

## 38 EJERCICIOS de LOGARITMOS

### Función exponencial y logarítmica:

1. Para cada una de las funciones que figuran a continuación, se pide: **i)** Tabla de valores y representación gráfica. (Cada apartado en los mismos ejes. Se recomienda utilizar Graph o similares) **ii)** Signo de  $f(x)$ . **iii)** Cortes con los ejes. **iv)** Intervalos de crecimiento. **v)** Dom( $f$ ) y R( $f$ ). **vi)** Asíntotas. **vii)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  **viii)** Continuidad.

**a)**  $f(x) = 10^x$  y  $f(x) = \log x$     **b)**  $f(x) = 0,1^x$  y  $f(x) = \log_{0,1} x$     **c)**  $f(x) = e^x$  y  $f(x) = \ln x$

**d)**  $f(x) = 3^x$  y  $f(x) = \log_3 x$     **e)**  $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ \frac{2x}{x-5} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$     **f)**  $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \ln x & \text{si } 0 < x \leq e \\ x+1-e & \text{si } x > e \end{cases}$

2. El matemático suizo *Leonhard Euler* (1707-1783) obtuvo en 1743 las siguientes fórmulas:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Comprobar que verifican  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

### Definición de logaritmo:

$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$

 (donde  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ )

#### Sistemas de logaritmos más utilizados:

NOMBRE	BASE	NOTACIÓN	DEFINICIÓN
Logaritmo decimal	$a=10$	log	$\log N = x \Leftrightarrow 10^x = N$
Logaritmo neperiano <sup>1</sup>	$a=e$	Ln, ln	$\ln N = x \Leftrightarrow e^x = N$

donde  $e \cong 2,718281828459...$  se llama cte. de Euler; es un número irracional.

3. Utilizando la definición, hallar los siguientes logaritmos:

<b>a)</b> $\log_3 9$	<b>e)</b> $\log_2 \sqrt{2}$	<b>i)</b> $\log_4 64$	<b>m)</b> $\log_4 256$	<b>q)</b> $\log_2 1024$
<b>b)</b> $\log_3 81$	<b>f)</b> $\log_2 \sqrt{8}$	<b>j)</b> $\log_{10} 0,01$	<b>n)</b> $\log_4 1/64$	<b>r)</b> $\log_2 1/64$
<b>c)</b> $\log_3 1/9$	<b>g)</b> $\log_{10} 1000$	<b>k)</b> $\log_4 1/16$	<b>o)</b> $\log_2 0,125$	<b>s)</b> $\log_3 \sqrt{27}$
<b>d)</b> $\log_3 (-9)$	<b>h)</b> $\log_4 2$	<b>l)</b> $\log_5 0,2$	<b>p)</b> $\log_4 1$	<b>t)</b> $\log_2 \log_2 4$

(Soluc: **a)** 2; **b)** 4; **c)** -2; **d)**  $\frac{2}{3}$ ; **e)** 1/2; **f)** 3/2; **g)** 3; **h)** 1/2; **i)** 3; **j)** -2; **k)** -2; **l)** -1; **m)** 4; **n)** -3; **o)** -3; **p)** 0; **q)** 10; **r)** -6; **s)** 3/2; **t)** 1)

4. Calcular los logaritmos decimales de los siguientes números (sin calculadora) y comprobar el resultado:

**a)** 10.000    **b)** 1.000.000    **c)** 0,001    **d)** 1/1.000.000    **e)**  $10^8$     **f)**  $10^{-7}$

<sup>1</sup> En honor a *John Napier* (*Neper*, en latín), matemático inglés (1550-1617) inventor de los logaritmos.



g) 10                      h) 1

(Soluc: a) 4; b) 6; c) -3; d) -6; e) 8; f) -7; g) 1; h) 0)

5. Utilizando la definición de logaritmo, hallar el valor de x en cada una de las igualdades siguientes:

a) $\log_2 8=x$	f) $\log_3 x=-2$	k) $\log_x 25=-1$	p) $\log_x 2=0$	u) $\log_x 1=0$
b) $\log_2 1/8=x$	g) $\log_x 49=2$	l) $\log_{1/100} 100=x$	q) $\log_{0,25} x=2$	
c) $\log 100=x$	h) $\log_x 8=3$	m) $\log_x 0.01=2$	r) $\log_2 (-16)=x$	
d) $\log_3 x=3$	i) $\ln e^3=x$	n) $\ln x=-1/2$	s) $\log_x 125=-3$	
e) $\ln x=2$	j) $\log_x 64=1$	o) $\log_{1/36} x=2$	t) $\log_3 \log_3 3=x$	

(Soluc: a) 3; b) -3; c) 2; d) 27; e)  $e^2$ ; f)  $1/9$ ; g) 7; h) 2; i) 3; j) 64; k)  $1/25$ ; l) -1; m) 0,1; n)  $\sqrt{e}/e$ ; o)  $1/1296$ ; p)  $\frac{1}{2}$ ; q) 0,0625; r)  $\frac{1}{2}$ ; s)  $1/5$ ; t) 0 u)  $\forall \mathbb{R}$ )

