

3 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Página 89

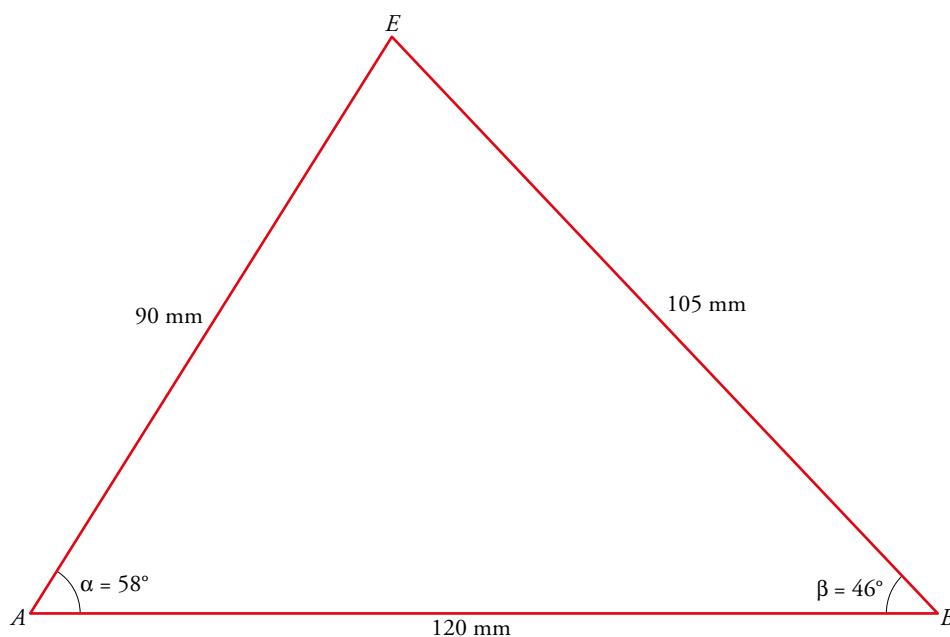
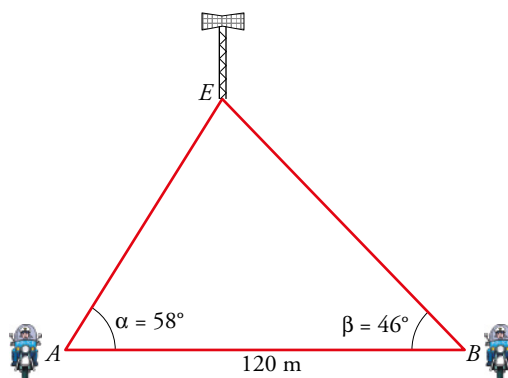
Resuelve

Localización de una emisora clandestina

Vamos a aplicar la técnica de la triangulación para resolver el siguiente problema:

Una emisora de radio clandestina E se sintoniza desde dos controles policiales, A y B . En cada uno de ellos se detecta la dirección en la que se encuentra, no la distancia. Por tanto, se conocen los ángulos $\alpha = 58^\circ$ y $\beta = 46^\circ$, así como la distancia $AB = 120$ m. Para localizar sobre el terreno la emisora E hay que calcular la distancia $\overline{AE}$ o la distancia $\overline{BE}$.

Resuelve el problema planteado realizando un dibujo en tu cuaderno a escala 1:1 000 ($1 \text{ mm} \rightarrow 1 \text{ m}$). Sobre el papel, mide los lados AE y BE e interpreta el resultado en la realidad.



La emisora se encuentra a 90 m del control A y a 105 m del control B .

1 ► RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO (0° A 90°)

Página 90

Hazlo tú

- 1** Sabiendo que $\operatorname{sen} \beta = 0,39$ y que β es agudo, calcula $\cos \beta$ y $\operatorname{tg} \beta$.

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \beta} = \sqrt{1 - (0,39)^2} = 0,92$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} = \frac{0,39}{0,92} = 0,42$$

- 2** Conociendo $\operatorname{tg} \beta = 1,28$ y que β es agudo, calcula $\operatorname{sen} \beta$ y $\cos \beta$.

$$s = \operatorname{sen} \beta; \quad c = \cos \beta$$

$$\begin{cases} s^2 + c^2 = 1 \rightarrow (1,28c)^2 + c^2 = 1 \rightarrow 2,6384c^2 = 1 \rightarrow c = 0,62 \\ \frac{s}{c} = 1,28 \rightarrow s = 1,28c \end{cases}$$

$$\cos \beta = 0,62$$

$$\operatorname{sen} \beta = 1,28 \cdot 0,62 = 0,79$$

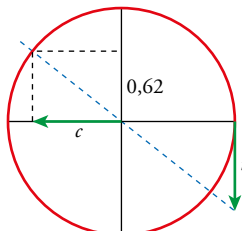
2 ► RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUALESQUIERA (0° A 360°)

Página 91

- 1 Sabiendo que el ángulo α está en el segundo cuadrante ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$) y $\text{sen } \alpha = 0,62$, calcula $\cos \alpha$ y $\text{tg } \alpha$.

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - 0,62^2} = -0,78$$

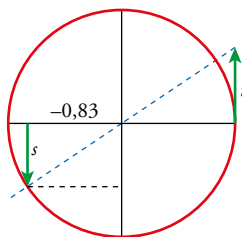
$$\text{tg } \alpha = \frac{0,62}{-0,78} = -0,79$$



- 2 Sabiendo que el ángulo α está en el tercer cuadrante ($180^\circ < \alpha < 270^\circ$) y $\cos \alpha = -0,83$, calcula $\text{sen } \alpha$ y $\text{tg } \alpha$.

$$\text{sen } \alpha = -\sqrt{1 - (-0,83)^2} = -0,56$$

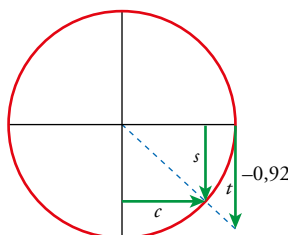
$$\text{tg } \alpha = \frac{-0,56}{-0,83} = 0,67$$



- 3 Sabiendo que el ángulo α está en el cuarto cuadrante ($270^\circ < \alpha < 360^\circ$) y $\text{tg } \alpha = -0,92$, calcula $\text{sen } \alpha$ y $\cos \alpha$.

Si llamamos s a $\text{sen } \alpha$ y c a $\cos \alpha$, entonces:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{s}{c} = -0,92 \\ s^2 + c^2 = 1 \end{array} \right\} \text{ El sistema tiene dos soluciones: } \begin{cases} \text{sen } \alpha = -0,68; \cos \alpha = 0,74 \\ \text{sen } \alpha = 0,68; \cos \alpha = -0,74 \end{cases}$$



- 4 Completa en tu cuaderno la siguiente tabla y amplíala para los ángulos 210° , 225° , 240° , 270° , 300° , 315° , 330° y 360° :

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1				
cos	1	$\sqrt{3}/2$			0				
tg	0	$\sqrt{3}/3$			–				

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0
cos	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
tg	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

3 ▶ ÁNGULOS FUERA DEL INTERVALO 0° A 360°

Página 92

1 Pasa cada uno de los siguientes ángulos al intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$ y al intervalo $(-180^\circ, 180^\circ]$:

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| a) 396° | b) 492° | c) 645° |
| d) 3895° | e) 7612° | f) 1980° |

Se trata de expresar el ángulo de la siguiente forma:

$$k \text{ o } -k, \text{ donde } k \leq 180^\circ$$

- a) $396^\circ = 396^\circ - 360^\circ = 36^\circ$
b) $492^\circ = 492^\circ - 360^\circ = 132^\circ$
c) $645^\circ = 645^\circ - 360^\circ = 285^\circ = 285^\circ - 360^\circ = -75^\circ$
d) $3895^\circ = 3895^\circ - 10 \cdot 360^\circ = 295^\circ = 295^\circ - 360^\circ = -65^\circ$
e) $7612^\circ = 7612^\circ - 21 \cdot 360^\circ = 52^\circ$
f) $1980^\circ = 1980^\circ - 5 \cdot 360^\circ = 180^\circ$

Cuando hacemos, por ejemplo, $7612^\circ = 7612^\circ - 21 \cdot 360^\circ$, ¿por qué tomamos 21? Porque, previamente, hemos realizado la división $7612 : 360 = 21,44\dots$ Es la parte entera del cociente.

2 Determina el valor de estas razones trigonométricas:

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| a) $\text{sen } 13290^\circ$ | b) $\cos (-1680^\circ)$ |
| c) $\text{tg } 3825^\circ$ | d) $\cos 4995^\circ$ |
| e) $\text{sen } (-1710^\circ)$ | f) $\text{tg } 3630^\circ$ |
| g) $\cos (-36000^\circ)$ | h) $\text{sen } (-330^\circ)$ |

a) $13290^\circ = 360^\circ \cdot 36 + 330^\circ$

$$\text{sen } 13290^\circ = \text{sen } 330^\circ = -\text{sen } 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

b) $-1680^\circ = -360^\circ \cdot 4 - 240^\circ$

$$\cos (-1680^\circ) = \cos (-240^\circ) = \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

c) $3825^\circ = 360^\circ \cdot 10 + 225^\circ$

$$\text{tg } 3825^\circ = \text{tg } 225^\circ = \text{tg } 45^\circ = 1$$

d) $4995^\circ = 360^\circ \cdot 13 + 315^\circ$

$$\cos 4995^\circ = \cos 315^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e) $-1710^\circ = -360^\circ \cdot 4 - 270^\circ$

$$\text{sen } (-1710^\circ) = \text{sen } (-270^\circ) = \text{sen } (90^\circ) = 1$$

f) $3630^\circ = 360^\circ \cdot 10 + 30^\circ$

$$\text{tg } 3630^\circ = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

g) $-36000^\circ = -360^\circ \cdot 100$

$$\cos (-36000^\circ) = \cos 0^\circ = 1$$

h) $\text{sen } (-330^\circ) = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$

4 ► TRIGONOMETRÍA CON CALCULADORA

Página 93

Hazlo tú

- 1 Sabiendo que $\operatorname{sen} \beta = 0,87$ y que $90^\circ < \beta < 180^\circ$, calcula $\cos \beta$ y $\operatorname{tg} \beta$.

$$\cos \beta = -0,493$$

$$\operatorname{tg} \beta = -1,765$$

Piensa y practica

- 1 A partir de los datos que se ofrecen en cada apartado relativos al ángulo α , halla, con ayuda de la calculadora, las razones trigonométricas de α .

a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,573$; $\alpha > 90^\circ$

b) $\cos \alpha = 0,309$; $\operatorname{sen} \alpha < 0$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 1,327$; $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

d) $\cos \alpha = -0,819$; $\operatorname{tg} \alpha < 0$

a) $\cos \alpha = -0,82$

$$\operatorname{tg} \alpha = -0,699$$

b) $\operatorname{sen} \alpha = -0,951$

$$\operatorname{tg} \alpha = -3,078$$

c) $\operatorname{sen} \alpha = -0,799$

$$\cos \alpha = -0,602$$

d) $\operatorname{sen} \alpha = 0,574$

$$\operatorname{tg} \alpha = -0,7$$

5 ▶ RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

Página 95

- 1 Calcula las razones trigonométricas de 55° , 125° , 145° , 215° , 235° , 305° y 325° a partir de las razones trigonométricas de 35° .

$$\text{sen } 35^\circ = 0,57; \cos 35^\circ = 0,82; \text{tg } 35^\circ = 0,70$$

- $55^\circ = 90^\circ - 35^\circ \rightarrow 55^\circ$ y 35° son complementarios.

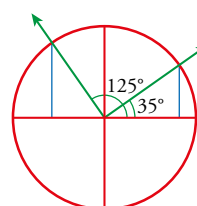
$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } 55^\circ = \cos 35^\circ = 0,82 \\ \cos 55^\circ = \text{sen } 35^\circ = 0,57 \end{array} \right\} \text{tg } 55^\circ = \frac{\text{sen } 55^\circ}{\cos 55^\circ} = \frac{0,82}{0,57} = 1,43 \quad \left(\text{También } \text{tg } 55^\circ = \frac{1}{\text{tg } 35^\circ} = \frac{1}{0,70} \approx 1,43 \right)$$

- $125^\circ = 90^\circ + 35^\circ$

$$\text{sen } 125^\circ = \cos 35^\circ = 0,82$$

$$\cos 125^\circ = -\text{sen } 35^\circ = -0,57$$

$$\text{tg } 125^\circ = \frac{-1}{\text{tg } 35^\circ} = \frac{-1}{0,70} = -1,43$$

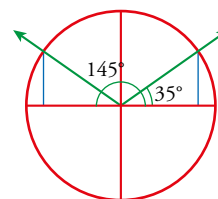


- $145^\circ = 180^\circ - 35^\circ \rightarrow 145^\circ$ y 35° son suplementarios.

$$\text{sen } 145^\circ = \text{sen } 35^\circ = 0,57$$

$$\cos 145^\circ = -\cos 35^\circ = -0,82$$

$$\text{tg } 145^\circ = -\text{tg } 35^\circ = -0,70$$

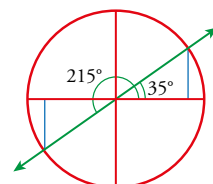


- $215^\circ = 180^\circ + 35^\circ$

$$\text{sen } 215^\circ = -\text{sen } 35^\circ = -0,57$$

$$\cos 215^\circ = -\cos 35^\circ = -0,82$$

$$\text{tg } 215^\circ = \text{tg } 35^\circ = 0,70$$

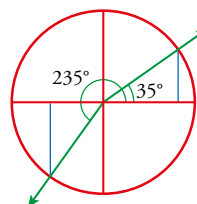


- $235^\circ = 270^\circ - 35^\circ$

$$\text{sen } 235^\circ = -\cos 35^\circ = -0,82$$

$$\cos 235^\circ = -\text{sen } 35^\circ = -0,57$$

$$\text{tg } 235^\circ = \frac{\text{sen } 235^\circ}{\cos 235^\circ} = \frac{-\cos 35^\circ}{-\text{sen } 35^\circ} = \frac{1}{\text{tg } 35^\circ} = \frac{1}{0,70} = 1,43$$

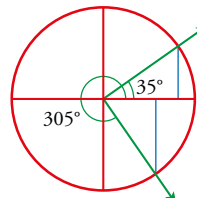


- $305^\circ = 270^\circ + 35^\circ$

$$\text{sen } 305^\circ = -\cos 35^\circ = -0,82$$

$$\cos 305^\circ = \text{sen } 35^\circ = 0,57$$

$$\text{tg } 305^\circ = \frac{\text{sen } 305^\circ}{\cos 305^\circ} = \frac{-\cos 35^\circ}{\text{sen } 35^\circ} = -\frac{1}{\text{tg } 35^\circ} = -1,43$$

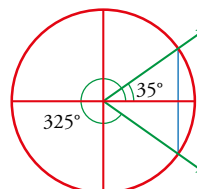


- $325^\circ = 360^\circ - 35^\circ (= -35^\circ)$

$$\text{sen } 325^\circ = -\text{sen } 35^\circ = -0,57$$

$$\cos 325^\circ = \cos 35^\circ = 0,82$$

$$\text{tg } 325^\circ = \frac{\text{sen } 325^\circ}{\cos 325^\circ} = \frac{-\text{sen } 35^\circ}{\cos 35^\circ} = -\text{tg } 35^\circ = -0,70$$



2 Averigua las razones trigonométricas de 358° , 156° y 342° , utilizando la calculadora solo para hallar razones trigonométricas de ángulos comprendidos entre 0° y 90° .

• $358^\circ = 360^\circ - 2^\circ$

$\operatorname{sen} 358^\circ = -\operatorname{sen} 2^\circ = -0,0349$

$\cos 358^\circ = \cos 2^\circ = 0,9994$

$\operatorname{tg} 358^\circ = -\operatorname{tg} 2^\circ = -0,03492$

$(*) \operatorname{tg} 358^\circ = \frac{\operatorname{sen} 358^\circ}{\cos 358^\circ} = \frac{-\operatorname{sen} 2^\circ}{\cos 2^\circ} = -\operatorname{tg} 2^\circ$

• $156^\circ = 180^\circ - 24^\circ$

$\operatorname{sen} 156^\circ = \operatorname{sen} 24^\circ = 0,4067$

$\cos 156^\circ = -\cos 24^\circ = -0,9135$

$\operatorname{tg} 156^\circ = -\operatorname{tg} 24^\circ = -0,4452$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO:

$156^\circ = 90^\circ + 66^\circ$

$\operatorname{sen} 156^\circ = \cos 66^\circ = 0,4067$

$\cos 156^\circ = -\operatorname{sen} 66^\circ = -0,9135$

$\operatorname{tg} 156^\circ = \frac{-1}{\operatorname{tg} 66^\circ} = \frac{-1}{2,2460} = -0,4452$

• $342^\circ = 360^\circ - 18^\circ$

$\operatorname{sen} 342^\circ = -\operatorname{sen} 18^\circ = -0,3090$

$\cos 342^\circ = \cos 18^\circ = 0,9511$

$\operatorname{tg} 342^\circ = -\operatorname{tg} 18^\circ = -0,3249$

3 Dibuja, sobre la circunferencia goniométrica, ángulos que cumplan las siguientes condiciones y estima, en cada caso, el valor de las restantes razones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$

b) $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, $\alpha > 90^\circ$

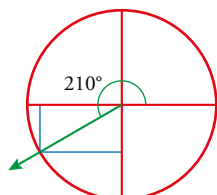
c) $\operatorname{tg} \alpha = -1$, $\cos \alpha < 0$

d) $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\cos \alpha < 0$

e) $\operatorname{sen} \alpha = -1$

f) $\cos \alpha = 0$, $\operatorname{sen} \alpha > 0$

a)

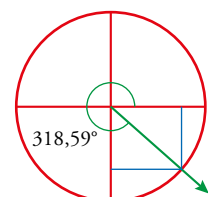


$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha = -1/2 < 0 \\ \operatorname{tg} \alpha > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \cos \alpha < 0 \rightarrow \alpha \in 3.^{\text{er}} \text{ cuadrante}$$

$\cos 210^\circ \approx -0,86$

$\operatorname{tg} 210^\circ \approx 0,58$

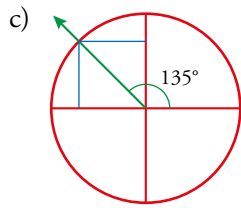
b)



$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha = 3/4 \\ \alpha > 90^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \in 4.^{\circ} \text{ cuadrante}$$

$\operatorname{sen} 318,59^\circ \approx -0,66$

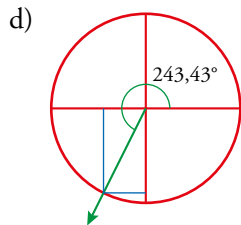
$\operatorname{tg} 318,59^\circ \approx -0,88$



$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \beta = -1 < 0 \\ \cos \beta < 0 \end{array} \right\} \rightarrow \operatorname{sen} \beta > 0 \rightarrow \beta \in 2.^\circ \text{ cuadrante}$$

$$\operatorname{sen} 135^\circ \approx 0,7$$

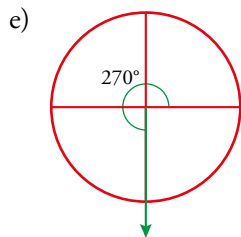
$$\cos 135^\circ \approx -0,7$$



$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = 2 > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{array} \right\} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha < 0 \rightarrow \alpha \in 3.^\circ \text{ cuadrante}$$

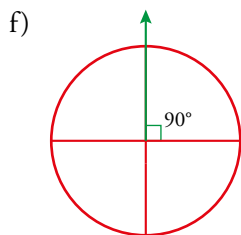
$$\operatorname{sen} 243,43^\circ \approx -0,9$$

$$\cos 243,43^\circ \approx -0,45$$



$$\cos 270^\circ = \cos 90^\circ = 0$$

$$\operatorname{tg} 270^\circ \text{ no existe}$$



$$\operatorname{sen} 90^\circ = 1$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ \text{ no existe}$$

6 ► RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Página 96

Hazlo tú

- 1** Los catetos de un triángulo rectángulo son $a = 47$ cm y $b = 62$ cm. Halla la hipotenusa y los ángulos.

