# MATEMÁTICAS II

***(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)***

## OPCIÓN A

**1.** a) Calcula os posibles valores de $a, b, c$ para que a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ verifique a relación $(A - 2I)^2 = 0$, sendo $I$ a matriz identidade de orde 2 e $0$ a matriz nula de orde 2.

b) ¿Cal é a solución dun sistema homoxéneo de dúas ecuacións con dúas incógnitas, se a matriz de coeficientes é unha matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ verificando a relación $(A - 2I)^2 = 0$?

c) Para $a = b = c = 2$, calcula a matriz $X$ que verifica $A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, sendo $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

**2.** Dada a recta $r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$

a) Determina a ecuación implícita do plano $\pi$ que pasa polo punto $P(2,1,2)$ e é perpendicular a $r$. Calcula o punto de intersección de $r$ e $\pi$.

b) Calcula a distancia do punto $P(2,1,2)$ á recta $r$.

c) Calcula o punto simétrico do punto $P(2,1,2)$ respecto á recta $r$.

**3.** Debuxa a gráfica de $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$ estudando: dominio, simetrías, puntos de corte cos eixes, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidade e convexidade.

**4.** a) Define primitiva dunha función e enuncia a regra de Barrow.

b) Dada a función $f(x) = ax^3 + bx + c$, determina $a$, $b$ e $c$ sabendo que $y = 2x + 1$ é a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente á abscisa $x = 0$ e que $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

## OPCIÓN B

**1.** a) Discute, segundo os valores de $m$, o sistema:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + my + 3z &= m \\ 2x + 3y + mz &= 3 \end{aligned}$$

b) Resólveo, se é posible, para $m = 2$

**2.** Dadas as rectas $r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$ $\quad s: \left\{ \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{4} \right.$

a) Estuda a súa posición relativa. Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa pola orixe de coordenadas e é paralelo a $r$ e a $s$.

b) Calcula as ecuacións paramétricas da recta que corta perpendicularmente a $r$ e a $s$.

**3.** a) Definición e interpretación xeométrica da derivada dunha función nun punto.

b) Calcula os valores de $b$ e $c$ para que a función

$$f(x) = \begin{cases} \ln(e + x^2) & se\ \ x < 0 \\ x^2 + bx + c & se\ \ x \geq 0 \end{cases}$$

sexa derivable en $x = 0$. (Nota: ln = logaritmo neperiano)

**4.** A gráfica dunha función $f(x)$ pasa pola orixe de coordenadas e a súa derivada é $f'(x) = (2 - x)e^{3x}$. Determina a función $f(x)$ e calcula os intervalos de concavidade e convexidade de $f(x)$.

| | | |
|---|---|---|
| CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA | **PAU**<br>**SETEMBRO 2015** | **Código: 26** |

# MATEMÁTICAS II

***(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)***

## OPCIÓN A

**1.** a) Define menor complementario e adxunto dun elemento nunha matriz cadrada.

b) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

i. Calcula o rango, segundo os valores de $\lambda$, de $A - \lambda I$, sendo $I$ a matriz unidade de orde 3.

ii. Calcula a matriz $X$ que verifica $XA - 2A = 3X$.

**2.** Dada a recta $r: \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases}$

a) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é paralelo a $r$ e pasa polos puntos $A(0,1,2)$ e $B(5,3,1)$

b) Calcula o punto de corte de $r$ co plano perpendicular á devandita recta e que pasa por $B(5,3,1)$

c) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é paralelo ao plano $\pi: 2x - 3y + 4z - 5 = 0$ e dista $\sqrt{29}$ unidades da recta $r$.

**3.** a) Calcula os valores de $a$ e $b$ para que a función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & se\ x \leq 1 \\ \frac{2lnx+2}{x^2} & se\ x > 1 \end{cases}$ sexa derivable en $x = 1$. (Nota: $ln$ = logaritmo neperiano)

b) Para os valores $a = -4$ e $b = 6$, determina os intervalos de crecemento e decrecemento de $f(x)$.

**4.** Debuxa e calcula a área da rexión limitada polas gráficas da parábola $f(x) = 4x - x^2$ e as rectas tanxentes á gráfica de $f(x)$ nos puntos correspondentes a $x = 0$ e $x = 2$ (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indicar os puntos de corte cos eixes de coordenadas, o seu vértice e concavidade ou convexidade).

## OPCIÓN B

**1.** a) Discute, segundo os valores de $m$, o sistema de ecuacións:

$$\begin{aligned} x + y + z &= m \\ x - y &= 0 \\ 3x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema cando $m = 0$.