### Cálculo logarítmico:

■ Fórmulas del cálculo logarítmico:

$$\log(p \cdot q) = \log p + \log q$$

$$\log \frac{p}{q} = \log p - \log q$$

$$\log p^n = n \cdot \log p$$

$$\log \sqrt[n]{p} = \frac{1}{n} \log p$$

(todas son válidas en cualquier base)

Casos particulares:

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln 1 = 0$$

6. Aplicando las fórmulas anteriores, calcular (y hacer doble comprobación, algebraica y con calculadora):

1. $\log_6 \frac{1}{36}$	10. $\log_8 2$	19. $\log_2 \sqrt[3]{32}$	27. $\ln \frac{e}{\sqrt[4]{e}}$	34. $2\log 2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \log \frac{5}{4}$
2. $\log_3 \sqrt[4]{27}$	11. $\log_8 \sqrt{32}$	20. $\log_3 \sqrt{27}$	28. $\log \frac{\sqrt{10}}{0,1}$	35. $\log_5 \frac{5}{\sqrt{5} \sqrt[3]{5}}$
3. $\log_3 \frac{\sqrt{243}}{3}$	12. $\ln \sqrt[3]{e}$	21. $\log_2 \frac{\sqrt[5]{64}}{8}$	29. $\ln \frac{e}{\sqrt[3]{e^2}}$	36. $\ln \frac{e \sqrt{e}}{\sqrt[3]{e^2}}$
4. $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}}$	13. $\log_2 64$	22. $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$	30. $\log_3 \frac{1}{3 \sqrt[4]{27}}$	37. $\log(10 \sqrt[3]{10}) + \ln \frac{1}{e^2}$
5. $\ln e^2$	14. $\log_4 \frac{1}{64}$	23. $\log_3 \frac{1}{\sqrt{243}}$	31. $\log_{1/5} 125$	38. $\log_4 \sqrt[5]{64} + \log_8 \sqrt[5]{64}$
6. $\log_4 \frac{1}{\sqrt[5]{64}}$	15. $\log_3 \frac{3}{\sqrt[5]{81}}$	24. $\log \sqrt{20} + \log \sqrt{5}$	32. $\log_5 \frac{1}{5 \sqrt[3]{25}}$	
7. $\log_3 \sqrt[3]{9}$	16. $\log_3 \frac{\sqrt{3}}{9}$	25. $\log \frac{\sqrt[3]{100}}{10}$	33. $\ln \frac{1}{e^2 \sqrt{e}}$	
8. $\ln \frac{1}{e}$	17. $\ln \frac{\sqrt{e}}{e}$	26. $\log_3 \frac{1}{27 \sqrt[3]{9}}$		
9. $\log_4 2$	18. $\log_4 (-4)$			

(Soluc: 1) -2; 2)  $\frac{3}{4}$ ; 3)  $\frac{3}{2}$ ; 4)  $-\frac{1}{2}$ ; 5) 2; 6)  $-\frac{3}{5}$ ; 7)  $\frac{2}{3}$ ; 8) -1; 9)  $\frac{1}{2}$ ; 10)  $\frac{1}{3}$ ; 11)  $\frac{5}{6}$ ; 12)  $\frac{1}{3}$ ; 13) 6;  
14) -3; 15)  $\frac{1}{5}$ ; 16)  $-\frac{3}{2}$ ; 17)  $-\frac{1}{2}$ ; 18)  $\frac{1}{3}$ ; 19)  $\frac{5}{3}$ ; 20)  $\frac{3}{2}$ ; 21)  $-\frac{9}{5}$ ; 22)  $-\frac{2}{3}$ ; 23)  $-\frac{5}{2}$ ; 24) 1; 25)  $-\frac{1}{3}$ ;  
26)  $-\frac{11}{3}$ ; 27)  $\frac{3}{4}$ ; 28)  $\frac{3}{2}$ ; 29)  $\frac{1}{3}$ ; 30)  $-\frac{7}{4}$ ; 31) -3; 32)  $-\frac{5}{3}$ ; 33)  $-\frac{5}{2}$ ; 34) 1; 35)  $\frac{1}{6}$ ; 36)  $\frac{5}{6}$ ; 37)  $-\frac{2}{3}$ ; 38) 1)

7. Volver a hacer el ejercicio 3, pero esta vez aplicando las fórmulas del cálculo logarítmico.

8. Expresar en función de  $\log 2$  los logaritmos decimales siguientes, y comprobar con la calculadora:

a) $\log 16$	d) $\log 0,25$	g) $\log \frac{1}{40}$	j) $\log 0,32$	m) $\log \sqrt[3]{0,08}$
b) $\log 5$	e) $\log 0,625$	h) $\log \sqrt[3]{16}$	k) $\log 0,08$	n) $\log 2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \log \frac{5}{4}$
c) $\log \frac{32}{5}$	f) $\log 250$	i) $\log \frac{16}{5}$	l) $\log \sqrt[5]{80}$	