Por el teorema de Pitágoras, $c = \sqrt{47^2 + 62^2} = 77,8$ cm

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{47}{62} \rightarrow \hat{A} = 37^\circ 9' 52''$$

$$\hat{B} = 90^\circ - \hat{A} = 90^\circ - 37^\circ 9' 52'' = 52^\circ 50' 8''$$

- 2** En un triángulo rectángulo conocemos $\hat{B} = 62^\circ$ y $b = 152$ m. Halla los demás elementos.

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow c = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{152}{\operatorname{sen} 62^\circ} = 172,15 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{a} \rightarrow a = \frac{b}{\operatorname{tg} \hat{B}} = \frac{152}{\operatorname{tg} 62^\circ} = 80,82 \text{ cm}$$

$$\hat{A} = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$$

- 3** Conocemos la hipotenusa, $c = 72$ m, y el ángulo $\hat{A} = 23^\circ$ de un triángulo rectángulo. Calcula b .

$$\cos \hat{A} = \frac{b}{c} \rightarrow b = c \cdot \cos \hat{A} = 72 \cdot \cos 23^\circ = 66,28 \text{ cm}$$

Página 97

- 1** Las siguientes propuestas están referidas a triángulos rectángulos que, en todos los casos, se designan por ABC , siendo C el ángulo recto.

a) Datos: $c = 32$ cm, $\hat{B} = 57^\circ$. Calcula a .

b) Datos: $c = 32$ cm, $\hat{B} = 57^\circ$. Calcula b .

c) Datos: $a = 250$ m, $b = 308$ m. Calcula c y $\hat{A}$.

d) Datos: $a = 35$ cm, $\hat{A} = 32^\circ$. Calcula b .

e) Datos: $a = 35$ cm, $\hat{A} = 32^\circ$. Calcula c .

a) $\cos \hat{B} = \frac{a}{c} \rightarrow a = c \cos \hat{B} = 17,43 \text{ cm}$

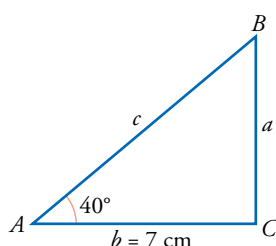
b) $\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow b = c \operatorname{sen} \hat{B} = 26,84 \text{ cm}$

c) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 396,69 \text{ m}$; $\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{b} = 0,81 \rightarrow \hat{A} = 39^\circ 3' 57''$

d) $\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{b} \rightarrow b = \frac{a}{\operatorname{tg} \hat{A}} = 56,01 \text{ cm}$

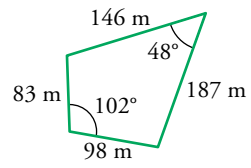
e) $\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a}{c} \rightarrow c = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = 66,05 \text{ cm}$

- 2** Para determinar la altura de un poste nos hemos alejado 7 m de su base y hemos medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo un valor de 40° . ¿Cuánto mide el poste?



$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{a}{7} \rightarrow a = 7 \operatorname{tg} 40^\circ = 5,87 \text{ m}$$

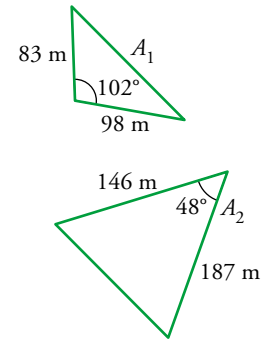
3 Halla el área del siguiente cuadrilátero. Sugerencia: pártelo en dos triángulos.



$$A_1 = \frac{1}{2} 98 \cdot 83 \operatorname{sen} 102^\circ = 3978,13 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2} 187 \cdot 146 \operatorname{sen} 48^\circ = 10144,67 \text{ m}^2$$

El área es la suma de A_1 y A_2 : 14122,80 m²



7 ► RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS. ESTRATEGIA DE LA ALTURA

Página 99

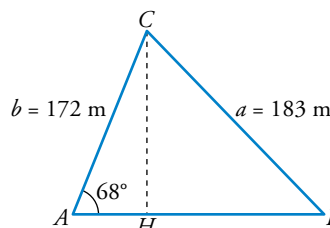
- 1 En un triángulo ABC conocemos $\hat{A} = 68^\circ$, $b = 172$ m y $a = 183$ m. Calcula la longitud del lado c .

$$\overline{AH} = 172 \cos 68^\circ = 64,43 \text{ m}$$

$$\overline{CH} = 172 \operatorname{sen} 68^\circ = 159,48 \text{ m}$$

$$\overline{HB} = \sqrt{a^2 - \overline{CH}^2} = 89,75 \text{ m}$$

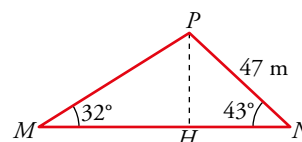
$$c = \overline{AH} + \overline{HB} = 64,43 \text{ m} + 89,75 \text{ m} = 154,18 \text{ m}$$



- 2 En un triángulo MNP conocemos $\hat{M} = 32^\circ$, $\hat{N} = 43^\circ$ y $\overline{NP} = 47$ m. Calcula $\overline{MP}$.

$$\operatorname{sen} 43^\circ = \frac{\overline{PH}}{47} \rightarrow \overline{PH} = 47 \operatorname{sen} 43^\circ = 32,05 \text{ m}$$

$$\operatorname{sen} 32^\circ = \frac{\overline{PH}}{\overline{MP}} \rightarrow \overline{MP} = \frac{\overline{PH}}{\operatorname{sen} 32^\circ} = \frac{32,05}{\operatorname{sen} 32^\circ} = 60,49 \text{ m}$$



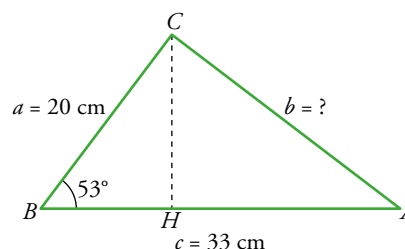
- 3 En un triángulo ABC conocemos $a = 20$ cm, $c = 33$ cm y $\hat{B} = 53^\circ$. Calcula la longitud del lado b .

$$\overline{BH} = a \cos 53^\circ = 12,04 \text{ cm}$$

$$\overline{CH} = a \operatorname{sen} 53^\circ = 15,97 \text{ cm}$$

$$\overline{HA} = c - \overline{BH} = 20,96 \text{ cm}$$

$$b = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HA}^2} = 26,35 \text{ cm}$$



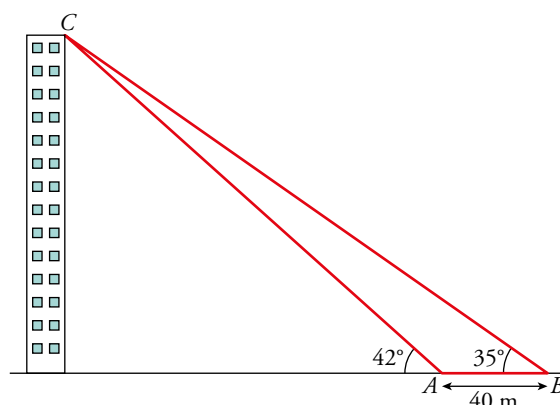
- 4 Observa el gráfico de la derecha. Estamos en A , medimos el ángulo bajo el que se ve el edificio (42°), nos alejamos 40 m y volvemos a medir el ángulo (35°). ¿Cuál es la altura del edificio y a qué distancia nos encontramos de él?

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 42^\circ &= \frac{h}{d} \rightarrow h = d \operatorname{tg} 42^\circ \\ \operatorname{tg} 35^\circ &= \frac{h}{d+40} \rightarrow h = (d+40) \operatorname{tg} 35^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow d \operatorname{tg} 42^\circ = (d+40) \operatorname{tg} 35^\circ \rightarrow d = \frac{40 \operatorname{tg} 35^\circ}{\operatorname{tg} 42^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ} = 139,90 \text{ m}$$

$$h = d \operatorname{tg} 42^\circ = 125,97 \text{ m}$$

La altura es 125,97 m. La primera distancia es 139,90 m, y ahora, después de alejarnos 40 m, estamos a 179,90 m.



8 ▶ DOS IMPORTANTES TEOREMAS PARA RESOLVER TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

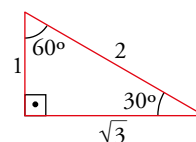
Página 100

1 ¿Verdadero o falso?

- El teorema de los senos confirma que en un triángulo, «a mayor lado se opone mayor ángulo».
- Este triángulo rectángulo es la mitad de un triángulo equilátero.

Dividimos el seno de cada ángulo entre el lado opuesto:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \\ \bullet \frac{\operatorname{sen} 90^\circ}{2} &= \frac{1}{2} \\ \bullet \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{1} &= \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Con estas igualdades se comprueba que se cumple el teorema de los senos.

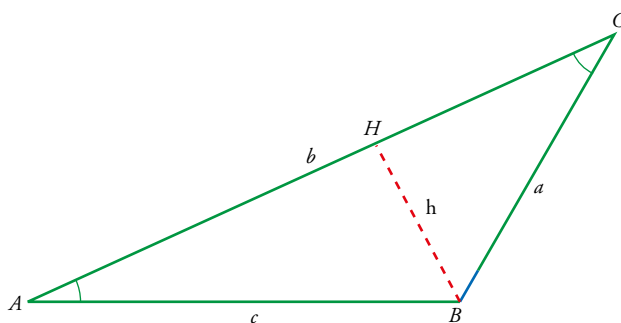
- Verdadero. Como la razón entre el lado y el seno del ángulo opuesto es constante, cuanto mayor es el lado, mayor es el seno del ángulo opuesto y, por tanto, mayor es el ángulo opuesto (al tratarse de ángulos de un triángulo).
- Verdadero. Con estas igualdades se comprueba el teorema de los senos en el caso particular de un triángulo equilátero. Sin embargo, el teorema es mucho más general porque se pueda aplicar a triángulos cualesquiera.

2 Demuestra detalladamente, basándote en la demostración del teorema de los senos, la siguiente relación:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}}$$

Lo demostramos para $\widehat{C}$ ángulo agudo. (Si fuese un ángulo obtuso razonaríamos como en el ejercicio anterior).

Trazamos la altura h desde el vértice B . Así, los triángulos obtenidos AHB y CHB son rectángulos.



Por tanto, tenemos $\operatorname{sen} \widehat{A} = \frac{h}{c} \rightarrow h = c \operatorname{sen} \widehat{A}$

$$\operatorname{sen} \widehat{C} = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \operatorname{sen} \widehat{C}$$

$$c \operatorname{sen} \widehat{A} = a \operatorname{sen} \widehat{C}$$

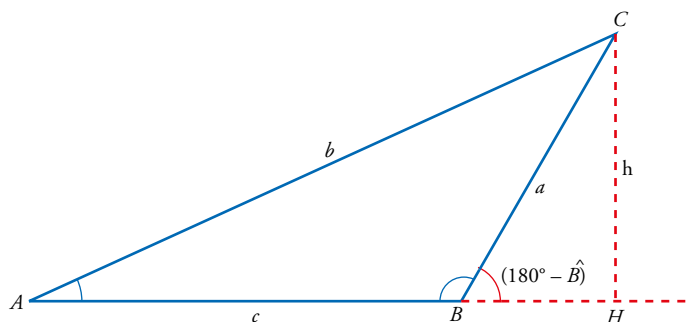
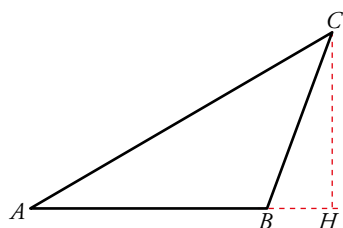
$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}}$$

- 3** Repite la demostración anterior en el caso de que $\hat{B}$ sea obtuso. Ten en cuenta que $\text{sen}(180^\circ - \hat{B}) = \text{sen } \hat{B}$.

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{h}{b} \rightarrow h = b \text{sen } \hat{A}$$

$$\text{sen } \hat{B} = \text{sen}(180^\circ - \hat{B}) = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \text{sen } \hat{B}$$

$$b \text{sen } \hat{A} = a \text{sen } \hat{B} \rightarrow \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}}$$



Página 101

Hazlo tú

- 1** Halla b y c conociendo $a = 56$ m, $\hat{B} = 52^\circ$ y $\hat{C} = 112^\circ$.

$$\hat{A} = 180^\circ - 52^\circ - 112^\circ = 16^\circ$$

Ahora usamos el teorema de los senos.

$$\frac{56}{\text{sen } 16^\circ} = \frac{b}{\text{sen } 52^\circ} \rightarrow b = \frac{56 \cdot \text{sen } 52^\circ}{\text{sen } 16^\circ} = 160,1 \text{ m}$$

$$\frac{56}{\text{sen } 16^\circ} = \frac{c}{\text{sen } 112^\circ} \rightarrow c = \frac{56 \cdot \text{sen } 112^\circ}{\text{sen } 16^\circ} = 188,37 \text{ m}$$

- 2** Calcula $\hat{A}$ conociendo $a = 6$ cm, $b = 4$ cm y $\hat{B} = 30^\circ$.

Por el teorema de los senos:

$$\frac{6}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{4}{\text{sen } 30^\circ} \rightarrow \text{sen } \hat{A} = \frac{6 \cdot \text{sen } 30^\circ}{4} = 0,75 \rightarrow \hat{A}_1 = 48^\circ 35' 25'' \quad \hat{A}_2 = 131^\circ 24' 35''$$

En este caso ambas soluciones son posibles porque $\hat{A} + \hat{B} < 180^\circ$.

Por tanto, tenemos dos posibles triángulos, uno acutángulo y otro obtusángulo.

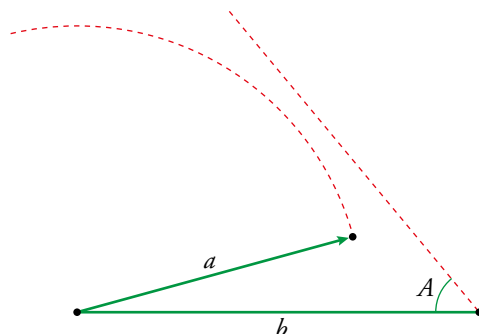
Piensa y practica

- 4** ¿Verdadero o falso?

- Si nos dan dos lados de un triángulo, a y b , y el ángulo opuesto a uno de ellos, $\hat{A}$, y deseamos hallar el ángulo $\hat{B}$, con el teorema de los senos seguro que llegaremos a una solución.
- Si nos dan dos lados y un ángulo de un triángulo y deseamos hallar otro lado, el teorema de los senos seguro que nos permite llegar a una solución.

a) Falso.

Si el lado a no es suficientemente grande, el problema no tendrá solución como muestra el siguiente dibujo:



b) Falso.

Si nos dan el ángulo comprendido entre los dos lados, no podemos plantear el problema usando el teorema de los senos.

5 En un triángulo ABC , conocemos $a = 4$ cm y $\hat{B} = 30^\circ$. Halla $\hat{A}$ en los siguientes casos:

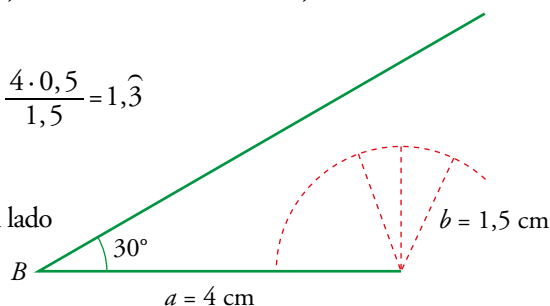
a) $b = 1,5$ cm b) $b = 2$ cm c) $b = 3$ cm d) $b = 4$ cm

a) $b = 1,5$ cm

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} \rightarrow \frac{4}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{1,5}{\widehat{\text{sen } 30^\circ}} \rightarrow \widehat{\text{sen } A} = \frac{4 \cdot 0,5}{1,5} = 1,3$$

¡Imposible, pues $\widehat{\text{sen } A} \in [-1, 1]$ siempre!

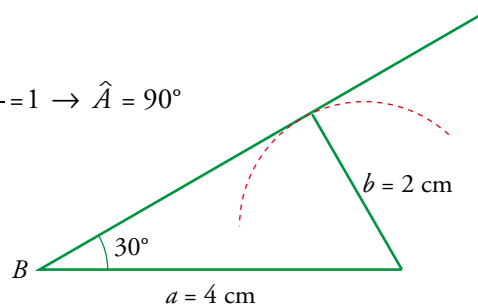
No tiene solución. Con esta medida, $b = 1,5$ cm, el lado b nunca podría tocar al lado c .



b) $b = 2$ cm

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} \rightarrow \frac{4}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{2}{\widehat{\text{sen } 30^\circ}} \rightarrow \widehat{\text{sen } A} = \frac{4 \cdot 0,5}{2} = 1 \rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

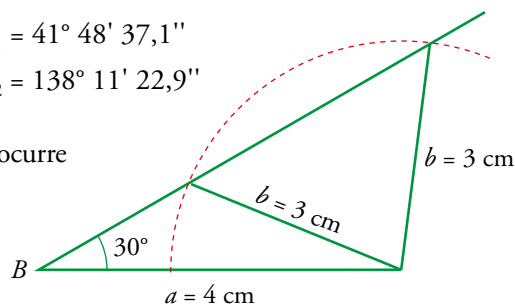
Se obtiene una única solución.



c) $b = 3$ cm

$$\frac{4}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{3}{\widehat{\text{sen } 30^\circ}} \rightarrow \widehat{\text{sen } A} = \frac{4 \cdot 0,5}{3} = 0,6 \rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = 41^\circ 48' 37,1'' \\ \hat{A}_2 = 138^\circ 11' 22,9'' \end{cases}$$

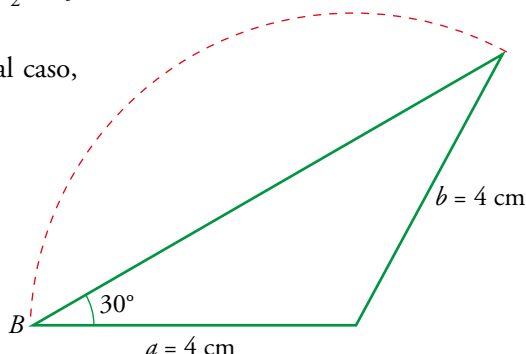
Las dos soluciones son válidas, pues en ningún caso ocurre que $\hat{A} + \hat{B} > 180^\circ$.



d) $b = 4$ cm

$$\frac{4}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{4}{\widehat{\text{sen } 30^\circ}} \rightarrow \widehat{\text{sen } A} = \frac{4 \cdot 0,5}{4} = 0,5 \rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = 30^\circ \rightarrow \text{Una solución válida.} \\ \hat{A}_2 = 150^\circ \end{cases}$$

La solución $\hat{A}_2 = 150^\circ$ no es válida, pues, en tal caso, sería $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$. ¡Imposible!