**2.** Dadas as rectas $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$; s : $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa de $r$ e $s$. Calcula a distancia de $r$ a $s$.

b) Se dous dos lados dun rectángulo están sobre as rectas $r$ e $s$ e dous vértices consecutivos do rectángulo son os puntos $A(0,1,1)$ e $B(0,4,4)$, calcula as coordenadas dos otros dous vértices e a área do rectángulo.

**3.** a) Define derivada dunha función nun punto. Interpretación xeométrica

b) Dada a función $f(x) = 2e^{-x}(x+1)$, calcula: intervalos de crecemento e decrecemento e máximos e mínimos relativos de $f(x)$.

**4.** a) a) Calcula: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2 - \frac{x}{4}}{x^2}$

b) Calcula unha primitiva da función $f(x) = xsenx$ que pase polo punto $(\pi, 0)$

**CONVOCATORIA DE XUÑO**

## OPCIÓN A

1) **a) 1 punto**

**b) 0,5 puntos**

**c) 1,5 puntos**

2) **a) 1 punto**, distribuído en:
- 0,5 puntos pola ecuación do plano.
- 0,5 puntos polo punto de intersección da recta e o plano.

**b) 1 punto**

**c) 1 punto**

3) **2 puntos**, distribuídos en:
- Dominio, simetrías e puntos de corte cos eixes: 0,25 puntos.
- Asíntotas: 0,25 puntos.
- Intervalos de crecemento e decrecemento: 0,25 puntos.
- Máximos e mínimos relativos: 0,25 puntos.
- Puntos de inflexión: 0,25 puntos.
- Intervalos de concavidade e convexidade: 0,25 puntos.
- Gráfica: 0,5 puntos.

4) **a) 1 punto,** distribuído en:
- Definición de primitiva: 0,5 puntos.
- Enunciado da regra de Barrow: 0,5 puntos

**b) 1 punto,** distribuído en:
- 0,5 puntos pola obtención de b e c.
- 0,5 puntos pola obtención de a.

## OPCIÓN B

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:
- 1 punto polo cálculo dos rangos segundo os valores de m
- 1 punto pola discusión do sistema

**b) 1 punto**

2) **a) 1,5 puntos**

**b) 1,5 puntos**

3) **a) 1 punto**, distribuído en:
- 0,5 puntos pola definición de derivada dunha función nun punto.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

**b) 1 punto,** distribuído en:
- 0,5 puntos pola determinación de c.
- 0,5 puntos pola determinación de b.

4) **2 puntos,** distribuídos en:
- 1 puntos pola integral
- 0,5 puntos pola condición f(0)=0.
- 0,5 puntos polos intervalos de concavidade e convexidade.

## CONVOCATORIA DE SETEMBRO

# OPCIÓN A

1) **a) 1 punto,** distribuído en:
   - 0,5 puntos pola definición de menor complementario
   - 0,5 puntos pola definición de adxunto dun elemento

   **b) 2 puntos,** distribuídos en:
   - **i.** 1 punto
   - **ii.** 1 punto

2) **a) 1 punto**
   **b) 1 punto**
   **c) 1 punto**

3) **a) 1 punto,** distribuído en:
   - 0,5 puntos pola condición de continuidade
   - 0,5 puntos pola condición de derivable

   **b) 1 punto**

4) **2 puntos,** distribuídos en:
   - 0,5 puntos pola representación da parábola
   - 0,5 puntos pola determinación das tanxentes.
   - 0,5 puntos pola formulación da área como unha integral definida.
   - 0,5 puntos polo cálculo da integral definida

# OPCIÓN B

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:
   - 1 punto polo cálculo dos rangos segundo os valores de m
   - 1 punto pola discusión do sistema

   **b) 1 punto**

2) **a) 1,5 puntos,** distribuídos en
   - 1 punto pola posición relativa das rectas.
   - 0,5 puntos polo cálculo da distancia entre as rectas.

   **b) 1,5 puntos,** distribuídos en
   - 1 punto polo cálculo dos dous vértices
   - 0,5 puntos polo cálculo da área do rectángulo

3) **a) 1 punto**, distribuído en:
   - 0,5 puntos pola definición de derivada dunha función nun punto.
   - 0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

   **b) 1 punto,** distribuído en:
   - 0,5 puntos polos intervalos de crecemento e decrecemento
   - 0,5 puntos pola determinación do máximo relativo.