(Soluc: a)  $4\log 2$ ; b)  $1-\log 2$ ; c)  $-1+6\log 2$ ; d)  $-2\log 2$ ; e)  $1-4\log 2$ ; f)  $3-2\log 2$ ; g)  $-1-2\log 2$ ; h)  $\frac{4}{3}\log 2$ ; i)  $-1+5\log 2$ ;  
j)  $-2+5\log 2$ ; k)  $-2+3\log 2$ ; l)  $\frac{1}{5}(1+3\log 2)$ ; m)  $-\frac{2}{3}+\log 2$ ; n)  $1-\log 2$ )

9. Expresar en función de  $\ln 2$  o  $\ln 3$ :

a) $\ln 8$	b) $\ln \frac{e}{2}$	c) $\ln \frac{e^3}{4}$	d) $\ln \frac{4}{\sqrt{e}}$	e) $\ln 9e^3$	f) $\ln \sqrt{2e}$	g) $\ln \frac{9e}{\sqrt[3]{3e}}$	h) $\ln \frac{9e^3}{\sqrt[3]{3e}}$
------------	----------------------	------------------------	-----------------------------	---------------	--------------------	----------------------------------	------------------------------------

(Soluc: a)  $3\ln 2$ ; b)  $1-\ln 2$ ; c)  $3-2\ln 2$ ; d)  $-\frac{1}{2}+2\ln 2$ ; e)  $3+2\ln 3$ ; f)  $\frac{1+\ln 2}{2}$ ; g)  $\frac{5}{3}\ln 3 + \frac{2}{3}$ ; h)  $\frac{8}{3} + \frac{5}{3}\ln 3$ )

10. Expresar en función de  $\log 2$  y  $\log 3$  los logaritmos siguientes, y comprobar con la calculadora:

a) $\log 25$	d) $\log \frac{9}{4}$	g) $\log 162$	j) $\log 90$	m) $\log \sqrt{3,6}$
b) $\log 24$	e) $\log \sqrt[3]{6}$	h) $\log 3,6$	k) $\log 0,27$	
c) $\log \frac{4}{3}$	f) $\log 30$	i) $\log 1,2$	l) $\log 0,72$	

(Sol: a)  $2-2\log 2$ ; b)  $3\log 2 + \log 3$ ; c)  $2\log 2 - \log 3$ ; d)  $2\log 3 - 2\log 2$ ; e)  $\frac{\log 2 + \log 3}{3}$ ; f)  $1+\log 3$ ; g)  $\log 2 + 4\log 3$ ;  
h)  $-1+2\log 2 + 2\log 3$ ; i)  $-1+2\log 2 + \log 3$ ; j)  $1+2\log 3$ ; k)  $-2+3\log 3$ ; l)  $-2+3\log 2 + 2\log 3$ ; m)  $-\frac{1}{2} + \log 2 + \log 3$ )

11. Expresar en función de  $\log 2$ ,  $\log 3$  y  $\log 7$  los logaritmos siguientes:

a) $\log 84$	b) $\log 0,128$	c) $\log 0,125$	d) $\log 14,4$	e) $\log \sqrt[3]{12}$
--------------	-----------------	-----------------	----------------	------------------------

12. Calcular: a) $e^{5\ln 2}$	(Sol: 32)	c) $2e^{\ln 3 - \ln 2}$	(Sol: 3)
b) $e^{4\ln 2} - 5e^{3\ln 2} + 5e^{2\ln 2} + 5e^{\ln 2}$	(Sol: 6)	d) $9e^{-3\ln 3} - 8e^{-2\ln 3} + e^{-\ln 3}$	(Sol: -2/9)

13. Justificar las siguientes igualdades:

a) $\frac{\log 6 + \log 2}{\log 9 + \log 8 - \log 6} = 1$	b) $\log 125 = 3(1 - \log 2)$	c) $\frac{\log 6 + \log 3 - \log 2}{\log 9 - \log 3} = 2$	d) $10^{-2\log 2} = \frac{1}{4}$
e) $\frac{1 + \log 8}{\log 5 + 2\log 4} = 1$	(*) f) $4^{\log 3 / \log 2} = 9$	g) $4\log \sqrt[3]{80} - 1 = \log 4 + \log (2\log \sqrt[3]{80})$	