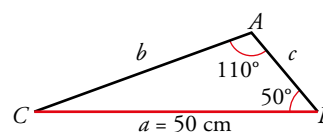
6 Calcula los lados b y c del triángulo de la derecha.

Hallamos el ángulo $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$

Aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{50}{\widehat{\text{sen } 110^\circ}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } 50^\circ}} \rightarrow b = \frac{50 \cdot \widehat{\text{sen } 50^\circ}}{\widehat{\text{sen } 110^\circ}} = 40,76 \text{ cm}$$

$$\frac{50}{\widehat{\text{sen } 110^\circ}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } 20^\circ}} \rightarrow c = \frac{50 \cdot \widehat{\text{sen } 20^\circ}}{\widehat{\text{sen } 110^\circ}} = 18,2 \text{ cm}$$



Página 102

7 ¿Verdadero o falso?

- a) Si de un triángulo conocemos dos lados y el ángulo que forman, el teorema del coseno nos permite obtener el otro lado.
- b) Si aplicamos el teorema del coseno a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, entonces obtenemos el teorema de Pitágoras.

- a) Verdadero. Esta es la situación en la que se usa el teorema del coseno para calcular el tercer lado de un triángulo.
- b) Verdadero. El ángulo opuesto a la hipotenusa es el ángulo recto y, por tanto, su coseno vale cero.

Si a es la hipotenusa, el ángulo opuesto es $\hat{A} = 90^\circ$ y se obtiene el teorema de Pitágoras a partir del teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ \rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Página 103

Hazlo tú

1 Calcula c conociendo $a = 7$ m, $b = 22$ m y $\hat{C} = 40^\circ$.

Por el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \rightarrow c = \sqrt{7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22 \cdot \cos 40^\circ} = 17,24 \text{ m}$$

Piensa y practica

8 Resuelve los siguientes triángulos:

a) $a = 12 \text{ cm}; b = 16 \text{ cm}; c = 10 \text{ cm}$

c) $b = 4 \text{ cm}; c = 3 \text{ cm}; \hat{A} = 105^\circ$

e) $b = 5 \text{ m}; \hat{A} = \hat{C} = 35^\circ$

g) $a = 5 \text{ cm}; \hat{A} = 75^\circ; \hat{B} = 45^\circ$

a) $\bullet a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

$$12^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cos \hat{A}$$

$$144 = 256 + 100 - 320 \cos \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{256 + 100 - 144}{320} = 0,6625$$

$$\hat{A} = 48^\circ 30' 33''$$

$$\bullet b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$256 = 144 + 100 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cos \hat{B}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{144 + 100 - 256}{240} = -0,05$$

$$\hat{B} = 92^\circ 51' 57,5''$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B}$$

$$\hat{C} = 38^\circ 37' 29,5''$$

b) $\bullet c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$

$$c^2 = 7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22 \cos 40^\circ = 49 + 484 - 235,94 = 297,06$$

$$c = 17,24 \text{ cm}$$

$$\bullet \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \rightarrow \frac{7}{\sin \hat{A}} = \frac{17,24}{\sin 40^\circ}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{7 \sin 40^\circ}{17,24} = 0,26$$

$$\hat{A} = \begin{cases} \hat{A}_1 = 15^\circ 7' 44,3'' \\ \hat{A}_2 = 164^\circ 52' 15,7'' \end{cases} \rightarrow \text{No válida.}$$

(La solución $\hat{A}_2$ no es válida, pues $\hat{A}_2 + \hat{C} > 180^\circ$).

$$\bullet \hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 124^\circ 52' 15,7''$$

c) $\bullet a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 105^\circ = 31,21$

$$a = 5,59 \text{ m}$$

$$\bullet \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \rightarrow \frac{5,59}{\sin 105^\circ} = \frac{4}{\sin \hat{B}}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{4 \cdot \sin 105^\circ}{5,59} = 0,6912$$

$$\hat{B} = \begin{cases} \hat{B}_1 = 43^\circ 43' 25,3'' \\ \hat{B}_2 = 136^\circ 16' 34,7'' \end{cases} \rightarrow \text{No válida.}$$

(La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180^\circ$).

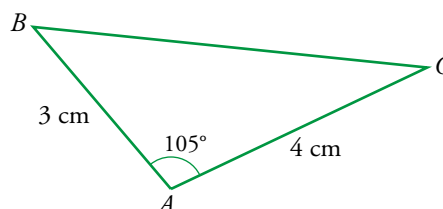
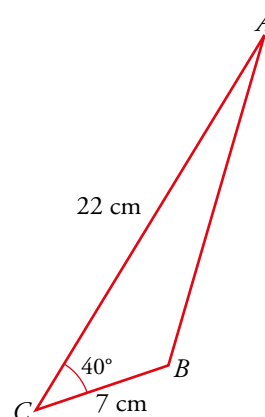
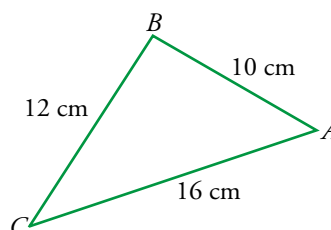
$$\bullet \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 31^\circ 16' 34,7''$$

b) $a = 7 \text{ cm}; b = 22 \text{ cm}; \hat{C} = 40^\circ$

d) $a = 4 \text{ m}; \hat{B} = 45^\circ; \hat{C} = 60^\circ$

f) $a = b = 10 \text{ cm}; \hat{C} = 40^\circ$

h) $a = 16 \text{ cm}; \hat{A} = 90^\circ; \hat{C} = 30^\circ$



d) • $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 75^\circ$

• $\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} \rightarrow \frac{4}{\widehat{\text{sen } 75^\circ}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } 45^\circ}}$
 $b = \frac{4 \cdot \widehat{\text{sen } 45^\circ}}{\widehat{\text{sen } 75^\circ}} = 2,93 \text{ m}$

• $\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } C}} \rightarrow \frac{4}{\widehat{\text{sen } 75^\circ}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } 60^\circ}}$
 $c = \frac{4 \cdot \widehat{\text{sen } 60^\circ}}{\widehat{\text{sen } 75^\circ}} = 3,59 \text{ m}$

e) • $\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 110^\circ$

• $\frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} = \frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} \rightarrow \frac{5}{\widehat{\text{sen } 110^\circ}} = \frac{a}{\widehat{\text{sen } 35^\circ}}$
 $a = \frac{5 \cdot \widehat{\text{sen } 35^\circ}}{\widehat{\text{sen } 110^\circ}} = 3,05 \text{ m}$

• Como $\hat{A} = \hat{C} \rightarrow a = c \rightarrow c = 3,05 \text{ m}$

f) • Como los lados a y b son iguales, el triángulo es isósceles:

$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - 40^\circ \rightarrow 2\hat{A} = 140^\circ \rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 70^\circ$

• $\frac{10}{\widehat{\text{sen } 70^\circ}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } 40^\circ}} \rightarrow c = \frac{10 \cdot \widehat{\text{sen } 40^\circ}}{\widehat{\text{sen } 70^\circ}} = 6,84 \text{ cm}$

g) • $\hat{C} = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ$

• $\frac{5}{\widehat{\text{sen } 75^\circ}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } 45^\circ}} \rightarrow b = \frac{5 \cdot \widehat{\text{sen } 45^\circ}}{\widehat{\text{sen } 75^\circ}} = 3,66 \text{ cm}$

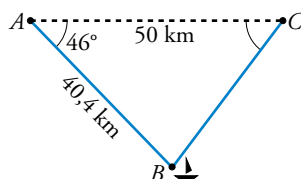
• $\frac{5}{\widehat{\text{sen } 75^\circ}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } 60^\circ}} \rightarrow c = \frac{5 \cdot \widehat{\text{sen } 60^\circ}}{\widehat{\text{sen } 75^\circ}} = 4,48 \text{ cm}$

h) • $\hat{B} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

• $\widehat{\text{sen } 30^\circ} = \frac{c}{16} \rightarrow c = 16 \cdot \widehat{\text{sen } 30^\circ} = 8 \text{ cm}$

• $\widehat{\cos 30^\circ} = \frac{b}{16} \rightarrow b = 16 \cdot \widehat{\cos 30^\circ} = 13,86 \text{ cm}$

- 9 Un barco, B , salió de A y ha recorrido 40,4 km formando un ángulo de 46° con la línea de la costa hasta que se ha quedado sin combustible. Pide socorro y reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C , que distan entre sí 50 km. ¿Qué estación se encuentra más cerca de B ?



$$\overline{BC}^2 = 40,4^2 + 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 40,4 \cdot \cos 46^\circ = 1325,74 \rightarrow \overline{BC} = 36,4 \text{ km}$$

Por tanto, la más cercana es C .

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 104

1. Relaciones entre las razones trigonométricas

Hazlo tú

a) Si $\cos \alpha = -3/4$ y $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, calcula sin hallar el ángulo α :

$$\sin \alpha \quad \operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin (180^\circ + \alpha) \quad \cos (90^\circ - \alpha)$$

$$\sin (360^\circ - \alpha) \quad \operatorname{tg} (180^\circ - \alpha)$$

b) Obtén con la calculadora el valor del ángulo α .

$$a) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Como α pertenece al tercer cuadrante, su seno es negativo $\rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{3} \quad \cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

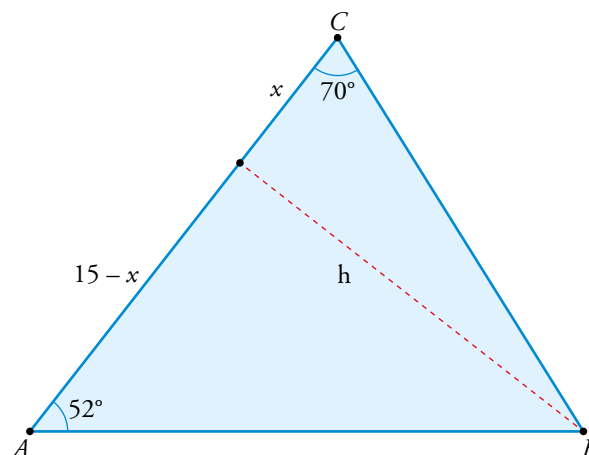
$$\sin (180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3} \quad \sin (360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

b) $221^\circ 24'$

2. Cálculo de una distancia mediante la estrategia de la altura

Hazlo tú

• De un triángulo ABC conocemos $\overline{AC} = 15$ m, $\hat{A} = 52^\circ$ y $\hat{C} = 70^\circ$. Calcula la altura sobre AC .



Llamamos h a la altura trazada sobre el lado $\overline{AC}$. Dividimos este lado en dos partes, que medirán x y $15 - x$.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 52^\circ &= \frac{h}{15-x} \rightarrow h = (15-x) \cdot \operatorname{tg} 52^\circ \\ \operatorname{tg} 70^\circ &= \frac{h}{x} \rightarrow h = x \cdot \operatorname{tg} 70^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow (15-x) \cdot \operatorname{tg} 52^\circ = x \cdot \operatorname{tg} 70^\circ \rightarrow x = 4,77 \text{ m}$$

Finalmente, $h = x \cdot \operatorname{tg} 70^\circ = 4,77 \cdot \operatorname{tg} 70^\circ = 13,11$ m.

3. Resolución de un triángulo conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Hazlo tú

- Resuelve el triángulo ABC en el que conocemos $a = 12$ cm, $b = 8,3$ cm y $\hat{A} = 110^\circ$.

Aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{12}{\operatorname{sen} 110^\circ} = \frac{8,3}{\operatorname{sen} \hat{B}} \rightarrow \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{8,3 \cdot \operatorname{sen} 110^\circ}{12} = 0,65 \rightarrow \hat{B} \text{ puede ser } 40^\circ 32' 30'' \text{ o bien } 139^\circ 27' 30''$$

Este segundo valor no es posible porque la suma de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ sería superior a 180° .

Por tanto, $\hat{B} = 40^\circ 32' 30''$.

$$\hat{C} = 180^\circ - (110^\circ + 40^\circ 32' 30'') = 29^\circ 27' 30''$$

Hallamos el lado c usando, de nuevo, el teorema de los senos:

$$\frac{12}{\operatorname{sen} 110^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} (29^\circ 27' 30'')} \rightarrow c = \frac{12 \cdot \operatorname{sen} (29^\circ 27' 30'')}{\operatorname{sen} 110^\circ} = 6,28 \text{ cm}$$

4. Cálculo del área de una parcela descomponiéndola en triángulos

Hazlo tú

- Halla el área del cuadrilátero irregular $ABCD$ sabiendo:

$$\overline{AB} = 62 \text{ m}; \overline{BC} = 19 \text{ m}; \overline{CD} = 21 \text{ m}; \overline{AD} = 45 \text{ m}; \hat{B} = 60^\circ.$$

Trazando la diagonal $\overline{AC}$ descomponemos el cuadrilátero en dos triángulos.

- Área del triángulo ABC :

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{19} \rightarrow h = 19 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = 16,45 \text{ m}$$

$$\text{Área}_{ABC} = \frac{62 \cdot 16,45}{2} = 509,95 \text{ m}^2$$

- Área del triángulo ACD :

Para poder usar la fórmula de Herón necesitamos el lado $\overline{AC}$. Por el teorema del coseno:

$$\overline{AC}^2 = 19^2 + 62^2 - 2 \cdot 19 \cdot 62 \cos 60^\circ = 3027 \rightarrow \overline{AC} = \sqrt{3027} = 55,02 \text{ m}$$

Ahora, aplicamos la fórmula de Herón:

$$p = \frac{21 + 45 + 55,02}{2} = 60,51$$

$$\text{Área}_{ACD} = \sqrt{60,51(60,51 - 21)(60,51 - 45)(60,51 - 55,02)} = 451,19 \text{ m}^2$$

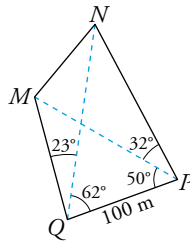
- El área del cuadrilátero es:

$$\text{Área}_{ABCD} = 509,95 + 451,19 = 961,14 \text{ m}^2$$

5. Cálculo de la distancia entre dos puntos inaccesibles

Hazlo tú

- Calcula la distancia $\overline{MN}$.



- Usando el triángulo PQM podemos calcular el lado $\overline{QM}$:

El ángulo $\widehat{QMP} = 180^\circ - 50^\circ - 85^\circ = 45^\circ$

$$\frac{\overline{QM}}{\sen 50^\circ} = \frac{100}{\sen 45^\circ} \rightarrow \overline{QM} = \frac{100 \cdot \sen 50^\circ}{\sen 45^\circ} = 108,34 \text{ m}$$

- Usando el triángulo PQN podemos calcular la diagonal $\overline{QN}$:

El ángulo $\widehat{QNP} = 180^\circ - 62^\circ - 82^\circ = 36^\circ$

$$\frac{\overline{QN}}{\sen 82^\circ} = \frac{100}{\sen 36^\circ} \rightarrow \overline{QN} = \frac{100 \cdot \sen 82^\circ}{\sen 36^\circ} = 168,47 \text{ m}$$

- Ahora usamos el teorema del coseno para hallar $\overline{MN}$:

$$\overline{MN}^2 = 108,34^2 + 168,47^2 - 2 \cdot 108,34 \cdot 168,47 \cos 23^\circ = 6517,5$$

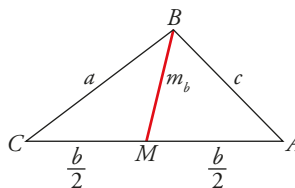
$$\overline{MN} = \sqrt{6517,5} = 80,73 \text{ m}$$

6. Longitud de la mediana de un triángulo

Hazlo tú

- Demuestra que en el triángulo de lados a , b , c , la longitud de la mediana sobre el lado b es:

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$



Usaremos el teorema del coseno en los triángulos ABC y AMB para demostrarlo.

Aplicado en el triángulo ABC :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \rightarrow -bc \cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} \quad (*)$$

Aplicado en el triángulo AMB :

$$\overline{BM}^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2 - 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot c \cos A \rightarrow -bc \cos A = \overline{BM}^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2 \quad (**)$$

De (*) y (**) se sigue:

$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} = \overline{BM}^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2 \rightarrow \overline{BM}^2 = \frac{2a^2 - b^2 + 2c^2}{4} \rightarrow \overline{BM} = \frac{\sqrt{2a^2 - b^2 + 2c^2}}{2}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 107

1. Altura de una torre

- Para medir la altura de la torre AB , nos situamos en los puntos C y D y tomamos estas medidas:

$$\overline{CD} = 15 \text{ m}; \widehat{ACB} = 40^\circ$$

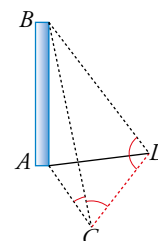
$$\widehat{BCD} = 58^\circ; \widehat{BDC} = 70^\circ$$

¿Qué altura tiene la torre?

$$\widehat{B} = 180^\circ - 58^\circ - 70^\circ = 52^\circ$$

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 70^\circ} = \frac{15}{\sin 52^\circ} \rightarrow \overline{BC} = \frac{15 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 52^\circ} = 17,89 \text{ m}$$

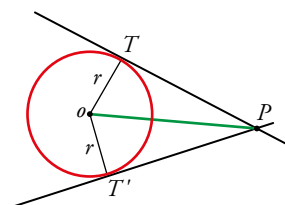
$$\sin 40^\circ = \frac{\overline{AB}}{17,89} \rightarrow \overline{AB} = 17,89 \cdot \sin 40^\circ = 11,5 \text{ m}$$



2. Distancia entre puntos de tangencia

- Las tangentes trazadas desde el punto P a una circunferencia de centro O y de 14 cm de radio forman un ángulo de 32° . Calcular:

- La distancia de P al centro de la circunferencia.
- La longitud de la cuerda que une los puntos de tangencia.



