \operatorname{sen} x + 1 > 0$

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}$

Por tanto, la solución es: $x \in \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right)$

b) Resolvemos $2 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$

Por tanto, la solución es: $x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right)$

58 Demuestra que si $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, se verifica: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma &= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} (180^\circ - (\alpha + \beta)) = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \frac{\operatorname{tg} 180^\circ - \operatorname{tg} (\alpha + \beta)}{1 + \operatorname{tg} 180^\circ \cdot \operatorname{tg} (\alpha + \beta)} = \\ &= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \\ &= \frac{-\operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \frac{-\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta [-\operatorname{tg} (\alpha + \beta)] = \\ &= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} (180^\circ - (\alpha + \beta)) = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \end{aligned}$$

59 Prueba si existe algún triángulo isósceles en el que el coseno del ángulo distinto sea igual a la suma de los cosenos de los ángulos iguales.

Si llamamos x a cada uno de los ángulos iguales, entonces el ángulo desigual es $180^\circ - 2x$.

Se trata de ver si la siguiente ecuación tiene solución: $\cos (180^\circ - 2x) = 2 \cos x$

Veámoslo:

$$\begin{aligned} \cos 180^\circ \cos 2x + \operatorname{sen} 180^\circ \operatorname{sen} 2x &= 2 \cos x \rightarrow -\cos 2x = 2 \cos x \rightarrow -\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 2 \cos x \rightarrow \\ &\rightarrow -\cos^2 x + 1 - \cos^2 x = 2 \cos x \rightarrow 2 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Si $\cos x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \rightarrow x = 68^\circ 31' 45''$ tiene cada uno de los ángulos iguales y el ángulo desigual tiene $180^\circ - 2 \cdot 68^\circ 31' 45'' = 42^\circ 56' 30''$

$\cos x = \frac{-\sqrt{3}-1}{2} < -1$ que no es posible porque el coseno de un ángulo no puede ser menor que -1 .

Luego no existe ningún triángulo con esas condiciones.

60 Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$:

$$\text{a) } \begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{3}/2 \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 3/4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 1/4 \\ \cos x \cdot \sin y = 1/4 \end{cases}$$

a) Elevamos al cuadrado la primera ecuación:

$$\sin^2 x + 2 \sin x \sin y + \sin^2 y = \frac{3}{4} \rightarrow 2 \sin x \sin y + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow \sin x \sin y = 0$$

$$\text{Si } \sin x = 0 \rightarrow x = 0, x = \pi$$

$$\text{Además, } \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{3}, y = \frac{2\pi}{3}$$

Sustituimos en el sistema para comprobarlas porque pueden aparecer soluciones falsas al elevar al cuadrado.

$$\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{2\pi}{3}\right) \text{ Valen.}$$

$$\text{Si } \sin y = 0 \rightarrow y = 0, y = \pi$$

$$\text{Además, } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$$

Sustituimos en el sistema para comprobarlas porque pueden aparecer soluciones falsas al elevar al cuadrado.

$$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \left(\frac{2\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \text{ Valen.}$$

b) Elevamos al cuadrado la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$\sin^2 x \cos^2 y = \frac{1}{16} \rightarrow \cos^2 y = \frac{1}{16 \sin^2 x}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 x \sin^2 y &= \frac{1}{16} \rightarrow \cos^2 x (1 - \cos^2 y) = \frac{1}{16} \rightarrow \cos^2 x \left(1 - \frac{1}{16 \sin^2 x}\right) = \frac{1}{16} \rightarrow \\ &\rightarrow (1 - \sin^2 x) \left(1 - \frac{1}{16 \sin^2 x}\right) = \frac{1}{16} \rightarrow 1 - \frac{1}{16 \sin^2 x} - \sin^2 x + \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \rightarrow \\ &\rightarrow 1 - \frac{1}{16 \sin^2 x} - \sin^2 x = 0 \rightarrow 16 \sin^2 x - 1 - 16 \sin^4 x = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow 16 \sin^4 x - 16 \sin^2 x + 1 = 0 \rightarrow \sin^2 x = \frac{16 \pm \sqrt{192}}{32} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Si } \sin x = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \rightarrow \cos y = \frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$x = 75^\circ, x = 105^\circ, y = 75^\circ, y = 285^\circ$$