14. Sabiendo que  $\log 7,354 = 0,866524\dots$ , hallar (sin calculadora):

- a)  $\log 735,4$       b)  $\log 0,007354$       c)  $\log 7354$

15. Utilizando las fórmulas del cálculo logarítmico, desarrollar al máximo las expresiones siguientes:

- |   |   |  |   |
|---|---|--|---|
| a) $\log (2x)^3$                        | g) $\log \frac{mnp}{qr}$                | l) $\ln \sqrt{x^3}$                          | q) $\log (10 \sqrt[3]{x})$              |
| b) $\log (2x^3)$                        | h) $\log a^{3/4}$                       | m) $\log (x^2 - y^2)$                        | r) $\log \sqrt{\frac{a^2 b^3 c^5}{mp}}$ |
| c) $\log \left( \frac{2x}{y} \right)^2$ | i) $\log \left( \frac{mn}{p} \right)^r$ | n) $\log \sqrt{\frac{m^n}{pq^r}}$            | s) $\log (x^n y^m)$                     |
| d) $\ln (ax^2)$                         | j) $\ln \frac{1}{ex}$                   | o) $\log \sqrt{m^2 - n^2}$                   | t) $\log \frac{2m^2 n^3}{pq^4}$         |
| e) $\ln (ax)^2$                         | k) $\log \sqrt{mn}$                     | p) $\log \frac{m^2 - x^2}{\sqrt{m^2 + x^2}}$ | u) $\ln \frac{\sqrt{x}}{x}$             |
| f) $\log \sqrt[3]{c}$                   |   |  |   |

(Sol: a)  $3 \log 2 + 3 \log x$ ; b)  $\log 2 + 3 \log x$ ; c)  $2 \log 2 + 2 \log x - 2 \log y$ ; d)  $\ln a + 2 \ln x$ ; e)  $2 \ln a + 2 \ln x$ ; f)  $\frac{1}{3} \log c$ ;  
g)  $\log m + \log n + \log p - \log q - \log r$ ; h)  $\frac{3}{4} \log a$ ; i)  $r \log m + r \log n - r \log p$ ; j)  $-1 - \ln x$ ; k)  $\frac{\log m + \log n}{2}$ ; l)  $\frac{3}{2} \ln x$ ;  
m)  $\log(x+y) + \log(x-y)$ ; n)  $\frac{n \log m - \log p - r \log q}{2}$ ; o)  $\frac{\log(m+n) + \log(m-n)}{2}$ ; p)  $\log(m+x) + \log(m-x) - \frac{1}{2} \log(m^2 + x^2)$ ;  
q)  $1 + \frac{\log x}{3}$ ; r)  $\frac{2 \log a + 3 \log b + 5 \log c - \log m - \log p}{2}$ ; s)  $n \log x + m \log y$ ; t)  $\log 2 + 2 \log m + 3 \log n - \log p - 4 \log q$ ;  
u)  $-\frac{1}{2} \ln x$ )

16. Obtener  $x$  en las siguientes expresiones:

- |   |  |
|---|--|
| a) $e^x = 3$  | (Soluc: $x = \ln 3$ )                      |
| b) $\log x = 1 + 2 \log a$  | (Soluc: $x = 10 a^2$ )                     |
| c) $\log x = 2(\log a + 3 \log b) - \frac{1}{2}(2 \log c + \log d)$ | (Soluc: $x = \frac{a^2 b^6}{c \sqrt{d}}$ ) |
| d) $\ln x = \frac{\ln a + 2 \ln b}{2} - 3(2 \ln a - \ln b)$         | (Soluc: $x = \frac{b^4 \sqrt{a}}{a^6}$ )   |

17. Sabiendo que  $x=7$  e  $y=3$ , utilizar la calculadora para hallar:

- a)  $\log x^2$       b)  $\log (2x)$       c)  $\log^2 x$       d)  $\log (x+y)$       e)  $\log x + y$       f)  $\log \frac{x+y}{2}$       g)  $\frac{\log(x+y)}{2}$

18. a) Hallar  $a$  sabiendo que  $\log_7 \frac{a}{b} + \log_7 b = 2$  (Soluc:  $a=49$ )

b) Si  $\log_4 N=3$ , ¿cuánto vale  $\log_4 \frac{\sqrt[3]{N}}{N^3}$ ? ¿Cuánto vale  $N$ ? (Soluc:  $-8$ ;  $N=64$ )

19. a) ¿En qué base  $a$  se cumple que  $\log_a 12 + \log_a 3 = 2$ ? (Soluc:  $a=6$ )

b) ¿En qué base  $x$  se verifica que  $\log_x 2 = 100$ ? (Soluc:  $x = \sqrt[100]{2}$ )

20. ¿V o F? Razonar la respuesta:

- |   |                               |
|---|-------------------------------|
| a) $\log (A+B) = \log A + \log B$           | c) $\frac{\ln 2x}{2} = \ln x$ |
| b) $\log (A^2 + B^2) = 2 \log A + 2 \log B$ |                               |

d)  $\ln \frac{2x}{2} = \ln x$

e)  $\log \frac{AB}{C} = \frac{\log(AB)}{\log C}$

f) El logaritmo de un número siempre da como resultado un número irracional.

g) Los logaritmos decimales de números  $<1$  son negativos; en caso contrario, son positivos.