Sabemos que el ángulo $\widehat{OPT}$ es la mitad del ángulo $\widehat{TPT'}$ $\rightarrow \widehat{OPT} = 32^\circ : 2 = 16^\circ$

También sabemos que $r = 14 \text{ cm}$.

- Teniendo en cuenta el triángulo rectángulo OPT :

$$\sin(\widehat{OPT}) = \frac{14}{OP} \rightarrow OP = \frac{14}{\sin 16^\circ} = 50,79 \text{ cm}$$

- Queremos saber el ángulo $\widehat{TOT'}$, y para ello tenemos en cuenta que del cuadrilátero $TOT'P$ conocemos tres ángulos. Como sus ángulos suman 360° y que los ángulos $\widehat{OTP}$ y $\widehat{OT'P}$ son rectos, despejamos y tenemos que el ángulo $\widehat{TOT'} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 32^\circ = 148^\circ$.

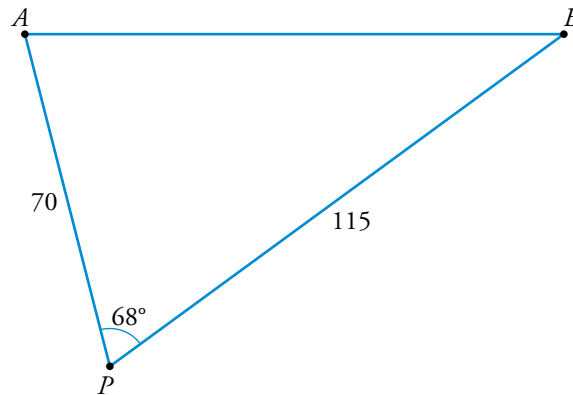
Consideramos el triángulo TOT' , del que conocemos un ángulo y dos lados, por lo que aplicando el teorema del coseno:

$$\overline{TT'}^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos \widehat{TOT'} \rightarrow \overline{TT'} = 26,9 \text{ cm}$$

3. Cálculo de algunos lados y ángulos de un triángulo

- Desde un punto P observamos los puntos A y B , situados en las orillas opuestas de una laguna, bajo un ángulo de 68° . Sabemos que $\overline{PA} = 70$ m y $\overline{PB} = 115$ m.

Calcular la distancia AB y los ángulos $\widehat{PAB}$ y $\widehat{PBA}$.



$$\overline{AB}^2 = 70^2 + 115^2 - 2 \cdot 70 \cdot 115 \cos 68^\circ = 12\,093,8$$

$$\overline{AB} = \sqrt{12\,093,8} = 110 \text{ m}$$

$$\frac{115}{\sin \widehat{PAB}} = \frac{110}{\sin 68^\circ} \rightarrow \sin \widehat{PAB} = \frac{115 \cdot \sin 68^\circ}{110} = 0,9693 \rightarrow \widehat{PAB} = 75^\circ 46' 22''$$

$$\widehat{PBA} = 180^\circ - 68^\circ - 75^\circ 46' 22'' = 36^\circ 13' 38''$$

4. Cálculo de los ángulos de un triángulo cuando se conocen los tres lados

- La resultante de dos fuerzas $F_1 = 16$ N y $F_2 = 12$ N, aplicadas en un mismo punto, es de $R = 25$ N. ¿Qué ángulo forman entre sí? ¿Y cada una de ellas con la resultante?

$$\overline{BC} = F_1 = 16$$

Del triángulo ABC conocemos los 3 lados, por lo que podemos aplicar el teorema del coseno:

$$R^2 = 16^2 + 12^2 - 2 \cdot 16 \cdot 12 \cdot \cos \widehat{B} \rightarrow \cos \widehat{B} = 0,586 \rightarrow \widehat{B} = 125^\circ 52'$$

Teniendo en cuenta el paralelogramo $ABCD$ sabemos que el ángulo $\widehat{A}$ y el $\widehat{B}$ se complementan:

$$180^\circ = \widehat{A} + \widehat{B} \rightarrow \widehat{A} = 54^\circ 8'$$

$$16^2 = 12^2 + 25^2 - 2 \cdot 12 \cdot 25 \cdot \cos \widehat{CAB} = 0,855 \rightarrow \widehat{CAB} = 31^\circ 14' \text{ es el ángulo que forman } R \text{ y } F_2.$$

Nos falta encontrar el ángulo formado $\widehat{CAD}$, y sabemos que es la diferencia entre $\widehat{A}$ y $\widehat{CAB}$, por lo que su valor es $\widehat{A} - \widehat{CAB} = 22^\circ 52'$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Página 108

Para practicar

Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas

1 Utiliza las relaciones fundamentales para hallar las demás razones trigonométricas de los ángulos agudos α , β y γ .

a) $\cos \alpha = \sqrt{5}/3$

b) $\sin \beta = 3/5$

c) $\tan \gamma = 3$

a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha + \frac{5}{9} = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{9} \rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{2}{3}$

• Si $\sin \alpha = \frac{2}{3} \rightarrow \tan \alpha = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

• Si $\sin \alpha = -\frac{2}{3} \rightarrow \tan \alpha = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{-2}{\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$

b) $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2 \beta = 1 \rightarrow \cos^2 \beta = \frac{16}{25} \rightarrow \cos \beta = \pm \frac{4}{5}$

• Si $\cos \beta = \frac{4}{5} \rightarrow \tan \beta = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

• Si $\cos \beta = -\frac{4}{5} \rightarrow$ No es posible ya que es un ángulo agudo, y por tanto tiene coseno positivo.
Descartamos esta solución.

c) $\frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = 3 \rightarrow \sin \gamma = 3 \cos \gamma$

$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1 \rightarrow (3 \cos \gamma)^2 + \cos^2 \gamma = 1 \rightarrow 10 \cos^2 \gamma = 1 \rightarrow \cos \gamma = \pm \sqrt{\frac{1}{10}} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$

• Si $\cos \gamma = \frac{\sqrt{10}}{10} \rightarrow \sin \gamma = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

• Si $\cos \gamma = -\frac{\sqrt{10}}{10} \rightarrow$ No es posible ya que es un ángulo agudo, y por tanto tiene coseno positivo.
Descartamos esta solución.

2 Halla las razones trigonométricas de α , sin hallar α .

a) $\sin \alpha = -2/3$; $\cos \alpha < 0$

b) $\cos \alpha = 5/6$; $\tan \alpha < 0$

c) $\tan \alpha = 2,25$; $\sin \alpha < 0$

d) $\cos \alpha = -\sqrt{5}/4$; $\sin \alpha < 0$

a) Como $\cos \alpha < 0$, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{4}{9} + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{5}{9} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan \alpha = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

b) Como $\tan \alpha < 0$, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha + \frac{25}{36} = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{11}{36} \rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{6}$

$\tan \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{11}}{6}}{\frac{5}{6}} = -\frac{\sqrt{11}}{5}$

c) $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = 2,25 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 2,25 \cos \alpha$
 $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow (2,25 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow 6,0625 \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow$
 $\rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{6,0625}} = -0,4061$ (tiene el mismo signo que $\operatorname{sen} \alpha$ por ser $\operatorname{tg} \alpha > 0$)
 $\operatorname{sen} \alpha = 2,25 \cos \alpha = 2,25 \cdot (-0,4061) = -0,9137$

d) Como $\operatorname{sen} \alpha < 0$, $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{5}{16} = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{11}{16} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{4}$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{11}}{4}}{-\frac{\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$

3 Sabiendo que $\cos \alpha = 0,8$ y $\operatorname{sen} \alpha = 0,6$; calcula:

a) $\cos (180^\circ + \alpha)$	b) $\operatorname{sen} (180^\circ - \alpha)$
c) $\operatorname{tg} (-\alpha)$	d) $\operatorname{sen} (90^\circ - \alpha)$
e) $\cos (90^\circ + \alpha)$	f) $\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha)$
a) $\cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha = -0,8$	b) $\operatorname{sen} (180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = 0,6$
c) $\operatorname{tg} (-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{0,6}{0,8} = -\frac{3}{4}$	d) $\operatorname{sen} (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = 0,8$
e) $\cos (90^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = -0,6$	f) $\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3}$

4 Si $\operatorname{sen} 42^\circ = 0,67$; $\cos 42^\circ = 0,74$ y $\operatorname{tg} 42^\circ = 0,9$; halla las siguientes razones trigonométricas sin utilizar la calculadora:

a) $\cos 48^\circ$	b) $\operatorname{sen} (-48^\circ)$	c) $\operatorname{sen} 138^\circ$
d) $\operatorname{tg} 318^\circ$	e) $\cos 222^\circ$	f) $\operatorname{tg} 858^\circ$
a) $\cos 48^\circ = \cos (90^\circ - 42^\circ) = \operatorname{sen} 42^\circ = 0,67$		
b) $\operatorname{sen} (-48^\circ) = -\operatorname{sen} 48^\circ = -\operatorname{sen} (90^\circ - 42^\circ) = -\cos 42^\circ = -0,74$		
c) $\operatorname{sen} 138^\circ = \operatorname{sen} (180^\circ - 42^\circ) = \operatorname{sen} 42^\circ = 0,67$		
d) $\operatorname{tg} 318^\circ = \operatorname{tg} (360^\circ - 42^\circ) = \operatorname{tg} (-42^\circ) = -\operatorname{tg} 42^\circ = -0,9$		
e) $\cos 222^\circ = \cos (180^\circ + 42^\circ) = -\cos 42^\circ = -0,74$		
f) $\operatorname{tg} 858^\circ = \operatorname{tg} (360^\circ \cdot 2 + 138^\circ) = \operatorname{tg} 138^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ - 42^\circ) = -\operatorname{tg} 42^\circ = -0,9$		

5 Expresa con un ángulo del primer cuadrante estas razones trigonométricas y di su valor exacto sin usar la calculadora:

a) $\operatorname{sen} 135^\circ$	b) $\cos 240^\circ$	c) $\operatorname{tg} 120^\circ$
d) $\cos 1845^\circ$	e) $\operatorname{tg} 1125^\circ$	f) $\operatorname{sen} (-120^\circ)$
a) $\operatorname{sen} 135^\circ = \operatorname{sen} (90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$		
b) $\cos 240^\circ = \cos (180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$		
c) $\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$		
d) $\cos 1845^\circ = \cos (360^\circ \cdot 5 + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$		
e) $\operatorname{tg} 1125^\circ = \operatorname{tg} (360^\circ \cdot 3 + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$		
f) $\operatorname{sen} (-120^\circ) = -\operatorname{sen} 120^\circ = -\operatorname{sen} (180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$		

6 Halla con la calculadora el valor del ángulo α :

a) $\operatorname{sen} \alpha = -0,75$; $\alpha < 270^\circ$

b) $\cos \alpha = -0,37$; $\alpha > 180^\circ$

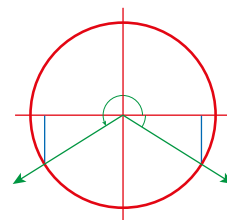
c) $\operatorname{tg} \alpha = 1,38$; $\operatorname{sen} \alpha < 0$

d) $\cos \alpha = 0,23$; $\operatorname{sen} \alpha < 0$

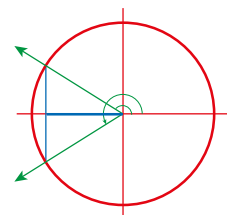
a) Con la calculadora $\rightarrow \alpha = -48^\circ 35' 25'' \in 4.^\circ$ cuadrante

Como debe ser $\begin{cases} \operatorname{sen} \alpha < 0 \\ \alpha < 270^\circ \end{cases} \rightarrow \alpha \in 3.^\circ \text{ cuadrante}$

Luego $\alpha = 180^\circ + 48^\circ 35' 25'' = 228^\circ 35' 25''$

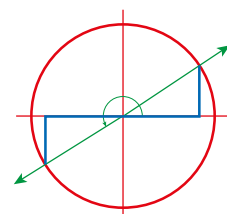

b) Con la calculadora: $111^\circ 42' 56,3''$
 $\begin{cases} \cos \alpha < 0 \\ \alpha > 180^\circ \end{cases} \rightarrow \alpha \in 3.^\circ \text{ cuadrante}$

Luego $\alpha = 360^\circ - 111^\circ 42' 56,3'' = 248^\circ 17' 3,7''$


c) $\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = 1,38 > 0 \\ \operatorname{sen} \alpha < 0 \end{cases} \rightarrow \alpha \in 3.^\circ \text{ cuadrante}$

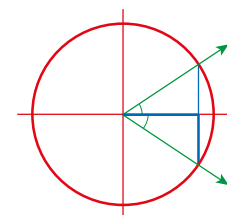
Con la calculadora: $\operatorname{tg}^{-1} 1,38 = 54^\circ 4' 17,39''$

$\alpha = 180^\circ + 54^\circ 4' 17,39'' = 234^\circ 4' 17,4''$


d) $\begin{cases} \cos \alpha = 0,23 > 0 \\ \operatorname{sen} \alpha < 0 \end{cases} \rightarrow \alpha \in 4.^\circ \text{ cuadrante}$

Con la calculadora: $\cos^{-1} 0,23 = 76^\circ 42' 10,5''$

$\alpha = -76^\circ 42' 10,5'' = 283^\circ 17' 49,6''$



7 ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

a) $\operatorname{sen} \alpha = \cos (90^\circ + \alpha)$

b) $\operatorname{sen} (180^\circ + \alpha) = \operatorname{sen} (360^\circ - \alpha)$

c) $\cos \alpha = \operatorname{sen} (90^\circ + \alpha)$

d) $\cos (180^\circ + \alpha) = \cos (180^\circ - \alpha)$

e) $-\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (360^\circ - \alpha)$

f) $\operatorname{tg} (180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} (-\alpha)$

a) Verdadero si $\alpha = 0^\circ$ o $\alpha = 90^\circ$ ya que:

$$\cos (90^\circ + \alpha) - \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha \rightarrow \alpha = 0^\circ \text{ o } \alpha = 90^\circ.$$

b) Verdadero ya que $\operatorname{sen} (180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (360^\circ - \alpha)$.

c) Verdadero ya que $\cos \alpha = \operatorname{sen} (90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$.

d) Verdadero ya que $\cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ y $\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.

e) Verdadero ya que $\operatorname{tg} (360^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} (-\alpha)$.

f) $\operatorname{tg} (180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ y $\operatorname{tg} (-\alpha) = -\operatorname{tg} (\alpha)$, por tanto, es cierto si $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \alpha \rightarrow \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$, que es cierto si es cero, es decir cuando $\operatorname{sen} \alpha = 0^\circ \rightarrow \alpha = 0^\circ$ o bien $\alpha = 90^\circ$.

- 8 Se llama *cosecante* de α a la razón trigonométrica inversa del seno; *secante* de α a la inversa del coseno y *cotangente* de α a la inversa de la tangente. Se escriben así:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \quad \operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

a) Calcula $\operatorname{cosec} \alpha$, $\operatorname{sec} \alpha$ y $\operatorname{cotg} \alpha$ en cada uno de los apartados del ejercicio 2.

b) Si α es el ángulo del ejercicio 3, halla:

$$\operatorname{cotg} (90^\circ - \alpha) \quad \operatorname{cosec} (180^\circ - \alpha) \quad \operatorname{sec} (180^\circ + \alpha) \quad \operatorname{cotg} (-\alpha)$$

a) Con 2a):

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Con 2b):

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{6}{-\sqrt{11}}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{6}{5}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{-5}{\sqrt{11}}$$

Con 2c):

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{-0,9137} = -1,094$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{-0,4061} = -2,462$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2,25} = 0,4$$

Con 2d):

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{-4}{\sqrt{11}}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{-4}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$$

b) $\cos \alpha = 0,8$; $\operatorname{sen} \alpha = 0,6$

$$\operatorname{cotg} (90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

$$\operatorname{sec} (180^\circ + \alpha) = \frac{1}{\cos (180^\circ + \alpha)} = \frac{1}{-\cos \alpha} = \frac{1}{-0,8} = -1,25$$

$$\operatorname{cosec} (180^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{sen} (180^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{0,6} = 1,6$$

$$\operatorname{cotg} (-\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} (-\alpha)} = \frac{1}{\frac{-\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = -\frac{0,8}{0,6} = -1,3$$

9 Halla las razones trigonométricas de los ángulos del intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$ que cumplen $\cos \alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha$.

Para que se cumpla que $\cos \alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha$ es imprescindible que seno y coseno tengan el mismo signo, por lo que α puede pertenecer al primer o tercer cuadrante solamente. O lo que es lo mismo, que su tangente sea positiva e igual a $1/3$ porque $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sen} \alpha / \cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha / 3 \operatorname{sen} \alpha = 1/3$.

Como sabemos que $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, sustituimos la igualdad dada:

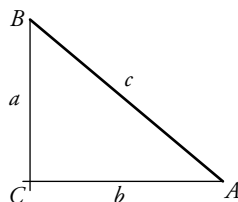
$$\operatorname{sen}^2 \alpha + (3 \operatorname{sen} \alpha)^2 = 1 \rightarrow 10 \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$$

- Si $\alpha = 18^\circ 26' \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$
- Si $\alpha = 180^\circ + 18^\circ 26' = 198^\circ 26' \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$
- Si $\alpha = -18^\circ 26' = 341^\circ 34'$ (cuarto cuadrante) $\rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -0,316$ y $\cos \alpha = 0,949$ por lo que no se cumple la igualdad. Además $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$.
- Si $\alpha = 180^\circ - 18^\circ 25' 5''$ (segundo cuadrante) $\rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 0,316$ y $\cos \alpha = -0,949$ por lo que no se cumple la igualdad. Además $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$.

Por lo tanto las soluciones buscadas son $\alpha = 18^\circ 25' 5''$ y $\alpha = 198^\circ 25' 5''$.

Resolución de triángulos rectángulos

10 En una película de acción, la protagonista se desliza, desde el punto más alto de un edificio de 60 m de alto, por un cable de acero sujeto al suelo formando un ángulo de 40° . Calcula la longitud del cable.



Nos piden encontrar c sabiendo que el ángulo $\hat{A} = 40^\circ$ y $a = 60$ m.

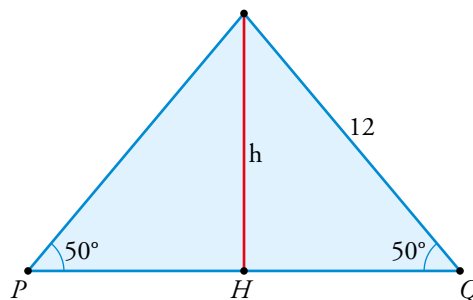
$$\operatorname{sen} 40 = \frac{60}{c} \rightarrow c = \frac{60}{\operatorname{sen} 40} = 93,3 \text{ m}$$

11 Un mástil está sujeto a tierra con dos cables de 12 m que forman ángulos de 50° con el suelo. Calcula la altura del mástil y la distancia de la base a los puntos de sujeción.

$$\text{Altura del poste} = h = 12 \cdot \operatorname{sen} 50^\circ = 9,19 \text{ m}$$

La distancia de la base al punto de sujeción es:

$$\overline{HQ} = 12 \cdot \cos 50^\circ = 7,71 \text{ m}$$



- 12** En un triángulo isósceles, el lado desigual mide 10 m y el ángulo opuesto es de 40° . Halla su perímetro y su área.