4) **a) 1 punto**
   **b) 1 punto**

## CONVOCATORIA DE XUÑO

## OPCIÓN A

***Exercicio 1:***

**a)** $(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} a-2 & b \\ 0 & c-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-2 & b \\ 0 & c-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-2)^2 & b(a-2)+b(c-2) \\ 0 & (c-2)^2 \end{pmatrix}$

Polo tanto:

$$(A-2I)^2 = 0 \iff \begin{cases} (a-2)^2 = 0 \\ b(a-2)+b(c-2) = 0 \\ (c-2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a=2 \\ b\in\mathbb{R} \\ c=2 \end{matrix}}$$

**b)** Tendo en conta o apartado anterior, a matriz de coeficientes do sistema homoxéneo sería

$A = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

e polo tanto teriamos:
rang(A) = 2 = nº de incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado, solución única. Como a trivial sempre é solución dun sistema homoxéneo, concluimos que a solución é

$$\boxed{x=y=0}$$

**c)** Neste caso, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ademais, $\det(A) = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$A \cdot X = A^{-1} \cdot B \iff X = (A^{-1})^2 \cdot B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^{-1})^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -2 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

Polo tanto:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -2 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}}$$

**CONVOCATORIA DE XUÑO**

**OPCIÓN A**

***Exercicio 2:***

**a)** Como o plano $\pi$ e a recta $r$ deben se perpendiculares, o vector director da recta, $\vec{v}_r$, ten a dirección do vector normal ao plano. Así:

Vector normal ao plano $\pi$: $\vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (-2,-1,1)$

Podemos entón utilizar a ecuación dun plano a partir dun punto e dun vector normal:

$$-2(x-2) - (y-1) + (z-2) = 0$$

e polo tanto:

$$\boxed{\pi: 2x + y - z - 3 = 0}$$

Para calcular o punto de intersección de $r$ con $\pi$, substituimos as ecuacións paramétricas da recta na ecuación do plano:

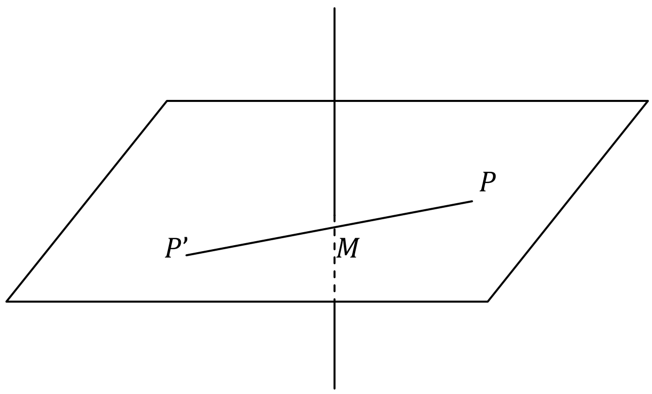
$$2(3-2\lambda) + 1 - \lambda - (4+\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow 6 - 4\lambda + 1 - \lambda - 4 - \lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Substituíndo este valor nas ecuacións paramétricas da recta , obtemos o punto de corte

$$\boxed{M(3,1,4)}$$

**b)** Dado que $P \in \pi$, $r$ é perpendicular a $\pi$ e $M$ é o punto de intersección de $r$ e $\pi$, a distancia pedida:

$$d(P,r) = d(P,M) = \sqrt{(2-3)^2 + (1-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{5}$$




**c)** Para obter as coordenadas do punto $P'(x,y,z)$, simétrico de $P$, basta ter en conta que $M$ é o punto medio do segmento que une $P$ con $P'$. Polo tanto:

$$\left.\begin{array}{r} 3 = \dfrac{x+2}{2} \\ 1 = \dfrac{y+1}{2} \\ 4 = \dfrac{z+2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P'(4,1,6)}$$

**CONVOCATORIA DE XUÑO**

**OPCIÓN A**

***Exercicio 3:***

$f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$ é unha función racional.

*Dominio:*
A función non está definida onde se anula o denominador. Polo tanto, o dominio é $\mathbb{R}-\{1\}$

*Simetrías:*

$f(-x) = \frac{2x^2}{-x-1} \neq \pm f(x)$ . Polo tanto *non é simétrica respecto do eixe $Y$ nin respecto da orixe*.

*Puntos de corte cos eixes:*

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Polo tanto o único punto de corte cos eixes é a orixe $\boxed{O(0,0)}$.