**21. CURIOSIDAD MATEMÁTICA:** Comprobar la veracidad de la siguiente fórmula, debida al físico británico Paul Dirac (1902-1984), que permite escribir cualquier número  $N$  empleando solamente tres dígitos:

$$N = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{(N \text{ raíces})} \cdot \sqrt{2}}$$

**22.** ¿Cuáles son los números cuyos logaritmos decimales están comprendidos entre 0 y 2? ¿Y entre 0 y -2?

(Soluc: 1 y 100; 0,01 y 1)

**23. a)** Razonar entre qué dos números enteros está  $\log_2 1000$ . Comprobar el resultado con la calculadora.

b) Ídem con  $\log 650$ .

c) Sin usar calculadora, razonar que  $\log 7$  y  $\log 1/7$  son opuestos. Una vez resuelto, compruébese mediante calculadora.

d) ¿V o F? Ni la base ni el argumento de un sistema de logaritmos pueden ser  $<0$ .

e) ¿Es lo mismo  $\ln^2(x^2 + 1)$  y  $\ln(x^2 + 1)^2$ ? Razonar la respuesta.

**24. TEORÍA:** Justificar (sin usar decimales) que  $1 < \ln \frac{2e^3 - 1}{8} < 2$ . (Ayuda: Utilizar que  $\ln e = 1$  y  $\ln e^2 = 2$ , y utilizar a continuación desigualdades)

### Ecuaciones exponenciales:

**25.** Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales por el método más apropiado, y comprobar el resultado en cada caso:

1.  $3^x = 48$  (Soluc:  $x \approx 3,5237$ )

2.  $2^x = \frac{8}{27}$  (Soluc:  $x \approx -1,7549$ )

3.  $2^{x+1} + 4 = 80$  (Soluc:  $x \approx 5,2479$ )

4.  $2 \cdot 3^x - 3^{2x} + 3 = 0$  (Soluc:  $x = 1$ )

5.  $3^{x-1} + 3^{x+1} - 3^x = 63$  (Soluc:  $x = 3$ )

6.  $2^{2x-3} = 8^{x+1}$  (Soluc:  $x = -6$ )

7.  $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$  (Soluc:  $x = 2$ )

8.  $2^{x-3} = -3$  (Soluc:  $\nexists$  soluc.)

9.  $5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}}$  (Soluc:  $x = 2$ )

10.  $2e^{x-4} = 3$  (Soluc:  $x \approx 4,4055$ )

11.  $2 + e^{x-4} = 3$  (Soluc:  $x = 4$ )

12.  $100 \cdot 10^x = \sqrt[5]{1000^5}$  (Soluc:  $x = 3$ )

13.  $3^{x/2} = 768$  (Soluc:  $x \approx 12,0949$ )

14.  $4^{x^2+2} = 2^{-2}$  (Soluc:  $\nexists$  soluc.)

15.  $3^{2x+5} = 3^7$  (Soluc:  $x = 1$ )

16.  $\frac{1}{e^x} = 27$  (Soluc:  $x \approx -3,2958$ )

17.  $5^{x^2-5x+6} = 1$  (Soluc:  $x_1 = 2, x_2 = 3$ )

18.  $3^x \cdot (3^2)^x = 9^3$  (Soluc:  $x = 2$ )

19.  $e^{2x} - 2e^{x+1} + e^2 = 0$  (Soluc:  $x = 1$ )

20.  $2^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$  (Soluc:  $x \approx 0,8301$ )

21.  $2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} + 2^{x+5} + 2^{x+6} = 31$  (Soluc:  $x = -2$ )

22.  $e^{4x} - 5e^{3x} + 5e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$  (Soluc:  $x_1 = 0, x_2 = \ln 2, x_3 = \ln 3$ )

23.  $2^{x+1} = 4^{2x-4}$  (Soluc:  $x = 3$ )