La medida de los ángulos iguales es $\frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

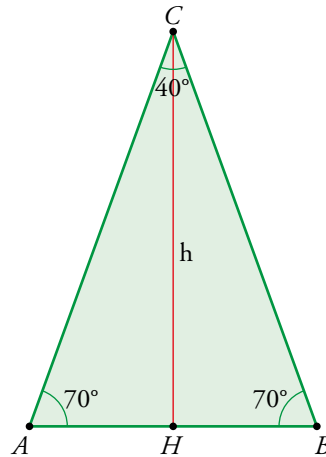
$$\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{h}{5} \rightarrow h = 5 \cdot \operatorname{tg} 70^\circ = 13,74 \text{ m}$$

$$\text{Área}_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{10 \cdot 13,74}{2} = 68,7 \text{ m}^2$$

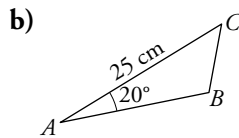
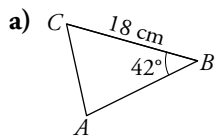
$$\cos 70^\circ = \frac{5}{BC} \rightarrow BC = \frac{5}{\cos 70^\circ} = 14,62 \text{ m}$$

El perímetro del triángulo ABC es:

$$P = 2 \cdot 14,62 + 10 = 39,24 \text{ m}$$



- 13** Calcula la longitud de la altura trazada desde C en cada uno de los triángulos siguientes:



a) $h = 18 \cdot \operatorname{sen} 42^\circ = 12,04 \text{ cm}$

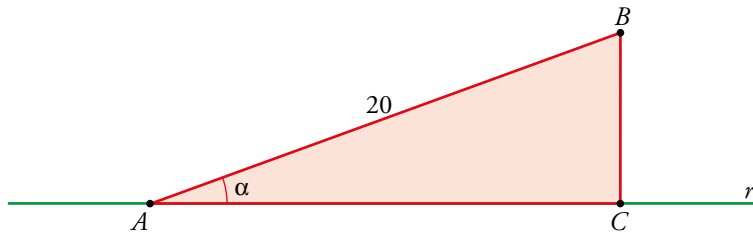
b) $h = 25 \cdot \operatorname{sen} 20^\circ = 8,55 \text{ cm}$

- 14** Halla, en cada caso, la proyección de un segmento de 20 cm de longitud sobre una recta r con la que forma un ángulo α :

a) $\alpha = 20^\circ$

b) $\alpha = 45^\circ$

c) $\alpha = 80^\circ$



Podemos obtener la proyección usando el coseno del ángulo α .

a) $\overline{AC} = 20 \cdot \cos 20^\circ = 18,79 \text{ cm}$

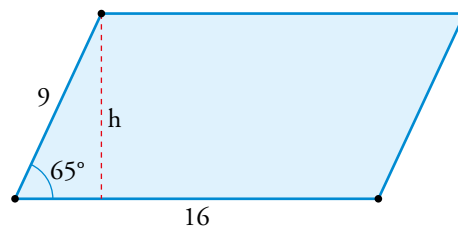
b) $\overline{AC} = 20 \cdot \cos 45^\circ = 14,14 \text{ cm}$

c) $\overline{AC} = 20 \cdot \cos 80^\circ = 3,47 \text{ cm}$

- 15** Calcula el área de un paralelogramo cuyos lados, de 9 cm y 16 cm, forman un ángulo de 65° .

$$h = 9 \cdot \operatorname{sen} 65^\circ = 8,16 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = 16 \cdot 8,16 = 130,56 \text{ cm}^2$$



- 16** El tejado de una casa tiene la forma y las medidas que se indican en la figura. Calcula la distancia $\overline{AB}$.

Trazamos perpendiculares del segmento $\overline{AB}$ que pasen por los tres vértices superiores. Esas rectas dividen al segmento $\overline{AB}$ en 4 partes. Las longitudes de estos segmentos, de izquierda a derecha son:

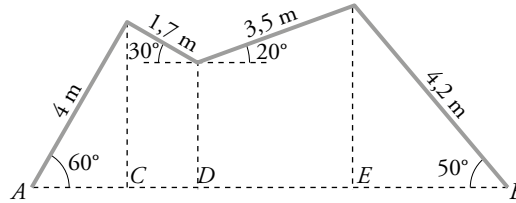
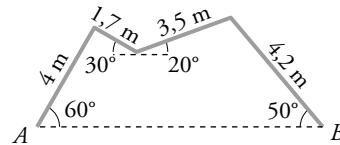
$$\overline{AC} = 4 \cdot \cos 60^\circ = 2 \text{ m}$$

$$\overline{CD} = 1,7 \cdot \cos 30^\circ = 1,47 \text{ m}$$

$$\overline{DE} = 3,5 \cdot \cos 20^\circ = 3,29 \text{ m}$$

$$\overline{EB} = 4,2 \cdot \cos 50^\circ = 2,7 \text{ m}$$

La longitud total es: $\overline{AB} = 2 + 1,47 + 3,29 + 2,7 = 9,46 \text{ m}$



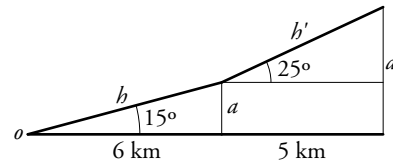
- 17** Un avión despegando formando un ángulo de 15° con el suelo. A 6 km del punto de salida en horizontal, aumenta 10° su inclinación para subir en un ángulo de 25° con el suelo. Una montaña de 2500 m se encuentra a 11 km del punto de partida. ¿Volará el avión sobre la montaña o tendrá que cambiar su dirección?

$$\cos 15^\circ = \frac{6}{h} \rightarrow h = \frac{6}{\cos 15^\circ} = 6,2 \text{ km}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{a}{h} \rightarrow a = \sin 15^\circ \cdot 6,2 = 1,6 \text{ km}$$

$$\cos 25^\circ = \frac{5}{h'} \rightarrow h' = \frac{5}{\cos 25^\circ} = 5,52 \text{ km}$$

$$\sin 25^\circ = \frac{a'}{h'} \rightarrow a' = \sin 25^\circ \cdot 5,52 = 2,33 \text{ km} \rightarrow a + a' > 2,5 \text{ km}$$



El avión volará sobre la montaña.

- 18** En un triángulo ABC , rectángulo en A , se conocen un cateto y la altura sobre la hipotenusa:

$$\overline{AC} = 15 \text{ m}$$

$$\overline{AD} = 12 \text{ m}$$

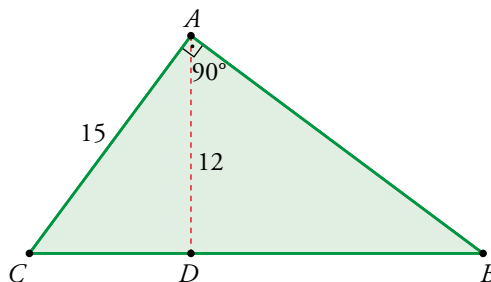
Halla los lados y los ángulos del triángulo.

$$\sin \hat{C} = \frac{12}{15} = 0,8 \rightarrow \hat{C} = 53^\circ 7' 48''$$

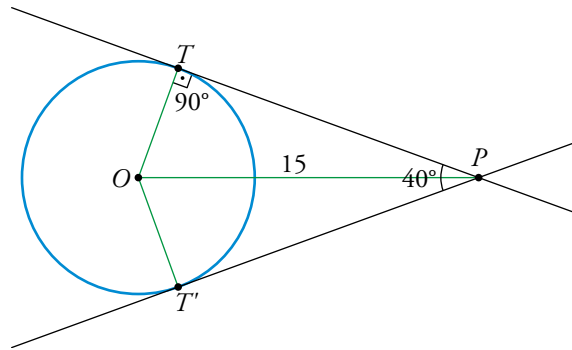
$$\hat{B} = 90^\circ - 53^\circ 7' 48'' = 36^\circ 52' 12''$$

$$\sin \hat{B} = \frac{12}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = \frac{12}{\sin \hat{B}} = 20 \text{ m}$$

Por el teorema de Pitágoras, $\overline{BC} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ m}$.



- 19** Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan las tangentes que forman entre sí un ángulo de 40° . Si la distancia de P al centro de la circunferencia es de 15 cm, ¿cuál es su radio?



El radio $\overline{OT}$ es el cateto opuesto al ángulo de $20^\circ = \frac{40^\circ}{2}$, luego $\overline{OT} = 15 \cdot \operatorname{sen} 20^\circ = 5,13$ cm.

Resolución de triángulos cualesquiera

- 20** Aplica el teorema de los senos para resolver el triángulo ABC en los siguientes casos:

a) $\hat{A} = 55^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$, $c = 15$ m

b) $\hat{A} = 50^\circ$, $a = 23$ m, $c = 18$ m

a) $\hat{C} = 180^\circ - 55^\circ - 40^\circ = 85^\circ$; $\frac{a}{\operatorname{sen} 55^\circ} = \frac{b}{\operatorname{sen} 40^\circ} = \frac{15}{\operatorname{sen} 85^\circ}$

$a = \frac{15 \cdot \operatorname{sen} 55^\circ}{\operatorname{sen} 85^\circ} = 12,33$ cm; $b = \frac{15 \cdot \operatorname{sen} 40^\circ}{\operatorname{sen} 85^\circ} = 9,68$ cm

b) $\frac{23}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{18}{\operatorname{sen} \hat{C}} \rightarrow \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{18 \cdot \operatorname{sen} 50^\circ}{23} = 0,6 \rightarrow \hat{C} = 36^\circ 52' 12''$

$\hat{B} = 180^\circ - 50^\circ - 36^\circ 52' 12'' = 93^\circ 7' 48''$

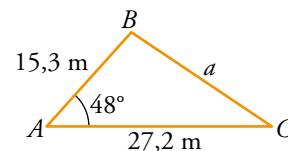
$\frac{23}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \rightarrow b = \frac{23 \cdot \operatorname{sen} \hat{B}}{\operatorname{sen} 50^\circ} = 30$ cm

Página 109

- 21** Aplica el teorema del coseno para hallar el lado a del triángulo ABC , en el que $\hat{A} = 48^\circ$, $b = 27,2$ m y $c = 15,3$ m.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

$a^2 = 27,2^2 + 15,3^2 - 2 \cdot 27,2 \cdot 15,3 \cos 48^\circ \rightarrow a = 20,42$ m



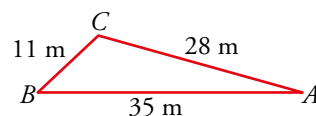
- 22** Halla los ángulos del triángulo ABC en el que $a = 11$ m, $b = 28$ m y $c = 35$ m.

$11^2 = 28^2 + 35^2 - 2 \cdot 28 \cdot 35 \cos \hat{A} \rightarrow$

$\rightarrow \cos \hat{A} = \frac{28^2 + 35^2 - 11^2}{2 \cdot 28 \cdot 35} \rightarrow \hat{A} = 15^\circ 34' 41''$

$28^2 = 11^2 + 35^2 - 2 \cdot 11 \cdot 35 \cos \hat{B} \rightarrow \cos \hat{B} = \frac{11^2 + 35^2 - 28^2}{2 \cdot 11 \cdot 35} \rightarrow \hat{B} = 43^\circ 7' 28''$

$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \rightarrow \hat{C} = 121^\circ 17' 51''$



23 Resuelve los siguientes triángulos:

a) $b = 32$ cm, $a = 17$ cm, $\hat{C} = 40^\circ$

b) $a = 85$ cm, $c = 57$ cm, $\hat{B} = 65^\circ$

c) $a = 23$ cm, $b = 14$ cm, $c = 34$ cm

a) $c^2 = 32^2 + 17^2 - 2 \cdot 32 \cdot 17 \cos 40^\circ \rightarrow c = 21,9$ cm
 $17^2 = 32^2 + 21,9^2 - 2 \cdot 32 \cdot 21,9 \cos \hat{A} \rightarrow \hat{A} = 29^\circ 56' 8''$
 $\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) \rightarrow \hat{B} = 110^\circ 3' 52''$

b) $b^2 = 85^2 + 57^2 - 2 \cdot 85 \cdot 57 \cos 65^\circ \rightarrow b = 79,87$ cm
 $57^2 = 85^2 + 79,87^2 - 2 \cdot 85 \cdot 79,87 \cos \hat{C} \rightarrow \hat{C} = 40^\circ 18' 5''$
 $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) \rightarrow \hat{A} = 74^\circ 41' 55''$

c) $23^2 = 14^2 + 34^2 - 2 \cdot 14 \cdot 34 \cos \hat{A} \rightarrow \hat{A} = 30^\circ 10' 29''$
 $14^2 = 23^2 + 34^2 - 2 \cdot 23 \cdot 34 \cos \hat{B} \rightarrow \hat{B} = 17^\circ 48' 56''$
 $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \rightarrow \hat{C} = 133^\circ 0' 35''$

24 Resuelve los siguientes triángulos:

a) $a = 100$ m, $\hat{B} = 47^\circ$, $\hat{C} = 63^\circ$

b) $a = 70$ m, $b = 55$ m, $\hat{C} = 73^\circ$

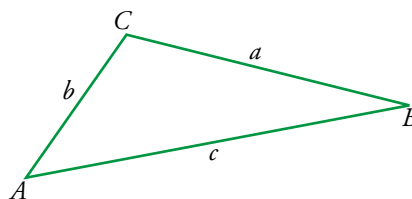
c) $a = 25$ m, $b = 30$ m, $c = 40$ m

d) $a = 15$ m, $b = 9$ m, $\hat{A} = 130^\circ$

a) $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 70^\circ$

$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \rightarrow \frac{100}{\sin 70^\circ} = \frac{b}{\sin 47^\circ} \rightarrow$
 $\rightarrow b = \frac{100 \cdot \sin 47^\circ}{\sin 70^\circ} = 77,83$ m

$\frac{100}{\sin 70^\circ} = \frac{c}{\sin 63^\circ} \rightarrow c = \frac{100 \cdot \sin 63^\circ}{\sin 70^\circ} = 94,82$ m



b) $c^2 = 70^2 + 55^2 - 2 \cdot 70 \cdot 55 \cdot \cos 73^\circ = 5673,74 \rightarrow c = 75,3$ m

$70^2 = 55^2 + 75,3^2 - 2 \cdot 55 \cdot 75,3 \cdot \cos \hat{A} \rightarrow$
 $\rightarrow \cos \hat{A} = \frac{55^2 + 75,3^2 - 70^2}{2 \cdot 55 \cdot 75,3} = 0,4582 \rightarrow \hat{A} = 62^\circ 43' 49,4''$

$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 44^\circ 16' 10,6''$

c) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \rightarrow \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{30^2 + 40^2 - 25^2}{2 \cdot 30 \cdot 40} = 0,7812 \rightarrow \hat{A} = 38^\circ 37' 29,4''$

$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{25^2 + 40^2 - 30^2}{2 \cdot 25 \cdot 40} = 0,6625 \rightarrow \hat{B} = 48^\circ 30' 33''$

$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 92^\circ 51' 57,6''$

d) $\frac{15}{\sin 130^\circ} = \frac{9}{\sin \hat{B}} \rightarrow \sin \hat{B} = \frac{9 \cdot \sin 130^\circ}{15} = 0,4596 \rightarrow$
 $\rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = 27^\circ 21' 46,8'' \\ \hat{B}_2 = 152^\circ 38' 13,2'' \end{cases} \rightarrow \text{No válida}$

La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180^\circ$.

$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 22^\circ 38' 13,2''$

$\frac{15}{\sin 130^\circ} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \rightarrow c = \frac{15 \cdot \sin \hat{C}}{\sin 130^\circ} = 7,54$ m

25 Resuelve estos triángulos, teniendo en cuenta que puede que no exista solución, que la solución sea única o que existan dos soluciones:

a) $a = 3$ m; $b = 8$ m; $\hat{A} = 25^\circ$

b) $a = 12,6$ m; $b = 26,4$ m; $\hat{B} = 124^\circ 34'$

c) $a = 82,6$ m; $b = 115$ m; $\hat{A} = 28^\circ 4'$

a) $\frac{3}{\sin 25^\circ} = \frac{8}{\sin \hat{B}} \rightarrow \sin \hat{B} = \frac{8 \cdot \sin 25^\circ}{3} = 1,127 \rightarrow$ No tiene solución porque el seno de un ángulo siempre está comprendido entre -1 y 1 .

b) $\frac{12,6}{\sin \hat{A}} = \frac{26,4}{\sin (124^\circ 34')} \rightarrow \sin \hat{A} = \frac{12,6 \cdot \sin (124^\circ 34')}{26,4} = 0,393 \rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 23^\circ 8' 29'' \\ \hat{A} = 156^\circ 51' 31'' \end{cases}$

El segundo resultado no es válido porque $\hat{A} + \hat{B}$ sería mayor que 180° y esto es imposible. En este caso, la solución es única.

$$\hat{C} = 180^\circ - (23^\circ 8' 29'' + 124^\circ 34') = 32^\circ 17' 31''$$

Ahora, con el teorema del coseno:

$$c^2 = 12,6^2 + 26,4^2 - 2 \cdot 12,6 \cdot 26,4 \cos (32^\circ 17' 31'') = 293,33 \rightarrow c = 17,13 \text{ m}$$

c) $\frac{82,6}{\sin (28^\circ 4')} = \frac{115}{\sin \hat{B}} \rightarrow \sin \hat{B} = \frac{115 \cdot \sin (28^\circ 4')}{82,6} = 0,655 \rightarrow \begin{cases} \hat{B} = 40^\circ 55' 11'' \\ \hat{B} = 139^\circ 4' 49'' \end{cases}$

En este caso, tenemos dos soluciones posibles:

• Si $\hat{B} = 40^\circ 55' 11''$:

$$\hat{C} = 180^\circ - (28^\circ 4' + 40^\circ 55' 11'') = 111^\circ 0' 49''$$

$$c^2 = 82,6^2 + 115^2 - 2 \cdot 82,6 \cdot 115 \cos (111^\circ 0' 49'') = 26860 \rightarrow c = 163,89 \text{ m}$$

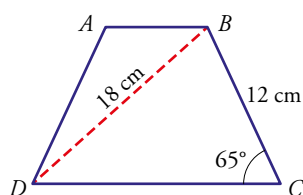
• Si $\hat{B} = 139^\circ 4' 49''$:

$$\hat{C} = 180^\circ - (28^\circ 4' + 139^\circ 4' 49'') = 12^\circ 51' 11''$$

$$c^2 = 82,6^2 + 115^2 - 2 \cdot 82,6 \cdot 115 \cos (12^\circ 51' 11'') = 1525,8 \rightarrow c = 39,06 \text{ m}$$

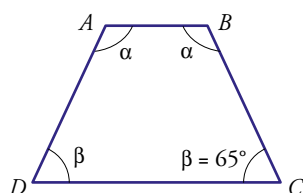
Para resolver

26 Halla el perímetro y el área de este trapecio isósceles.



Un trapecio isósceles tiene los ángulos iguales dos a dos. Además, se puede triangular con dos triángulos, así, la suma de sus ángulos interiores es igual a $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$.

$$\text{Si } 2\beta + 2\alpha = 360^\circ \rightarrow \beta + \alpha = 180^\circ \rightarrow 65^\circ + \alpha = 180^\circ \rightarrow \alpha = 115^\circ$$



- Hallamos la altura del trapecio, h .