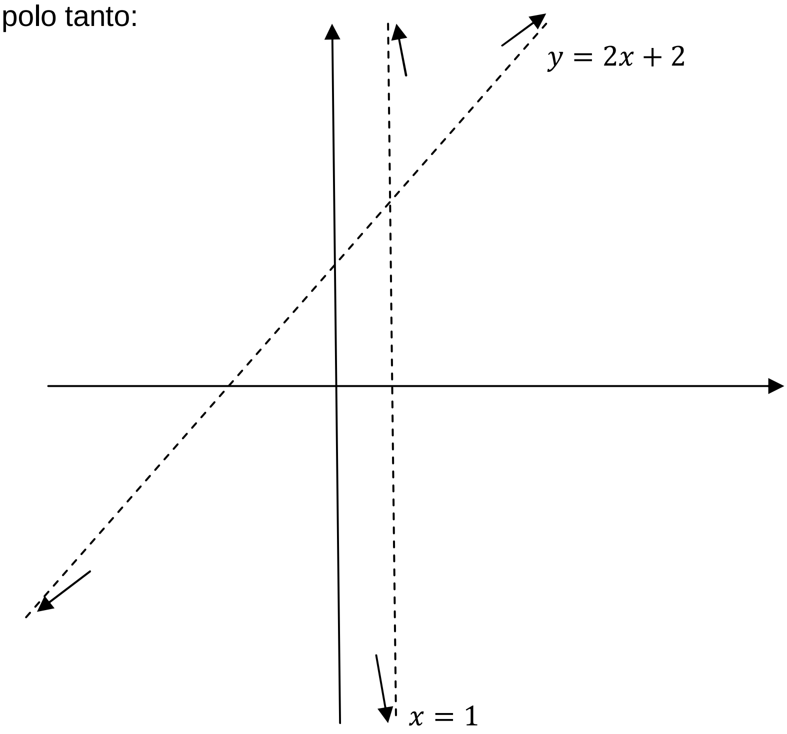
*Asíntotas verticais:* Hai unha en $\boxed{x = 1}$
Posición da curva respecto da asíntota:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

*Asíntota oblicua:*
Como $grao\ do\ numerador = 2 = grao\ do\ denominador\ +\ 1$, hai asíntota oblicua.

$$\frac{2x^2}{x-1} = 2x + 2 + \frac{2}{x-1}$$

Polo tanto $\boxed{y = 2x + 2}$ é a asíntota oblicua. Ademais:
O signo da diferenza, $\frac{2}{x-1}$ , é positivo cando $x \to +\infty$ e negativo cando $x \to -\infty$
Temos polo tanto:




*Intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos:*

$$f'(x) = \frac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$$

**CONVOCATORIA DE XUÑO**

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$$

| | $(-\infty, 0)$ | $(0,1)$ | $(1,2)$ | $(2, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

A función é crecente en $(-\infty, 0)$ e en $(2, \infty)$ e decrecente en $(0,1)$ e en (1,2)
Máximo relativo en (0,0) e mínimo relativo en (2,8).

*Intervalos de concavidade e convexidade e puntos de inflexión:*

$$f''(x) = \frac{(4x-4)(x-1)^2 - 2(x-1)(2x^2-4x)}{(x-1)^4} = \frac{4(x-1)^2 - 4x^2 + 8x}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3} \neq 0$$