Ahora comprobamos las soluciones porque al elevar al cuadrado pueden aparecer resultados falsos:

$$(75^\circ, 75^\circ) \rightarrow \text{Vale.}$$

$$(75^\circ, 285^\circ) \rightarrow \text{No vale ya que no cumple la segunda ecuación.}$$

$$(105^\circ, 75^\circ) \rightarrow \text{No vale ya que no cumple la segunda ecuación.}$$

$$(105^\circ, 285^\circ) \rightarrow \text{Vale.}$$

• Si $\operatorname{sen} x = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \rightarrow \cos y = -\frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
 $x = 285^\circ, x = 255^\circ, y = 105^\circ, y = 255^\circ$

Ahora comprobamos las soluciones porque al elevar al cuadrado pueden aparecer resultados falsos:

$(285^\circ, 105^\circ) \rightarrow$ Vale.

$(285^\circ, 255^\circ) \rightarrow$ No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

$(255^\circ, 105^\circ) \rightarrow$ No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

$(255^\circ, 255^\circ) \rightarrow$ Vale.

61 Demuestra que:

a) $\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$

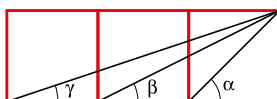
b) $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$

a) Desarrollamos y operamos en el segundo miembro de la igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} &= \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{1 + \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\frac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \\ &= \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\frac{2}{1 + \cos x}} = (1 + \cos x) \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \\ &= \sqrt{(1 + \cos x)^2 \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

b) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}{1 + \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\frac{1 + \cos x - 1 + \cos x}{1 + \cos x}}{\frac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2 \cos x}{2} = \cos x$

62 Demuestra que, en la siguiente figura, $\alpha = \beta + \gamma$:



Supongamos que los cuadrados tienen lado l .

Por una parte,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{l} = 1$$

Por otro lado,

$$\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\frac{l}{2l} + \frac{l}{3l}}{1 - \frac{l}{2l} \cdot \frac{l}{3l}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$$

Así, α y $\beta + \gamma$ son dos ángulos comprendidos entre 0° y 90° cuyas tangentes coinciden. Por tanto, los ángulos tienen que ser iguales, es decir, $\alpha = \beta + \gamma$.

AUTOEVALUACIÓN

Página 129

1 Expresa los radianes en grados y viceversa.

- a) $\frac{3\pi}{5} \text{ rad}$ b) $1,4 \text{ rad}$ c) 140°
a) 108° b) $80^\circ 13'$ c) $7\pi/9$

2 ¿Cuánto mide el arco correspondiente a un ángulo de 0,75 radianes en una circunferencia de 12 cm de diámetro?

Aplicamos la fórmula de la longitud de un arco:

$$L = \text{radio} \cdot \alpha(\text{rad}) = 6 \cdot 0,75 = 4,5$$

3 Si $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ y $\alpha < \pi$, halla:

- a) $\sin \alpha$ b) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$ c) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ d) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$

a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha + \frac{1}{16} = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{15}{16} \rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ya que el ángulo está en el 2.º cuadrante.

$$b) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{-3\sqrt{5}-1}{8}$$

$$c) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)}} = \frac{\sqrt{15}}{3} \text{ porque } \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$d) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{6} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{-3\sqrt{5}-1}{8}$$

4 Demuestra cada una de estas igualdades:

$$a) \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$b) \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$a) \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$b) \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = \\ = \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta = \\ = \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

5 Resuelve.

a) $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$

b) $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 1$

a) $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - (-\operatorname{sen} x) = 1 \rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x (-2 \operatorname{sen} x + 1) = 0 \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0^\circ, x = 180^\circ \\ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30^\circ, x = 150^\circ \end{cases}$$

Soluciones:

$$x_1 = 360^\circ \cdot k; x_2 = 180^\circ + 360^\circ \cdot k; x_3 = 30^\circ + 360^\circ \cdot k; x_4 = 150^\circ + 360^\circ \cdot k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow 2 \operatorname{tg} x \frac{1 + \cos x}{2} - \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \cos x - \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow$

$$\rightarrow \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cos x - \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \begin{cases} x_1 = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 225^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

6 a) Simplifica: $\frac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}{\cos 5x + \cos 3x}$

b) Resuelve: $\frac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \cot g x$

a) Aplicando las fórmulas de suma y resta de seno y coseno:

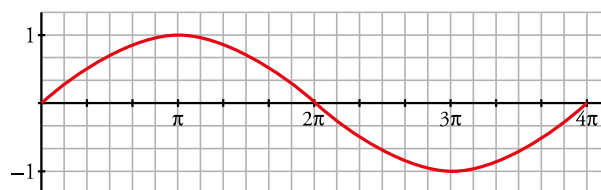
$$\frac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \frac{2 \cos 4x \operatorname{sen} x}{2 \cos 4x \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

b) Tenemos que resolver $\cot g x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \pm 1$

$$x_1 = 45^\circ + 180^\circ k$$

$$x_2 = 135^\circ + 180^\circ k$$

7 Asocia a esta gráfica una de las siguientes expresiones y di cuál es su periodo:



a) $y = \frac{\operatorname{sen} x}{2}$

b) $y = \operatorname{sen} 2x$

c) $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

La función representada es de periodo 4π y se corresponde con la del apartado c).

Podemos comprobarlo estudiando algunos puntos. Por ejemplo:

$$x = \pi \rightarrow y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$

$$x = 2\pi \rightarrow y = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2} = \operatorname{sen} \pi = 0$$

$$x = 3\pi \rightarrow y = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$x = 4\pi \rightarrow y = \operatorname{sen} \frac{4\pi}{2} = \operatorname{sen} 2\pi = 0$$

8 Resuelve dando las soluciones en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$.

$$\text{a) } \begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 3/2 \\ \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 1/2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} y = 3/2 \\ \cos \frac{3x - y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

a) Aislamos $\operatorname{sen} x$ en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$\left(\frac{3}{2} - \operatorname{sen} y\right) \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} y = \frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}}{-2} \rightarrow \operatorname{sen} y = 1 \text{ o } \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}$$

$$\text{Si } \operatorname{sen} y = 1 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30^\circ, y = 90^\circ \text{ o bien } x = 150^\circ, y = 90^\circ$$

$$\text{Si } \operatorname{sen} y = 1/2 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \rightarrow x = 90^\circ, y = 30^\circ \text{ o bien } x = 90^\circ, y = 150^\circ$$

Solución del sistema:

$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, y_1 = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, y_2 = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$x_3 = 90^\circ + 360^\circ k, y_3 = 30^\circ + 360^\circ k$$

$$x_4 = 90^\circ + 360^\circ k, y_4 = 150^\circ + 360^\circ k$$

b) Para resolver el sistema, aplicaremos las fórmulas de suma de senos a la primera ecuación:

$$\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{3x + y}{2} \cos \frac{3x - y}{2} = 3/2$$

Ahora podemos sustituir la segunda ecuación en la primera:

$$2 \operatorname{sen} \frac{3x + y}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \frac{3x + y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{3x + y}{2} = 60^\circ \text{ o bien } \frac{3x + y}{2} = 120^\circ (*)$$

$$\text{Si } \frac{3x + y}{2} = \frac{\pi}{3} \rightarrow y = \frac{2\pi}{3} - 3x$$

$$\text{Y de la segunda ecuación: } \cos \frac{(3x - y)}{2} = 3/2 \rightarrow \frac{3x - y}{2} = 30^\circ \text{ o bien } \frac{3x - y}{2} = 330^\circ (**)$$

Combinamos (*) y (**) para encontrar sus soluciones:

$$\begin{cases} \frac{3x + y}{2} = 60 \\ \frac{3x - y}{2} = 30 \end{cases} \quad \text{Solución: } x = 30^\circ, y = 30^\circ$$

$$\begin{cases} \frac{3x + y}{2} = 60 \\ \frac{3x - y}{2} = 330 \end{cases} \quad \text{Solución: } x = 130^\circ, y = -270^\circ = 90^\circ$$

$$\begin{cases} \frac{3x + y}{2} = 120 \\ \frac{3x - y}{2} = 30 \end{cases} \quad \text{Solución: } x = 50^\circ, y = 90^\circ$$

$$\begin{cases} \frac{3x + y}{2} = 120 \\ \frac{3x - y}{2} = 330 \end{cases} \quad \text{Solución: } x = 150^\circ, y = -210^\circ = 150^\circ$$

$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, y_1 = 30^\circ + 360^\circ k$$

$$x_2 = 130^\circ + 360^\circ k, y_2 = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$x_3 = 50^\circ + 360^\circ k, y_3 = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$x_4 = 150^\circ + 360^\circ k, y_4 = 150^\circ + 360^\circ k$$