Para hallar la altura utilizamos el seno de 65° :

$$\operatorname{sen} 65^\circ = \frac{h}{12} \rightarrow h = 12 \operatorname{sen} 65^\circ = 10,88 \text{ cm}$$

- Hallamos la base mayor, L , utilizando el teorema del coseno en el triángulo BCD .

$$18^2 = l^2 + 12^2 - 2 \cdot l \cdot 12 \cdot \cos 65^\circ$$

$$l^2 - l \cdot 24 \cos 65^\circ - 180 = 0$$

$$l = \frac{24 \cos 65^\circ \pm \sqrt{(24 \cos 65^\circ)^2 + 720}}{2}$$

$l = 19,41 \text{ cm}$, solo tomamos el resultado positivo por ser una longitud.

- Hallamos la base menor, l , utilizando el teorema del coseno en el triángulo ABD .

$$18^2 = L^2 + 12^2 - 2 \cdot L \cdot 12 \cdot \cos 115^\circ$$

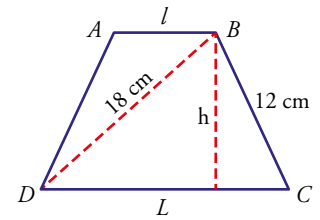
$$L^2 - L \cdot 24 \cos 115^\circ - 180 = 0$$

$$L = \frac{24 \cos 115^\circ \pm \sqrt{(24 \cos 115^\circ)^2 + 720}}{2}$$

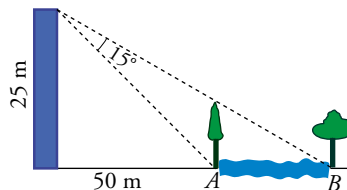
$L = 9,27 \text{ cm}$, solo tomamos el resultado positivo por ser una longitud.

Perímetro = $19,41 + 9,27 + 2 \cdot 12 = 52,68 \text{ cm}$

$$\text{Área} = \frac{(19,41 + 9,27) \cdot 10,88}{2} = 155,96 \text{ cm}^2$$



- 27** Desde una torre de vigilancia de 25 m, observamos dos árboles situados en orillas opuestas de un río bajo un ángulo de 15° . Los dos árboles están alineados con el pie de la torre y la distancia de esta al río es de 50 m. Calcula la anchura del río.



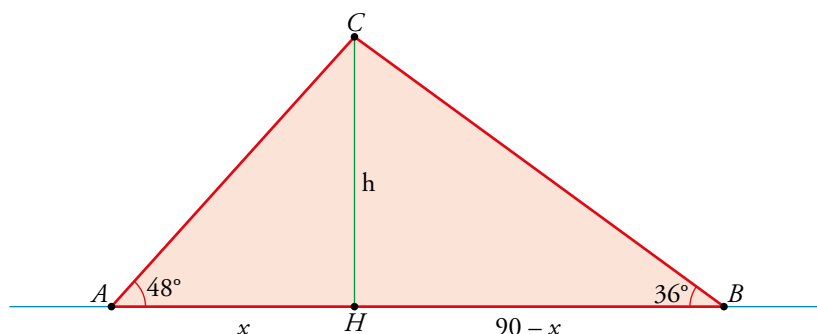
Llamamos $\hat{C}$ al ángulo complementario de $\hat{A}$.

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{50}{25} = 2 \rightarrow \hat{C} = 63^\circ 26' 6''$$

Por tanto, respecto de la torre de vigilancia, se ve el árbol cuya base está en B con un ángulo de $15^\circ + 63^\circ 26' 6'' = 78^\circ 26' 6''$.

$$\operatorname{tg} (78^\circ 26' 6'') = \frac{50 + \overline{AB}}{25} \rightarrow \overline{AB} = 72,17 \text{ m}$$

- 28** Una antena de radio está sujeta al suelo con dos cables que forman con el suelo ángulos de 36° y 48° . Los puntos de sujeción de los cables están alineados con el pie de la antena y distan entre sí 90 m. Calcula la altura de la antena.



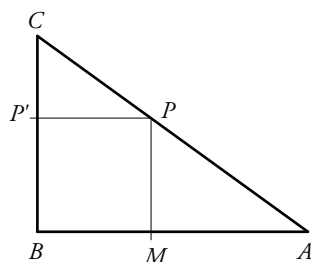
Llamemos x al segmento $\overline{AH}$. Entonces, el segmento $\overline{HB}$ será $90 - x$.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 48^\circ &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 36^\circ &= \frac{h}{90 - x} \end{aligned} \right\} \rightarrow x \cdot \operatorname{tg} 48^\circ = (90 - x) \cdot \operatorname{tg} 36^\circ \rightarrow 1,11x = 0,73(90 - x) \rightarrow$$

$$\rightarrow 1,84x = 65,7 \rightarrow x = \frac{65,7}{1,84} = 35,71$$

$$h = 35,71 \cdot \operatorname{tg} 48^\circ = 35,71 \cdot 1,11 = 39,64 \text{ m}$$

- 29** En un triángulo ABC , rectángulo en $\hat{B}$, conocemos el cateto $\overline{BC} = 8 \text{ cm}$ y el ángulo $\hat{A} = 38^\circ$. En el punto medio M del cateto AB , trazamos una paralela a BC que corta a AC en el punto P . Calcula el perímetro del trapecio $PCBM$.



$$\text{Perímetro}_{PCBM} = \overline{PC} + \overline{CB} + \overline{BM} + \overline{MP} = \overline{PC} + 8 + \overline{AB}/2 + \overline{MP}$$

Buscamos el lado $\overline{AB}$ sabiendo que $\hat{BAC} = 38^\circ$:

$$\operatorname{sen} 38^\circ = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{8}{\overline{CA}} \rightarrow \overline{CA} = \frac{8}{\operatorname{sen} 38^\circ} = 13 \text{ cm}$$

$$\cos 38^\circ = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BA}}{13} \rightarrow \overline{BA} = \cos 38^\circ \cdot 13 = 10,2 \text{ cm}$$

Teniendo en cuenta ahora el triángulo CPP' , sabemos que el ángulo $\hat{P}$ es 38° , y que $\overline{PP'}$ es igual a $\overline{BM}$, por lo que $\overline{PP'} = 5,1 \text{ cm}$:

$$\cos 38^\circ = \frac{5,1}{\overline{CP}} \rightarrow \overline{CP} = \frac{5,1}{\cos 38^\circ} = 6,5 \text{ cm}$$

$$\operatorname{sen} 38^\circ = \frac{\overline{CP'}}{6,5} \rightarrow \overline{CP'} = 6,5 \cdot \operatorname{sen} 38^\circ = 4 \text{ cm}$$

Nos falta encontrar $\overline{MP}$, o lo que es lo mismo, $\overline{BP'}$. Como $\overline{CP'} = 4 \text{ cm}$ y $\overline{CB} = 8 \text{ cm} \rightarrow \overline{BP'} = 4 \text{ cm} = \overline{MP}$

Volviendo al inicio y sustituyendo los valores hallados:

$$\text{Perímetro}_{PCBM} = 6,5 + 8 + \frac{\overline{BA}}{2} + \overline{MP} = 6,5 + 8 + 5,1 + 4 = 23,6 \text{ cm}$$

- 30** En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?

Si llamamos α al ángulo pedido, por el teorema de coseno tenemos que:

$$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos \alpha \rightarrow 49 = 25 + 64 - 80 \cos \alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow 80 \cos \alpha = 40 \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60^\circ$$

- 31** Una arquitecta quiere saber la altura del edificio que hay frente a su casa. Para ello ha tomado las medidas que aparecen en la figura desde el punto A. Calcula la altura del edificio BD.

Queremos hallar $\overline{BD}$, y por el dibujo podemos decir:

$$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = 8 + \overline{CD}$$

Por lo tanto solamente necesitamos hallar $\overline{CD}$.

En el triángulo CAB el ángulo $\hat{A}$ es 18° , y su lado $\overline{CB} = 8$ m, hallemos $\overline{AC}$:

$$\operatorname{sen} 18^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{8}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = 25,9 \text{ m}$$

$$\cos 18^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AC} = \cos 18^\circ \cdot 25,9 = 24,6 \text{ m}$$

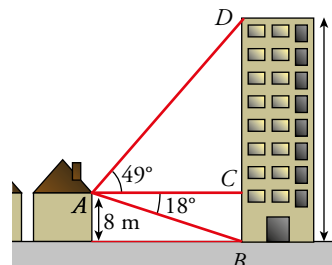
Ahora podemos usar el triángulo ACD:

$$\cos 49^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \rightarrow \overline{AD} = 37,5 \text{ m}$$

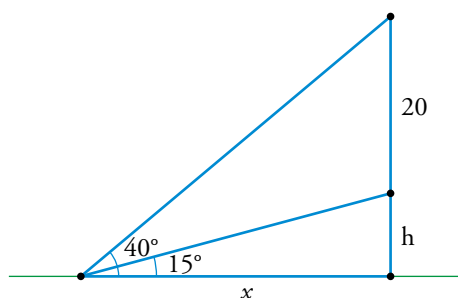
$$\operatorname{sen} 49^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \rightarrow \overline{CD} = 28,3 \text{ m}$$

Y volviendo al inicio:

$$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = 8 + \overline{CD} = 8 + 28,3 = 36,3 \text{ m}$$



- 32** Un faro de 20 m de altura está colocado sobre un promontorio. Un barco ve el promontorio bajo un ángulo de 30° , y el faro, bajo un ángulo de 40° . Calcula la altura del promontorio.



Llamamos h a la altura del promontorio y x a la distancia del barco a la base del pedestal.

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 15^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 40^\circ = \frac{20+h}{x} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{h}{\operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{20+h}{\operatorname{tg} 40^\circ} \rightarrow h \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = (20+h) \cdot \operatorname{tg} 15^\circ \rightarrow h = \frac{20 \operatorname{tg} 15^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ} = 7,32 \text{ m}$$

- 33** En una circunferencia de 12 cm de radio trazamos una cuerda de 20 cm de longitud. Halla el ángulo correspondiente a esa cuerda y la distancia entre la cuerda y el arco.

Los radios trazados desde los extremos de la cuerda y esta, forman un triángulo isósceles. El ángulo pedido es el opuesto a la cuerda (lado desigual) y podemos hallarlo usando el teorema del coseno.

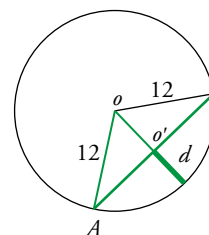
$$\begin{aligned} 20^2 &= 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cos \alpha \rightarrow 400 = 144 + 144 - 288 \cos \alpha \rightarrow \\ &\rightarrow 112 = -288 \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = -\frac{112}{288} = -0,3889 \rightarrow \\ &\rightarrow \alpha = 112^\circ 53' 10'' \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el ángulo $O'OA$ mide la mitad que α , en el trián-

gulo $OO'A$ tenemos: $\widehat{O'OA} = \frac{\overline{O'A}}{12} \rightarrow \overline{O'A} = 10$ cm

$$\cos \widehat{O'OA} = \frac{\overline{OO'}}{12} \rightarrow \overline{OO'} = 6,62 \text{ cm}$$

Nosotros estamos buscando d y sabiendo que el radio de la circunferencia es 12: $d + \overline{O'O} = 12 \rightarrow d = 12 - 6,62 = 5,38$ cm



- 34** De un trapecio rectángulo conocemos el lado oblicuo, que mide 16 cm, la diagonal menor, 12 cm, y el ángulo que esta forma con la base mayor, 50° . Calcula el área y el perímetro del trapecio.

Utilizando el ángulo complementario de 50° tenemos:

$$\widehat{BCD} = 40^\circ \rightarrow \overline{BC} = 12 \cdot \widehat{BCD} = 7,71 \text{ cm}$$

$$\widehat{CDB} = 40^\circ \rightarrow \overline{CD} = 12 \cdot \widehat{CDB} = 9,19 \text{ cm}$$

Por otro lado, por el teorema de los senos:

$$\frac{12}{\widehat{ABD}} = \frac{16}{\widehat{BDA}} \rightarrow \widehat{ABD} = \frac{12 \cdot \widehat{BDA}}{16} = 0,5745 \rightarrow \widehat{ABD} = 35^\circ 3' 53''$$

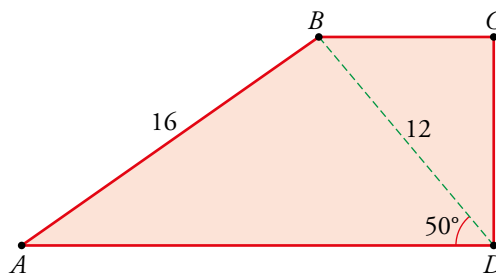
$$\widehat{ABD} = 180^\circ - (50^\circ + 35^\circ 3' 53'') = 94^\circ 56' 7''$$

$$\frac{\overline{AD}}{\widehat{ABD}} = \frac{16}{\widehat{BDA}} \rightarrow \overline{AD} = \frac{16 \cdot \widehat{ABD}}{\widehat{BDA}} = 20,81 \text{ cm}$$

Para terminar:

$$\text{Área}_{ABCD} = \frac{20,81 + 7,71}{2} \cdot 9,19 = 131,05 \text{ cm}^2$$

$$\text{Perímetro} = 20,81 + 9,19 + 7,71 + 16 = 53,71 \text{ cm}$$



- 35** En un rectángulo $ABCD$ de lados 8 cm y 12 cm, se traza desde B una perpendicular a la diagonal AC , y desde D , otra perpendicular a la misma diagonal. Sean M y N los puntos donde esas perpendiculares cortan a la diagonal. Halla la longitud del segmento MN .

Los triángulos AND y BMC son iguales, luego $\overline{AN} = \overline{MC}$.

Como $\overline{MN} = \overline{AC} - \overline{AN} - \overline{MC}$, entonces $\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC}$.

Por tanto, basta con calcular $\overline{AC}$ en el triángulo ABC y $\overline{MC}$ en el triángulo BMC .

- En ABC :

$$\overline{AC}^2 = 8^2 + 12^2 = 208 \text{ (por el teorema de Pitágoras)} \rightarrow \overline{AC} = 14,4 \text{ cm}$$

Calculamos $\widehat{C}$ (en ABC):

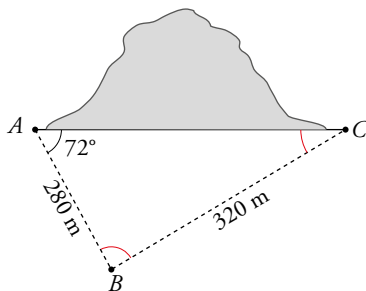
$$\widehat{C} = \frac{12}{8} = 1,5 \rightarrow \widehat{C} = 56^\circ 18' 35,8''$$

- En BMC :

$$\cos \widehat{C} = \frac{\overline{MC}}{8} \rightarrow \overline{MC} = 8 \cdot \cos (56^\circ 18' 35,8'') = 4,4 \text{ cm}$$

$$\text{Por último: } \overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC} = 14,4 - 2 \cdot 4,4 = 5,6 \text{ cm}$$

- 36** Para construir un túnel entre A y C necesitamos saber su longitud y dirección. Para ello, fijamos un punto B y tomamos las medidas indicadas en la figura. Calcula $\overline{AC}$ y los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$.



Usamos el teorema de los senos:

$$\frac{320}{\sen 72^\circ} = \frac{280}{\sen \hat{C}} \rightarrow \sen \hat{C} = \frac{280 \cdot \sen 72^\circ}{320} = 0,8322 \rightarrow \hat{C} = 56^\circ 19' 31''$$

$$\hat{B} = 180^\circ - (72^\circ + 56^\circ 19' 31'') = 51^\circ 40' 29''$$

Aplicando de nuevo el teorema de los senos:

$$\frac{320}{\sen 72^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\sen \hat{B}} \rightarrow \overline{AC} = \frac{320 \cdot \sen \hat{B}}{\sen 72^\circ} = 263,96 \text{ m}$$

- 37** En un paralelogramo $ABCD$ conocemos la diagonal mayor $\overline{AC} = 18 \text{ cm}$ y los ángulos que esta forma con los lados, 20° y 50° . Calcula el área, la longitud de los lados y la otra diagonal.

$$\hat{D} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$\frac{18}{\sen \hat{D}} = \frac{\overline{AD}}{\sen 50^\circ} \rightarrow \overline{AD} = \frac{18 \cdot \sen 50^\circ}{\sen 110^\circ} = 14,67 \text{ cm}$$

La altura, h , del paralelogramo es:

$$h = 18 \cdot \sen 20^\circ = 6,16 \text{ cm}$$

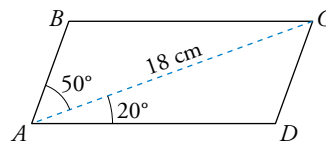
$$\text{Área}_{ABCD} = 14,67 \cdot 6,16 = 90,37 \text{ cm}^2$$

Para hallar la longitud de la otra diagonal calculamos primero $\overline{AB} = \overline{CD}$:

$$\frac{\overline{CD}}{\sen 20^\circ} = \frac{18}{\sen 110^\circ} \rightarrow \overline{CD} = \frac{18 \cdot \sen 20^\circ}{\sen 110^\circ} = 6,55 \text{ cm}$$

Aplicamos el teorema del coseno al triángulo BAD :

$$\overline{BD}^2 = 6,55^2 + 14,67^2 - 2 \cdot 6,55 \cdot 14,67 \cos 70^\circ = 192,38 \rightarrow \overline{BD} = 13,87 \text{ cm}$$



Página 110

- 38** En un cuadrilátero $ABCD$ conocemos las medidas de los lados y de la diagonal BD . Calcula las medidas del ángulo $\hat{B}$ y de la diagonal AC .

Aplicamos el teorema del coseno a los triángulos ABD y CBD .