$$\boxed{Non\ ten\ puntos\ de\ inflexión}$$

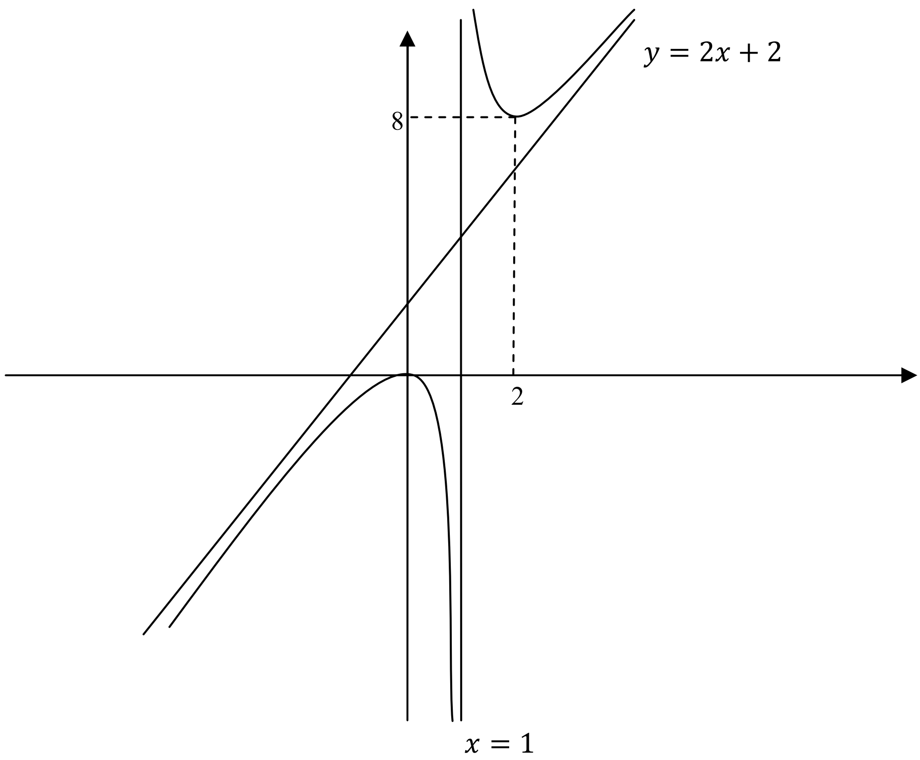
$$f''(0) < 0 \ \Rightarrow \ \boxed{máximo\ relativo\ en\ (0,0)}$$

$$f''(2) > 0 \ \Rightarrow \ \boxed{mínimo\ relativo\ en\ (2,8)}$$

| | $(-\infty, 1)$ | $(1, \infty)$ |
|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\frown$ | $\smile$ |

$$\boxed{\begin{array}{l} Cóncava\ en\ (-\infty, 1) \\ Convexa\ en\ (1, \infty) \end{array}}$$

*Gráfica de* $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$



**CONVOCATORIA DE XUÑO**

**OPCIÓN A**

***Exercicio 4:***

**a)** Dise que $F(x)$ é unha *primitiva* de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$.

*Regra de Barrow*: Se $f(x)$ é continua en $[a, b]$ e $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$, entón

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**b)** $f(x) = ax^3 + bx + c$

$y = 2x + 1$ recta tanxente á gráfica de $f(x) \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = 2 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} b = 2 \\ c = 1 \end{matrix}}$

$f(x) = ax^3 + bx + c$
$f'(x) = 3ax^2 + b$

Finalmente:0

$$1 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ax^3 + 2x + 1)dx = \left[\frac{a}{4}x^4 + x^2 + x\right]_0^1 = \frac{a}{4} + 1 + 1$$

Polo tanto:

$$\frac{a}{4} + 2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = -4}$$

**CONVOCATORIA DE XUÑO**

**OPCIÓN B**

***Exercicio 1:***

**a)**

columnas iguais

Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 3 & m \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & 3 & m \\ 2 & 3 & m & 3 \end{pmatrix}$

Como a cuarta columna da matriz ampliada coincide coa segunda columna, podemos prescindir da cuarta columna para o cálculo do rango de $A$ e polo tanto $rang(C) = rang(A)$.

Cálculo do rango de $C$:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow rang(C) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 3 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 6; \quad m^2 + m - 6 = 0 \quad \Rightarrow m \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$

<u>Discusión:</u>

$m = -3,\ rang(C) = rang(A) = 2 < 3 = nº\ de\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ indeterminado.$
$m = 2,\quad rang(C) = rang(A) = 2 < 3 = nº\ de\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ indeterminado.$
$m \notin \{-3,2\},\quad rang(C) = rang(A) = 3 = nº\ de\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ determinado.$

**b)** Para $\boxed{m = 2}$ , é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left.\begin{matrix} x + y = 1 + z \\ 2x + 3y = 3 - 2z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x + 3y = 3 + 3z \\ 2x + 3y = 3 - 2z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 5z \\ y = 1 - 4z \end{cases}$$

As infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{matrix} x = 5\lambda \\ y = 1 - 4\lambda; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{matrix}}$$

**CONVOCATORIA DE XUÑO**

**OPCIÓN B**

***Exercicio 2:***

**a)** Punto de $r$: $P_r(3,-1,4)$
vector dirección de $r$: $\vec{v}_r = (1,0,2)$
Punto de $s$: $P_s(4,3,5)$
vector dirección de $s$: $\vec{v}_s = (3,-1,4)$

Non son proporcionais. As rectas córtanse ou crúzanse

Se os vectores $\vec{v}_r = (1,0,2)$ e $\vec{v}_s = (3,-1,4)$, que marcan as direccións das rectas, e o vector $\overrightarrow{P_rP_s} = (1,4,1)$ son independentes daquela non están no mesmo plano e as rectas polo tanto cruzaranse. Isto saberémolo vendo se o determinante da matriz formada coas coordenadas deses tres vectores é cero ou non:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 24 + 2 - 16 = 9 \neq 0$$