- |   |   |
|---|---|
| 24. $e^{x-1} = 0$ (Soluc: $\nexists$ soluc.)  | 41. $4^x - 14 \cdot 2^{x-1} + 12 = 0$ (Sol: $x=2, x=\log 3/\log 2$ )                            |
| 25. $x^2 e^x - 5x e^x + 6e^x = 0$ (Sol: $x_1=2, x_2=3$ )                                      | 42. $2^{x-1} \cdot 3^{1-x} = 5^{2x-2}$ sin usar calculadora (Soluc: $x=1$ )                     |
| 26. $2^{x-3} = 3^{x+1}$ (Soluc: $x \approx -7,8380$ )   | 43. $2^{2x} = 4^{x^2}$ (Soluc: $x_1=0, x_2=1$ )   |
| 27. $3^{2x} \cdot 2^{3x-1} = 6^{x+1}$ (Soluc: $x=1$ )   | 44. $2^{x+1} \cdot 3^{x-1} = 4^x$ sin usar calculadora (Soluc: $x=1$ )                          |
| 28. $e^{4x-x^2} = e^3$ (Sol: $x_1=1, x_2=3$ )   | 45. $2^{x+1} = 3^{x-1} \cdot 4^x$ se puede convertir en el 1 <sup>er</sup> caso (Soluc: $x=1$ ) |
| 29. $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$ (Soluc: $x_1=1, x_2=2$ )                               | 46. $9^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 27$ (Soluc: $x=1$ )  |
| 30. $3^{2x-4} = 729$ (Soluc: $x=5$ )  | 47. $4^x - 2 \cdot 2^{x-1} = 6$ (Soluc: $x \approx 1,5850$ )                                    |
| 31. $6^{2x} = 36^x$<br>(Soluc: es una identidad i.e. se verifica $\forall x \in \mathbb{R}$ ) | 48. $11 \cdot 3^x - 9^x = 18$ (Soluc: $x=2, x=\log 2/\log 3$ )                                  |
| 32. $e^{x-9} = \sqrt{73}$ (Soluc: $x \approx 11,1452$ )                                       | 49. (*) $x^{x^2+1} = 0$ (Soluc: $x=0$ )   |
| 33. $2^{x+9} = 3^x$ (Soluc: $x \approx 15,3856$ )   | 50. (*) $x^{x^2+1} = 1$ (Soluc: $\nexists$ soluc.)  |
| 34. $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$ (Soluc: $x=\pm 2$ )   | 51. $3^{x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1}$ (Soluc: $x=-2$ )                               |
| 35. $10^{3-x} = 1$ (Soluc: $x=3$ )  | 52. $2^{2x-1} - 16 = 2^{x+1}$ (Soluc: $x=3$ )   |
| 36. $3^x + 3^{1-x} = 4$ (Soluc: $x_1=0, x_2=1$ )  | 53. $e^{2x} = e^x + 6$ (Soluc: $x=\ln 3$ )  |
| 37. (*) $e^{x+2} + e^{x-1} = e^{2x} + e$ (Soluc: $x_1=-1, x_2=2$ )                            | 54. $e^{2x} + e = (e+1)e^x$ (Sol: $x=0, x=1$ )  |
| 38. $2^{x/2} = 768$ (Soluc: $x \approx 19,1699...$ )  | 55. $e^{2x} = 2 - e^x$ (Soluc: $x=0$ )  |
| 39. $\sqrt{x} = a^x$ (Soluc: $x=1$ )  | 56. $e^{2x} = 2e^x$ (Soluc: $x=\ln 2$ )   |
| 40. $e^{2x} - 2e^x + 2 = 0$ (Soluc: $\nexists$ soluc.)  |   |

26. Ídem (más elaboradas):

- |   |  |
|---|--|
| a) $\sqrt[5]{\frac{7^{12} + 7^x}{7^x + 7^2}} = 7$ (Sol: $x=7$ ) | i) $0,01^x = 11$   |
| b) $256^a + 256^a + 16^a = 1$                                   | j) $\left(\frac{20}{12}\right)^{7x-5} = \left(\frac{36}{100}\right)^{x-1}$ (Sol: $x=7/9$ ) |
| c) $3^{2-5x} = 11$  | k) $(\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24})^x = 27$  |
| d) $\sqrt[3]{4} = \left(\frac{1}{8}\right)^x$                   | l) $\sqrt[3]{2^{x-4}} = 16$ (Sol: $x=16$ )   |
| e) $3^{x+1} - 3^x = 18$ (Sol: $x=2$ )                           | m) $(\sqrt{75} - \sqrt{27} - \sqrt{3})^x = 9$ (Sol: $x=4$ )                                |
| f) $8^x + 4 = 4^x + 2^{x+2}$                                    | n) $x\sqrt{x} = (\sqrt{x})^x$ (Sol: $x=3$ )  |
| g) $x^{1/\ln x} = 1$  | o) $(x^2)^x \cdot (x^x)^3 = (x^5)^4 \cdot (x^7)^5$ (Sol: $x=11$ )                          |
| h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-x} = -8$                        | p) $x^{x^2-10x+21} = 1$ (Sol: $x=11$ )   |

27. Considérese la siguiente fórmula:

$$U = P(\rho + V)^{-1/D}$$

Despejar  $\rho$  (Ayuda: no es necesario utilizar logaritmos)

(Soluc:  $\rho = -V + P^D \cdot U^{-D}$ )

28. Sin necesidad de operar, razonar que ecuaciones del tipo:

$$2^x + 3^x = 0$$

$$4^{x-2} + 2^{x^2+1} + 2 = 0$$

$$x^2 + 5^x = 0, \text{ etc.}$$

no pueden tener solución.