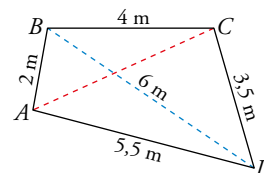
$$5,5^2 = 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cos \widehat{ABD} \rightarrow 24 \cos \widehat{ABD} = 9,75 \rightarrow \widehat{ABD} = 66^\circ 1' 50''$$

$$3,5^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos \widehat{CBD} \rightarrow 48 \cos \widehat{CBD} = 39,75 \rightarrow \widehat{CBD} = 34^\circ 5' 36''$$

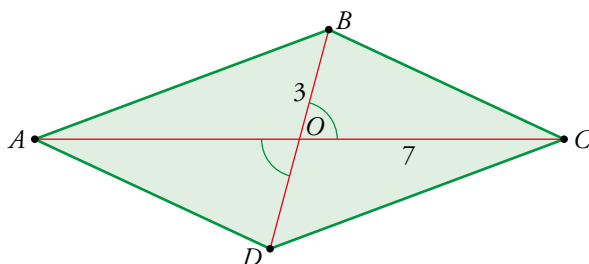
$$\hat{B} = 66^\circ 1' 50'' + 34^\circ 5' 36'' = 100^\circ 7' 26''$$

Ahora aplicamos de nuevo el teorema del coseno al triángulo ABC :

$$\overline{AC}^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cos (100^\circ 7' 26'') = 22,81 \rightarrow \overline{AC} = 4,78 \text{ cm}$$



- 39** Las diagonales de un paralelogramo miden 6 cm y 14 cm y forman un ángulo de 75° . Halla los lados y los ángulos del paralelogramo.



Como las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio, los segmentos $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ miden, respectivamente, la mitad de la medida de las correspondientes diagonales.

Aplicamos el teorema del coseno:

$$\overline{BC}^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos 75^\circ = 47,13 \rightarrow \overline{BC} = \overline{AD} = 6,87 \text{ cm}$$

$$\widehat{AOB} = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

$$\overline{AB}^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos 105^\circ = 68,87 \rightarrow \overline{AB} = \overline{DC} = 8,3 \text{ cm}$$

Para calcular un ángulo, por ejemplo el ángulo $\hat{B}$, aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{7}{\sin \widehat{OBC}} = \frac{6,87}{\sin 75^\circ} \rightarrow \sin \widehat{OBC} = \frac{7 \cdot \sin 75^\circ}{6,87} = 0,9842 \rightarrow \widehat{OBC} = 79^\circ 48' 5''$$

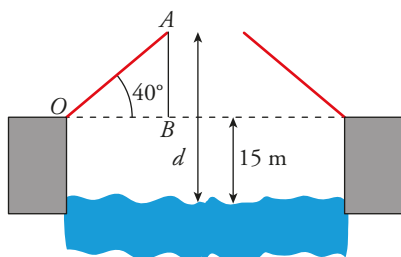
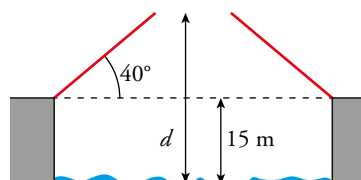
$$\frac{7}{\sin \widehat{ABO}} = \frac{8,3}{\sin 105^\circ} \rightarrow \sin \widehat{ABO} = \frac{7 \cdot \sin 105^\circ}{8,3} = 0,8146 \rightarrow \widehat{ABO} = 54^\circ 33' 5''$$

$$\hat{B} = \hat{D} = 79^\circ 48' 5'' + 54^\circ 33' 5'' = 134^\circ 21' 10''$$

$$\hat{A} = \hat{C} = 180^\circ - 134^\circ 21' 10'' = 45^\circ 38' 50''$$

- 40** Un puente levadizo mide 140 m cerrado sobre un río. Las aberturas del puente pueden elevarse hasta 40° .

- a) Si el nivel del agua está 15 m más abajo del puente cerrado, calcula la distancia d entre el nivel del agua y la altura del puente cuando está abierto al máximo.
- b) Calcula la separación entre las aberturas cuando el puente está totalmente abierto.



a) $d = 15 + \overline{AB}$

$$\sin 40^\circ = \frac{\overline{AB}}{70} \rightarrow \overline{AB} = 45 \rightarrow d = 15 + 45 = 60 \text{ m}$$

b) $140 = 2\overline{OB} + r$

El enunciado pide hallar r , por lo que debemos encontrar $\overline{OB}$:

$$\cos 40^\circ = \frac{\overline{OB}}{70} = \frac{\overline{OB}}{70} \rightarrow \overline{OB} = 70 \cdot \cos 40^\circ = 53,62 \text{ m}$$

Por lo tanto, $r = 140 - 2 \cdot 53,62 = 32,75 \text{ m}$.

41 Para hallar el área de una parcela irregular, hemos tomado las medidas indicadas en la figura. ¿Cuál es su área?

La diagonal opuesta al ángulo de 70° divide al cuadrilátero en dos triángulos.

- Área del triángulo izquierdo:

$$\text{Su altura es } h = 98 \cdot \sin 70^\circ = 92,09 \text{ m} \rightarrow \text{Área}_I = \frac{102 \cdot 92,09}{2} = 4696,6 \text{ m}^2$$

- Área del triángulo derecho:

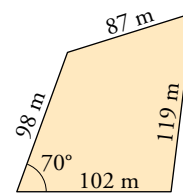
La calcularemos usando la fórmula de Herón y, para ello, necesitamos la longitud, l , del tercer lado.

$$l^2 = 98^2 + 102^2 - 2 \cdot 98 \cdot 102 \cos 70^\circ = 13170 \rightarrow l = \sqrt{13170} = 114,76 \text{ m}$$

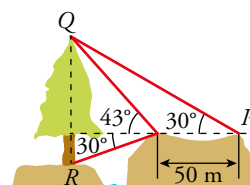
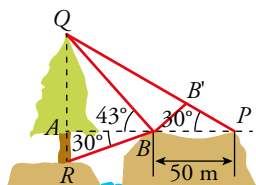
$$s = \frac{87 + 119 + 114,76}{2} = 160,3$$

$$\text{Área}_D = \sqrt{160,3 \cdot (160,3 - 87) \cdot (160,3 - 119) \cdot (160,3 - 114,76)} = 4701 \text{ m}^2$$

Por tanto, el área de la parcela será: $\text{Área} = \text{Área}_I + \text{Área}_D = 4696,6 + 4701 = 9397,6 \text{ m}^2$.



42 Halla la altura del árbol QR de pie inaccesible y más bajo que el punto de observación, con los datos de la figura.



Debemos hallar $\overline{QR}$ y para ello calcularemos $\overline{QA}$ y $\overline{AR}$.

Empezamos considerando el triángulo QBP , en el que $\widehat{P} = 180^\circ - 43^\circ = 137^\circ$, y, entonces $\widehat{Q} = 180^\circ - 137^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

Situamos B' de forma que BB' es perpendicular al lado QR .

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{BB'}}{50} \rightarrow \overline{BB'} = 25 \text{ m}$$

$$\sin 13^\circ = \frac{\overline{BB'}}{\overline{QB}} \rightarrow \overline{QB} = 111,1 \text{ m}$$

Si consideramos ahora el triángulo QAB :

$$\sin 43^\circ = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} \rightarrow \overline{QA} = 75,8 \text{ m}$$

$$\cos 43^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{QB}} \rightarrow \overline{AB} = 81,3 \text{ m}$$

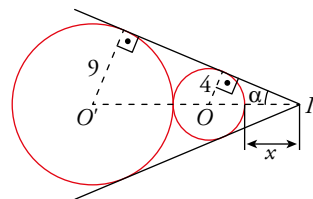
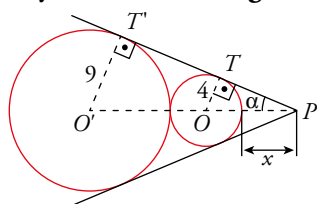
Nos falta hallar $\overline{AR}$, así que consideramos el triángulo RAB :

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{RB}} \rightarrow \overline{RB} = 94 \text{ m}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \rightarrow \overline{AR} = 47 \text{ m}$$

Por tanto: $\overline{QR} = \overline{QA} + \overline{AR} = 75,8 + 47 = 122,8 \text{ m}$

- 43** Dos circunferencias son tangentes exteriormente y sus radios miden 9 m y 4 m. Halla el ángulo, 2α , que forman sus tangentes comunes.



$$\overline{O'P} = 9 + 4 + x = 13 + x$$

$$\overline{OP} = 4 + x$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{T'O}}{\overline{O'P}} = \frac{\overline{TO}}{\overline{OP}}$$

Sustituyendo:

$$\frac{9}{13+x} = \frac{4}{4+x} \rightarrow \frac{9}{13+x} = \frac{4}{4+x} \rightarrow 5x = 32 \rightarrow x = \frac{32}{5} \text{ m}$$

$$\overline{OP} = 4 + x = \frac{20 + 32}{5} = \frac{52}{5} \text{ m}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{TO}}{\overline{OP}} = \frac{4}{52} \rightarrow \alpha = 22^\circ 37' \rightarrow 2\alpha = 45^\circ 14'$$

- 44** Dos árboles C y D se encuentran en la orilla opuesta de un río. Desde dos puntos A y B , situados en la orilla donde nos encontramos, tomamos las siguientes medidas:

$$\overline{AB} = 100 \text{ m}$$

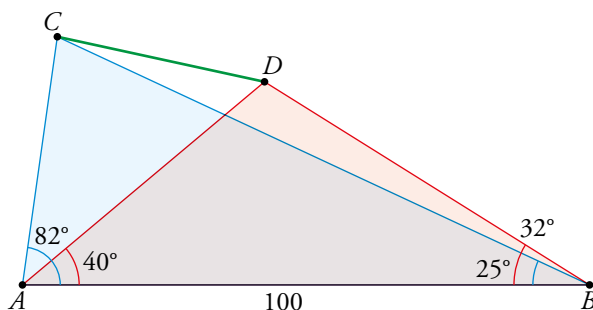
$$\widehat{CAB} = 82^\circ$$

$$\widehat{DAB} = 40^\circ$$

$$\widehat{DBA} = 32^\circ$$

$$\widehat{CBA} = 25^\circ$$

Calcula la distancia que separa a los dos árboles.



Para calcular la distancia $\overline{CD}$ hallaremos primero $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$. De esta manera obtendremos el resultado aplicándole el teorema del coseno al triángulo CAD .

$$\widehat{ACB} = 180^\circ - (82^\circ + 25^\circ) = 73^\circ$$

$$\frac{100}{\operatorname{sen} 73^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} 25^\circ} \rightarrow \overline{AC} = \frac{100 \cdot \operatorname{sen} 25^\circ}{\operatorname{sen} 73^\circ} = 44,19 \text{ m}$$

$$\widehat{ADB} = 180^\circ - (40^\circ + 32^\circ) = 108^\circ$$

$$\frac{100}{\operatorname{sen} 108^\circ} = \frac{\overline{AD}}{\operatorname{sen} 32^\circ} \rightarrow \overline{AD} = \frac{100 \cdot \operatorname{sen} 32^\circ}{\operatorname{sen} 108^\circ} = 55,72 \text{ m}$$

$$\overline{CD}^2 = 44,19^2 + 55,72^2 - 2 \cdot 44,19 \cdot 55,72 \cos 42^\circ = 1397,7 \rightarrow \overline{CD} = 37,39 \text{ m}$$

45 Para medir la altura de una antena, cuyo pie es inaccesible, nos situamos en un punto P al oeste de la antena y la observamos bajo un ángulo de 60° . Caminamos unos 25 metros hacia el sur y desde Q el ángulo de observación es de 30° . Halla la altura de la antena.

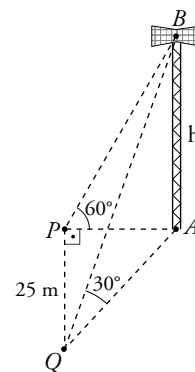
* Expresa $\overline{PA}$ y $\overline{QA}$ en función de h .

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{\overline{QA}} \rightarrow \overline{QA} = \frac{h}{\operatorname{tg} 30^\circ} = h\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{\overline{PA}} \rightarrow \overline{PA} = \frac{h}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

Aplicamos ahora el teorema de Pitágoras al triángulo APQ :

$$\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 + 25^2 = (h\sqrt{3})^2 \rightarrow \frac{h^2}{3} + 625 = 3h^2 \rightarrow \frac{8}{3}h^2 = 625 \rightarrow h = \frac{25}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 15,31 \text{ m}$$



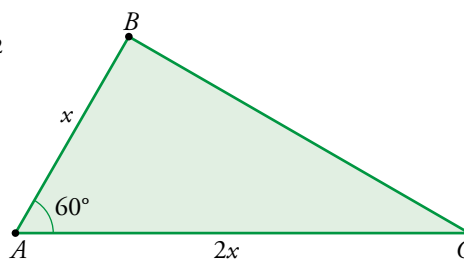
46 Uno de los lados de un triángulo mide el doble que otro, y el ángulo comprendido entre ellos mide 60° . Halla los otros ángulos.

$$\overline{BC}^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cos 60^\circ = x^2 + 4x^2 - 4x^2 \cdot \frac{1}{2} = 3x^2$$

$$\overline{BC} = x\sqrt{3}$$

$$\frac{x\sqrt{3}}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{x}{\operatorname{sen} \hat{C}} \rightarrow \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{x\sqrt{3}/2}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \rightarrow \hat{C} = 30^\circ$$

$$\hat{B} = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$$



Cuestiones teóricas

47 ¿Verdadero o falso?

- Si conocemos dos ángulos de un triángulo y un lado cualquiera, al tratar de solucionarlo, existe siempre solución única.
- Si conocemos dos lados de un triángulo y el ángulo opuesto a uno de ellos no siempre existe solución.
- Si conocemos los tres ángulos de un triángulo la solución es única.
- Si conocemos dos lados de un triángulo y el ángulo que forman, puede haber dos soluciones.

- Verdadero.
- Falso.
- Falso.
- Falso.

48 ¿Existe algún valor de $\alpha \neq 0$ que verifique $2 \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$? Justificalo.

Si $\alpha = 180^\circ$ se cumple la igualdad, ya que el seno y la tangente de 180° valen 0.

Si $\alpha \neq 0$ y también $\alpha \neq 180^\circ$, entonces:

$$\operatorname{sen} \alpha \neq 0 \text{ y } 2 \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \rightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 = \frac{1}{\cos \alpha} \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \begin{cases} 60^\circ \\ 300^\circ \end{cases}$$

49 Prueba que en cualquier paralelogramo de lados a y b y diagonales c y d , se verifica:

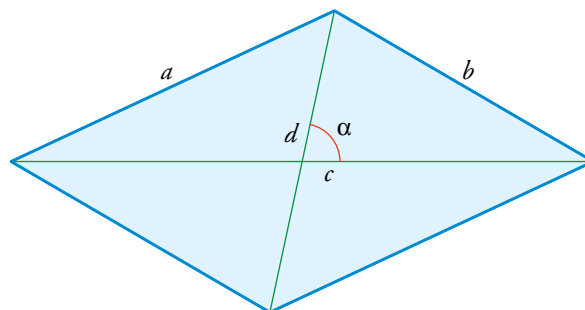
$$c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$$

* Aplica el teorema del coseno en dos triángulos que tengan un vértice en el centro del paralelogramo.

Utilizamos el hecho de que las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio y el teorema del coseno.

$$\left. \begin{aligned} b^2 &= \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2} \cos \alpha \\ a^2 &= \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2} \cos (180^\circ - \alpha) \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

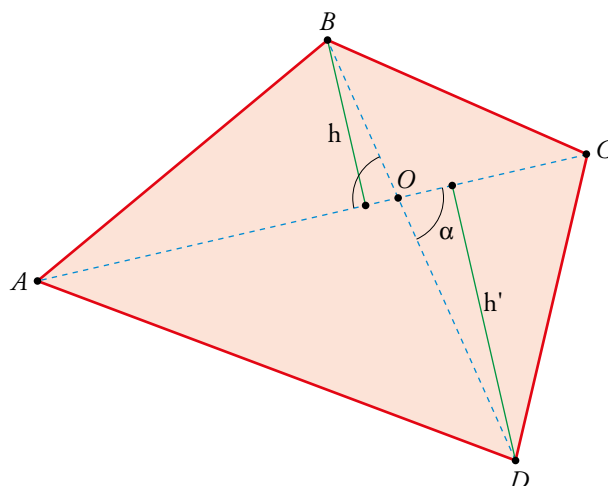
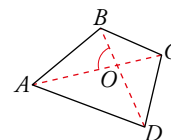
$$\rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} - \frac{cd}{2} \cos \alpha \\ a^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} - \frac{cd}{2} (-\cos \alpha) \end{cases}$$



Sumando miembro a miembro ambas ecuaciones, obtenemos que $b^2 + a^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2}$, de donde se obtiene la relación $c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$.

50 Demuestra que el área de cualquier cuadrilátero es igual a la mitad del producto de sus diagonales por el seno del ángulo que forman.

* Ten en cuenta que: $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$



Descomponemos el área del cuadrilátero como la suma de las áreas de los triángulos ABC y CDA . Ambos tienen en común la base AC .

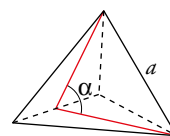
$$h = \overline{OB} \cdot \sen \alpha$$

$$h' = \overline{OD} \cdot \sen \alpha$$

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{\overline{AC} \cdot h}{2} + \frac{\overline{AC} \cdot h'}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{OB} \cdot \sen \alpha}{2} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{OD} \cdot \sen \alpha}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \overline{AC} (\overline{OB} + \overline{OD}) \cdot \sen \alpha \end{aligned}$$

51 Comprueba que el ángulo α que forman las dos caras contiguas de un tetraedro regular de arista a , verifica que $\cos \alpha = 1/3$.

* Ten en cuenta que los lados del ángulo α son alturas de triángulos equiláteros.



Como cada cara es un triángulo equilátero de lado a , la longitud de los segmentos dibujados es $a \frac{\sqrt{3}}{2}$ (altura del triángulo equilátero de lado a).

Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = \left(a \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(a \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2a \frac{\sqrt{3}}{2} a \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \rightarrow a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{2}a^2 \cos \alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{3}{2} \cos \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha = 70^\circ 31' 44''$$

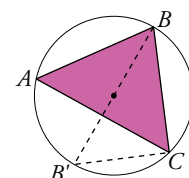
Página 111

Para profundizar

52 Demuestra que en un triángulo cualquiera ABC se verifica la siguiente igualdad:

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } C}} = 2R$$

Donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.



* Traza el diámetro de la circunferencia desde uno de los vértices. Aplica el teorema de los senos en los triángulos ABC y $BB'C$.

Las dos primeras igualdades forman el enunciado del teorema de los senos.

Por otra parte, los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B'}$ son iguales porque abarcan el mismo arco BC . Por tanto, aplicando el teorema de los senos al triángulo $BB'C$ (ya que $\widehat{C} = 90^\circ$ porque abarca un arco de 180°):

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{a}{\widehat{\text{sen } B'}} = \frac{\overline{BB'}}{\widehat{\text{sen } C}} = \frac{2R}{1} = 2R$$

53 Elige la respuesta correcta:

«El radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo de lados 8 m, 10 m, y 12 m es...»

- a) 7,2 m b) 6,05 m c) 10 m

* Ten en cuenta el resultado del ejercicio anterior.

Veamos que la repuesta correcta es b).

Por el ejercicio 52 sabemos que se cumple $\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } B'}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } C}} = \frac{2R}{1} = 2R$.

Por el teorema del coseno, como $c = 12$ es uno de los lados del triángulo:

$$12^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 80 \cdot \cos \widehat{C} \rightarrow \cos \widehat{C} = 0,125 \rightarrow \widehat{C} = 83^\circ 49'$$

Por tanto:

$$\frac{c}{\widehat{\text{sen } C}} = 2R \rightarrow R = \frac{1}{2} \cdot 12,09 \rightarrow R = 6,05 \text{ m}$$

- 54** De un triángulo ABC conocemos los tres lados, $a = 14$ cm, $b = 16$ cm y $c = 9$ cm. Halla la longitud de la bisectriz del ángulo $\hat{A}$.

Calculamos primero el ángulo α :

$$14^2 = 16^2 + 9^2 - 2 \cdot 16 \cdot 9 \cos \hat{A} \rightarrow 288 \cos \hat{A} = 141 \rightarrow \hat{A} = 60^\circ 41' 12''$$

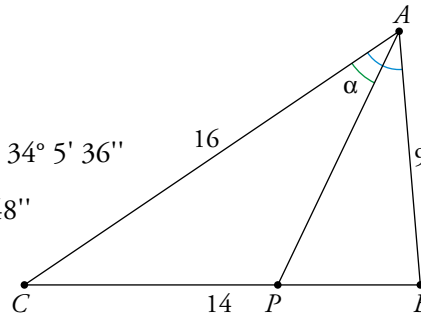
$$\alpha = \frac{\hat{A}}{2} = 30^\circ 20' 36''$$

Calculamos el ángulo $\hat{C}$:

$$9^2 = 16^2 + 14^2 - 2 \cdot 16 \cdot 14 \cos \hat{C} \rightarrow 448 \cos \hat{C} = 371 \rightarrow \hat{C} = 34^\circ 5' 36''$$

$$\text{Ahora, } \widehat{APC} = 180^\circ - (30^\circ 20' 36'' + 34^\circ 5' 36'') = 115^\circ 33' 48''$$

$$\frac{16}{\sin \widehat{APC}} = \frac{\overline{AP}}{\sin \hat{C}} \rightarrow \overline{AP} = \frac{16 \cdot \sin \hat{C}}{\sin \widehat{APC}} = 9,94 \text{ cm}$$



- 55** Halla el ángulo que forma la tangente a estas circunferencias con la recta que une sus centros. Los radios miden 4 cm y 9 cm, y la distancia entre sus centros es de 16 cm.

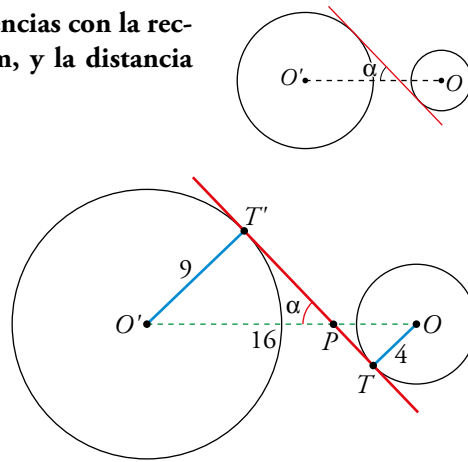
Los triángulos $O'TP$ y OTP son triángulos rectángulos.

$$\sin \alpha = \frac{9}{\overline{OT}} \rightarrow \overline{OT} = \frac{9}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{\overline{OP}} \rightarrow \overline{OP} = \frac{4}{\sin \alpha}$$

$$16 = \overline{OO'} = \overline{OT} + \overline{PO} = \frac{9}{\sin \alpha} + \frac{4}{\sin \alpha} \rightarrow$$

$$\rightarrow 16 \sin \alpha = 13 \rightarrow \sin \alpha = \frac{13}{16} \rightarrow \alpha = 54^\circ 20' 27''$$



- 56** Queremos calcular la distancia desde A y B a un punto inaccesible P . Para ello, fijamos un punto C de modo que $\widehat{PBC} = 90^\circ$ y tomamos las medidas indicadas en la figura. Calcula $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$.

Calculamos los ángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{CAB}$.

$$340^2 = 250^2 + 500^2 - 2 \cdot 250 \cdot 500 \cos \widehat{ABC} \rightarrow 250\,000 \cos \widehat{ABC} = 196\,900 \rightarrow \widehat{ABC} = 38^\circ 2' 18''$$

$$500^2 = 250^2 + 340^2 - 2 \cdot 250 \cdot 340 \cos \widehat{CAB} \rightarrow 170\,000 \cos \widehat{CAB} = -71\,900 \rightarrow \widehat{CAB} = 115^\circ 1' 14''$$

$$\widehat{PAB} = 180^\circ - 115^\circ 1' 14'' = 64^\circ 58' 46''$$

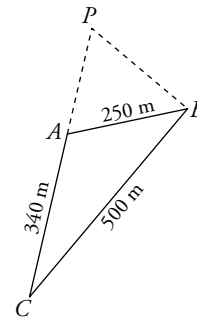
$$\widehat{PBA} = 90^\circ - 38^\circ 2' 18'' = 51^\circ 57' 42''$$

$$\hat{P} = 180^\circ - (64^\circ 58' 46'' + 51^\circ 57' 42'') = 63^\circ 3' 32''$$

Ahora aplicamos el teorema de los senos para calcular las distancias:

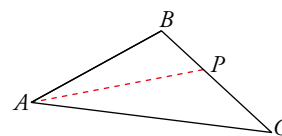
$$\frac{\overline{PA}}{\sin \widehat{PBA}} = \frac{250}{\sin \hat{P}} \rightarrow \overline{PA} = 220,87 \text{ m}$$

$$\frac{\overline{PB}}{\sin \widehat{PAB}} = \frac{250}{\sin \hat{P}} \rightarrow \overline{PB} = 254,12 \text{ m}$$



57 Demuestra que la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto al ángulo en segmentos proporcionales a los otros lados.

* Debes probar que $\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{PC}$. Aplica el teorema de los senos en los triángulos ABP y ACP .



$$\left. \begin{aligned} \frac{\overline{AP}}{\widehat{\text{sen } B}} &= \frac{\overline{BP}}{\widehat{\text{sen } \frac{A}{2}}} \rightarrow \overline{AP} \cdot \widehat{\text{sen } \frac{A}{2}} = \overline{BP} \cdot \widehat{\text{sen } B} \\ \frac{\overline{AP}}{\widehat{\text{sen } C}} &= \frac{\overline{PC}}{\widehat{\text{sen } \frac{A}{2}}} \rightarrow \overline{AP} \cdot \widehat{\text{sen } \frac{A}{2}} = \overline{PC} \cdot \widehat{\text{sen } C} \end{aligned} \right\} \rightarrow \overline{BP} \cdot \widehat{\text{sen } B} = \overline{PC} \cdot \widehat{\text{sen } C}$$

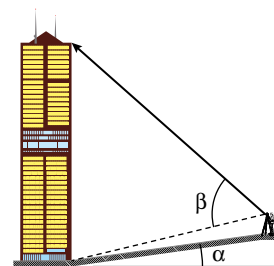
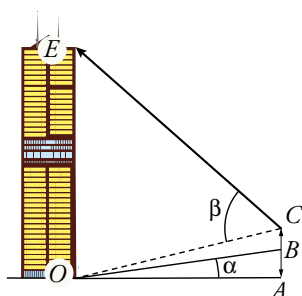
Por otro lado:

$$\frac{\overline{AB}}{\widehat{\text{sen } C}} = \frac{\overline{AC}}{\widehat{\text{sen } B}} \rightarrow \widehat{\text{sen } B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \widehat{\text{sen } C}$$

Sustituyendo $\widehat{\text{sen } B}$ en la primera relación, se obtiene:

$$\overline{BP} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \widehat{\text{sen } C} = \overline{PC} \cdot \widehat{\text{sen } C} \rightarrow \overline{BP} \cdot \overline{AC} = \overline{PC} \cdot \overline{AB} \rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}$$

58 Para medir la altura de un edificio se utiliza un teodolito cuya mira está a una altura de 1,5 m sobre el suelo que está 3 m más alto que la base del edificio. Los datos conocidos son $\alpha = 10^\circ$, $\beta = 80^\circ$. Halla la altura del edificio.



Datos: $\widehat{BOA} = 10^\circ$ $\widehat{OCE} = 80^\circ$ $\overline{AB} = 3 \text{ m}$ $\overline{BC} = 1,5 \text{ m}$

Calculamos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ en el triángulo rectángulo OAB : $\text{tg } 10^\circ = \frac{3}{\overline{OA}} \rightarrow \overline{OA} = 17,01 \text{ m}$

$$\text{sen } 10^\circ = \frac{3}{\overline{OB}} \rightarrow \overline{OB} = 17,28 \text{ m}$$

En el triángulo rectángulo OAC obtenemos $\overline{OC}$: $\overline{OC}^2 = 17,01^2 + 4,5^2 \rightarrow \overline{OC} = 17,60 \text{ m}$

Para hallar el ángulo AOC utilizamos $\overline{OA}$ y $\overline{AC}$ y su tangente:

$$\text{tg } (\widehat{AOC}) = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{4,5}{17,01} = 0,264550 \rightarrow \widehat{AOC} = \text{arc tg}(0,264550) = 14^\circ 49' 5''$$

Por lo tanto $\widehat{COE} = 90^\circ - (14^\circ 49' 5'') = 70^\circ 10' 55'' \rightarrow \widehat{OEC} = 180^\circ - (80^\circ + 75^\circ 10' 55'') = 24^\circ 49' 5''$

En el triángulo COE conocemos sus ángulos y un lado. Con el teorema de los senos obtenemos $\overline{OE}$.

$$\frac{\overline{OE}}{\widehat{\text{sen } 80^\circ}} = \frac{17,60}{\widehat{\text{sen } 24^\circ 49' 5''}} \rightarrow \overline{OE} = 41,29 \text{ m}$$

La altura del edificio es 41,29 m.

AUTOEVALUACIÓN

Página 111

- 1** Expresa a través de las razones trigonométricas de un ángulo del primer cuadrante, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos: 154° , 207° , 318° , 2456° .

$$\operatorname{sen} 154^\circ = \operatorname{sen} (180^\circ - 26^\circ) = \operatorname{sen} 26^\circ$$

$$\cos 154^\circ = -\cos 26^\circ$$

$$\operatorname{tg} 154^\circ = -\operatorname{tg} 26^\circ$$

$$\operatorname{sen} 207^\circ = \operatorname{sen} (180^\circ + 27^\circ) = -\operatorname{sen} 27^\circ$$

$$\cos 207^\circ = -\cos 27^\circ$$

$$\operatorname{tg} 207^\circ = \operatorname{tg} 27^\circ$$

$$\operatorname{sen} 318^\circ = \operatorname{sen} (360^\circ - 42^\circ) = -\operatorname{sen} 42^\circ$$

$$\cos 318^\circ = \cos 42^\circ$$

$$\operatorname{tg} 318^\circ = -\operatorname{tg} 42^\circ$$

$$\operatorname{sen} 2456^\circ = \operatorname{sen} (360^\circ \cdot 6 + 296^\circ) = \operatorname{sen} 296^\circ = \operatorname{sen} (360^\circ - 64^\circ) = -\operatorname{sen} 64^\circ$$

$$\cos 2456^\circ = \cos 64^\circ$$

$$\operatorname{tg} 2456^\circ = -\operatorname{tg} 64^\circ$$

- 2** Si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$ y $\alpha > 90^\circ$, calcula sin hallar el ángulo α :

a) $\cos \alpha$

b) $\operatorname{tg} \alpha$

c) $\operatorname{sen} (180^\circ + \alpha)$

d) $\cos (90^\circ + \alpha)$

e) $\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha)$

f) $\operatorname{sen} (90^\circ - \alpha)$

$$\text{a) } \cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{4/5}{-3/5} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{c) } \operatorname{sen} (180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\text{d) } \cos (90^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\text{e) } \operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\text{f) } \operatorname{sen} (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

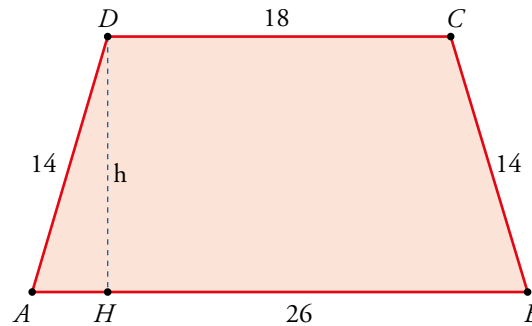
- 3** Si $\operatorname{tg} \alpha = -3,5$, halla α con ayuda de la calculadora, exprésalo como un ángulo del intervalo $[0, 180^\circ)$ y obtén su seno y su coseno.

$$\alpha = 105^\circ 56' 43''$$

$$\operatorname{sen} \alpha = 0,9615$$

$$\cos \alpha = -0,2747$$

- 4 Las bases de un trapecio isósceles miden 18 cm y 26 cm, y los lados iguales, 14 cm. Calcula sus ángulos y su área.



$$\overline{AH} = \frac{26-18}{2} = 4 \text{ cm por ser isósceles.}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{4}{14} = 0,2857 \rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 73^\circ 23' 54''$$

Como los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360° :

$$\hat{C} = \hat{D} = \frac{360^\circ - 2 \cdot (73^\circ 23' 54'')}{2} = 180^\circ - 73^\circ 23' 54'' = 106^\circ 36' 6''$$

Para calcular su área necesitamos la altura: $h = 14 \cdot \text{sen } \hat{A} = 13,42 \text{ cm}$

$$\text{Área}_{ABCD} = \frac{26+18}{2} \cdot 13,42 = 295,24 \text{ cm}^2$$

- 5 Resuelve el triángulo ABC y halla su área en estos casos:

a) $c = 19 \text{ cm}$, $a = 33 \text{ cm}$, $\hat{B} = 48^\circ$

b) $a = 15 \text{ cm}$, $b = 11 \text{ cm}$, $\hat{B} = 30^\circ$

- a) • Con el teorema del coseno, hallamos b :

$$b^2 = 19^2 + 33^2 - 2 \cdot 19 \cdot 33 \cos 48^\circ = 610,9 \rightarrow$$

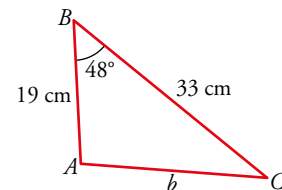
$$\rightarrow b = 24,72 \text{ cm}$$

- Del mismo modo, hallamos $\hat{A}$:

$$33^2 = 19^2 + 24,72^2 - 2 \cdot 19 \cdot 24,72 \cos \hat{A} \rightarrow \cos \hat{A} = -0,1245 \rightarrow \hat{A} = 97^\circ 9'$$

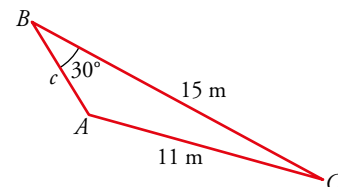
• $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 34^\circ 51'$

• Área = $\frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B} = 232,98 \text{ cm}^2$



- b) • Hallamos $\hat{A}$ con el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} \rightarrow \frac{15}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{11}{\text{sen } 30^\circ} \rightarrow \text{sen } \hat{A} = 0,6818$$



- Hay dos soluciones:

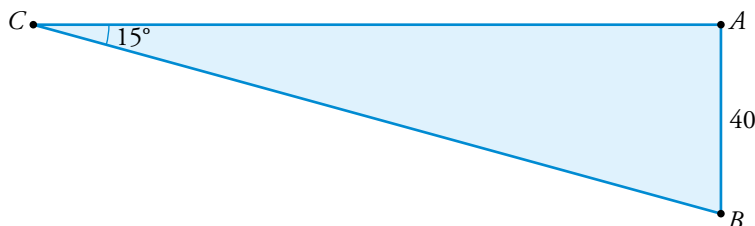
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = 42^\circ 59' 9'' \\ \hat{C}_1 = 107^\circ 0' 51'' \end{array} \right\} \rightarrow \frac{11}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{c_1}{\text{sen } 107^\circ 0' 51''} \rightarrow c_1 = 21,04 \text{ cm};$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B} = 78,9 \text{ cm}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_2 = 137^\circ 0' 51'' \\ \hat{C}_2 = 12^\circ 59' 9'' \end{array} \right\} \rightarrow \frac{11}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{c_2}{\text{sen } 12^\circ 59' 9''} \rightarrow c_2 = 4,94 \text{ cm};$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B} = 18,53 \text{ cm}^2$$

- 6** El radar de un barco detecta un objeto no identificado a 40 m de profundidad y en una dirección que forma 15° con la horizontal. ¿Qué distancia tiene que recorrer un buzo para llegar desde el barco hasta el objeto?



El buzo tiene que recorrer la distancia $\overline{BC}$.

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \frac{40}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = \frac{40}{\operatorname{sen} 15^\circ} = 154,55 \text{ m}$$

- 7** Desde la terraza de un edificio de 150 m de altura medimos los ángulos que se indican en la figura. Calcula la altura del edificio más bajo y la anchura de la calle.

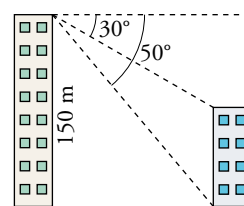
Representamos la anchura de la calle con la letra a . Usando el ángulo complementario de 50° tenemos que:

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{a}{150} \rightarrow a = 150 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = 125,86 \text{ m}$$

La diferencia, d , entre las alturas de las torres podemos obtenerla mediante el ángulo de 30° :

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{d}{125,86} \rightarrow d = 125,86 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 72,67 \text{ m}$$

La altura del edificio más bajo es $150 - 72,67 = 77,33 \text{ m}$.



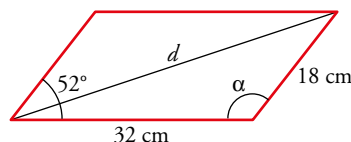
- 8** Los lados de un paralelogramo miden 18 cm y 32 cm y forman un ángulo de 52° . Halla la longitud de la diagonal mayor.

$$\alpha = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$$

Calculamos d aplicando el teorema del coseno:

$$d^2 = 18^2 + 32^2 - 2 \cdot 18 \cdot 32 \cos 128^\circ = 2057,24$$

$d = 45,36 \text{ cm}$ es la medida de la diagonal.



- 9** De esta figura, sabemos que $\overline{BD} = \overline{DC}$, $\hat{A} = 60^\circ$, $\widehat{ADB} = 45^\circ$ y $\overline{AD} = 5 \text{ m}$. Calcula $\overline{BC}$.

$$\widehat{ABD} = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$$

$$\frac{5}{\operatorname{sen} 75^\circ} = \frac{\overline{BD}}{\operatorname{sen} 60^\circ} \rightarrow \overline{BD} = \frac{5 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 75^\circ} = 4,48 \text{ m}$$

$$\widehat{BDC} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$\overline{BC}^2 = 4,48^2 + 4,48^2 - 2 \cdot 4,48 \cdot 4,48 \cos 135^\circ = 68,525 \rightarrow \overline{BC} = 8,28 \text{ m}$$