### Ecuaciones logarítmicas:

29. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas, comprobando siempre que sea posible la validez de las soluciones obtenidas:

- 1)  $2 \log x - \log(x+6) = 3 \log 2$  (Soluc:  $x=12$ )
- 2)  $4 \log_2(x^2+1) = \log_2 625$  (Soluc:  $x=\pm 2$ )
- 3)  $\log(x^2+1) - \log(x^2-1) = \log \frac{13}{12}$  (Soluc:  $x=\pm 5$ )
- 4)  $\log(x-1)=2$  (Soluc:  $x=101$ )
- 5)  $\ln(x+2)=1$  (Soluc:  $x=e-2$ )
- 6)  $\ln(x-3)+\ln(x+1)=\ln 3+\ln(x-1)$  (Soluc:  $x=5$ )
- 7)  $2 \log^2 x + 7 \log x - 9 = 0$  (Soluc:  $x_1=10; x_2=\sqrt{10}/10^5$ ) ← Ayuda: aplicar un cambio de variable
- 8)  $2 \log x^2 + 7 \log x - 9 = 0$  (Soluc:  $x = \sqrt[11]{10^9}$ )
- 9)  $2 \ln(x-3) = \ln x - \ln 4$  (Soluc:  $x=4$ )
- 10)  $\log(x+3) - \log(x-6) = 1$  (Soluc:  $x=7$ )
- 11)  $2 \ln x - 3 = 0$  (Sol:  $\sqrt{e^3}$ )
- 12)  $\ln^2 x = \ln x$  (Soluc:  $x_1=e; x_2=1$ ) ← Ayuda: aplicar un cambio de variable
- 13)  $\log 10^{x-1} = 2$  (Soluc:  $x=3$ )
- 14)  $\log(x+9) = 2 + \log x$  (Soluc:  $x=1/11$ )
- 15)  $\log(x+1) + \log(x-1) = 1/100$  (Soluc:  $x = \sqrt{1 + \sqrt[100]{10}}$ )
- 16)  $\log^2 x = 1$  (Soluc:  $x_1=10; x_2=1/10$ ) ← Ayuda: puede ser útil un cambio de variable
- 17)  $\log \sqrt{3x+5} + \log \sqrt{x} = 1$  (Soluc:  $x=5$ )
- 18)  $\log(x^2-7x+110)=2$  (Soluc:  $x_1=2; x_2=5$ )
- 19)  $2 \ln x + 3 \ln(x+1) = 3 \ln 2$  (Soluc:  $x=1$ )
- 20)  $\log(x^2+3x+36)=1+\log(x+3)$  (Soluc:  $x_1=1; x_2=6$ )
- 21)  $\ln x + \ln 2x + \ln 4x = 3$  (Soluc:  $x=e/2$ )
- 22)  $\log^3 x - \log^2 x - \log x^2 = 0$  (Soluc:  $x_1=1; x_2=100; x_3=-1/10$ ) ← Ayuda: aplicar un cambio de variable
- 23)  $4 \log x - 2 \log(x-1) = 2 \log 4$  (Soluc:  $x=2$ )
- 24)  $\ln(x-1) + \ln(x+6) = \ln(3x+2)$  (Soluc:  $x=2; x=\cancel{4}$ )
- 25)  $2 \log x + \log(x-1) = 2$  (Soluc:  $x=5$ )
- 26)  $2 \log(x+9) - \log x = 2$  (Soluc:  $x_1=1; x_2=81$ )

- 27)  $\log(2x+6) - 1 = 2 \log(x-1)$  (Soluc:  $x_1=2; x_2=1/5$ )  
 28)  $\log(x+11) - 2 \log x = 1$  (Soluc:  $x=11/10$ )  
 29)  $\log(6x-1) - \log(x+4) = \log x$  (Soluc:  $x=1$ )  
 30)  $\log x^2 + \log x^3 = 5$  (Soluc:  $x=10$ )  
 31)  $\ln(x^2 + x) = \ln x^2 + \ln x$  (Sol:  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ )  
 32)  $\ln \frac{x}{2} = -3$

### Sistemas de ecuaciones exponenciales y/o logarítmicas:

30. Resolver los siguientes sistemas, comprobando la validez de las soluciones obtenidas:

- |   |  |
|---|--|
| <p>a) <math>\left. \begin{aligned} a^x a^y &amp;= 1 \\ \frac{a^{2x}}{a^y} &amp;= a^3 \end{aligned} \right\}</math> (Soluc: <math>x=1, y=-1</math>)</p> <p>b) <math>\left. \begin{aligned} \sqrt{3^{x-y}} &amp;= 81 \\ 5x + 2y &amp;= 5 \end{aligned} \right\}</math> (Soluc: <math>x=3, y=-5</math>)</p> <p>c) <math>\left. \begin{aligned} 3^{x-1} - 2 \cdot 5^y &amp;= 1 \\ 2 \cdot 9^x + 25^y &amp;= 163 \end{aligned} \right\}</math> (Soluc: <math>x=2, y=0</math>)</p> <p>d) <math>\left. \begin{aligned} 3 \cdot 2^x &amp;= 24 \\ 4^{x+1} - 3 \cdot 7^{y+3} &amp;= 235 \end{aligned} \right\}</math> (Soluc: <math>x=3, y=-2</math>)</p> | <p>e) <math>\left. \begin{aligned} \log x + \log y &amp;= 1 \\ 3 \log x - 2 \log y &amp;= 3 \end{aligned} \right\}</math> (Soluc: <math>x=10, y=1</math>)</p> <p>f) <math>\left. \begin{aligned} \log_x(2-y) &amp;= 2 \\ \log_x(5x+2y) &amp;= 0 \end{aligned} \right\}</math> (Soluc: <math>x=3, y=-7</math>)</p> <p>g) <math>\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \log x + \log y &amp;= \log 35 \\ \log(x+1) - \log y &amp;= 1 \end{aligned} \right\}</math> (Soluc: <math>x=49, y=5</math>)</p> |
|---|--|

### Problemas de aplicación:

31. Se deja a temperatura ambiente una muestra de café, y se observa que su temperatura en °C disminuye con el tiempo de acuerdo con la siguiente función:

$$T(t) = 24 + 51e^{-0,106t}$$

donde  $t$  viene dado en minutos.

- a) ¿Cuál es la temperatura inicial del café?  
 b) Si la temperatura óptima para tomar el café es de 56°, entre qué minutos se deberá tomar el café. (Soluc: entre 4' y 5')  
 c) ¿En qué temperatura se estabilizará el café?  
 d) Dibujar la gráfica de dicha función.

32. a) Demostrar que la función que permite calcular en cuánto se convierte un capital  $C_0$  acumulado al cabo de  $t$  años con un interés  $i$  es:

$$C(t) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^t, \text{ en } \text{€}$$

donde:  $C_0$  es el capital inicial, en €  
 $i$  es el interés anual, en %



- b) ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 6 años si colocamos a plazo fijo 20 000 € al 2%? (Soluc: 22 523 €)
- c) ¿Cuántos años debemos mantener 100 000 € en una entidad bancaria a una tasa del 2,5% si queremos duplicar el capital? ¿Es relevante el dato del capital inicial? (Soluc: 28 años; NO)
- d) Una persona que tiene depositada en una caja de ahorros 30 000 € a una tasa del 3% quiere llegar a tener 40 000 €. ¿Cuánto tiempo deberá mantener intacto el capital? (Soluc: 9 años y 9 meses)

33. a) Demostrar que la función que expresa el volumen de madera que tiene un bosque al cabo de  $t$  años es:

$$M(t) = M_0 \cdot (1+I)^t, \text{ en m}^3$$

donde:  $M_0$  es el volumen inicial de madera, en  $\text{m}^3$

$I$  es el crecimiento anual, en %

- b) Se calcula que un bosque tiene 12 000  $\text{m}^3$  de madera y que aumenta el 5% cada año. ¿Cuánta madera tendrá al cabo de 10 años si sigue creciendo en estas condiciones? (Soluc:  $\approx 19 546,7 \text{ m}^3$ )
- c) ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse el bosque? (Soluc: 14,21 años)

34. Algunos tipos de bacterias tienen un crecimiento de sus poblaciones muy rápido. La *escherichia coli* puede duplicar su población cada hora. a) Supongamos que hacemos un cultivo en el que inicialmente hay 5000 bacterias de este tipo. Construir una tabla para razonar que la función que nos da el número de bacterias al cabo de  $t$  horas es:

$$f(t) = 5000 \cdot 2^t$$

- b) ¿Cuántas habrá al cabo de 16 horas? c) Dibujar una gráfica que represente el crecimiento en las 8 primeras horas. d) Si tenemos un cultivo de 100 bacterias y queremos conseguir un millón, ¿cuánto tiempo ha de transcurrir? (Soluc: b) 327 680 000 bacterias; d)  $\approx 13$  horas y cuarto)

### Cambio de base:

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$$

(fórmula del cambio de base)

35. Utilizando la fórmula del cambio de base se pide:

- a) Demostrar que  $\log_a b \cdot \log_b a = 1$
- b) Hallar la relación entre el logaritmo neperiano y el logaritmo decimal.
- c) Expresar  $\log_2 x$  en función de  $\log x$  (Soluc:  $\log_2 x = 3,3219 \log x$ )

36. a) Supongamos que nuestra calculadora solo dispone de logaritmos decimales. Usando la fórmula del cambio de base, hallar  $\log_4 5$

- b) Razonar que  $\log_4 5$  es irracional.

37. Volver a hacer el ejercicio 3, pero utilizando esta vez la calculadora y la fórmula del cambio de base.

38. (\*) Resolver la ecuación logarítmica siguiente:  $\log_4 x + \log_8 x = 1$  (Ayuda: utilizar la fórmula del cambio de base para expresar ambos sumandos en función de  $\log_2$ , operar a continuación y despejar) (Sol:  $x = \sqrt[5]{64}$ )