Polo tanto:

$$\boxed{As\ rectas\ crúzanse}$$

O plano pedido, $\pi$, queda determinado polo punto $(0,0,0)$ do plano e os dous vectores $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ paralelos ao plano e independentes entre si:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\pi: 2x + 2y - z = 0}$$

**b)** $\left.\begin{array}{l} \text{Punto xenérico de } r\text{: } R(3+\lambda, -1, 4+2\lambda) \\ \\ \text{Punto xenérico de } s\text{: } S(4+3\mu, 3-\mu, 5+4\mu) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{RS} = (1+3\mu-\lambda, 4-\mu, 1+4\mu-2\lambda)$

Agora impoñemos a condición de que $\overrightarrow{RS}$ sexa perpendicular a $r$ e a $s$:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \perp r \Rightarrow (1+3\mu-\lambda, 4-\mu, 1+4\mu-2\lambda)\cdot(1,0,2) = 0 \\ \overrightarrow{RS} \perp s \Rightarrow (1+3\mu-\lambda, 4-\mu, 1+4\mu-2\lambda)\cdot(3,-1,4) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 5\lambda - 11\mu = 3 \\ 11\lambda - 26\mu = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = 5 \\ \mu = 2 \end{array}\right.$$

Substituíndo $\lambda = 5$ e $\mu = 2$, obtemos:

$$R(8, -1, 14); \quad S(10, 1, 13); \quad \overrightarrow{RS} = (2, 2, -1)$$

Polo tanto, as ecuacións paramétricas da recta que corta perpendicularmente a $r$ e a $s$ son:

$$\boxed{t: \left\{\begin{array}{l} x = 8 + 2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 14 - \lambda \end{array}\right.}$$

**CONVOCATORIA DE XUÑO**

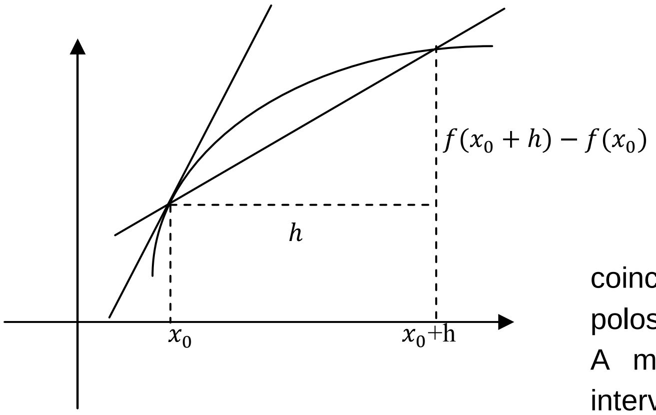
**OPCIÓN B**

***Exercicio 3:***

**a)** Dise que $f(x)$ é derivable no punto $x_0$, se existe e é finito o seguinte límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

represéntase por $f'(x_0)$ e chámase derivada de $f(x)$ en $x_0$.




*Interpretación xeométrica*: O cociente

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

coincide coa pendente da recta secante que pasa polos puntos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0+h, f(x_0+h))$. A medida que vai diminuindo a amplitude do intervalo $[x_0, x_0+h]$, os puntos de corte determinados polas distintas secantes fanse máis e máis próximos. No límite, a secante convírtese na tanxente.

Así, a derivada de $f(x)$, en $x = x_0$, coincide coa pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(x_0, f(x_{0)}))$:

$f'(x_0) = lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$ Pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$, en $x = x_0$.

**b)** Para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 0$, ten que ser continua en $x = 0$.

Se $f(x)$ é continua en $x = 0$, debe ser $lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$$\left.\begin{array}{l} lim_{x\to 0^-} f(x) = lim_{x\to 0^-} ln(e+x^2) = 1 \\ lim_{x\to 0^+} f(x) = lim_{x\to 0^+}(x^2+bx+c) = c \\ f(0) = c \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

Se $c = 1$, $f(x)$ será derivable en $x = 0$ se $f'(0^-) = f'(0^+)$

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{2x}{e+x^2} & se \quad x < 0 \\ 2x + b & se \quad x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = b \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

**CONVOCATORIA DE XUÑO**

**OPCIÓN B**

***Exercicio 4:***

$f(x)$ é unha primitiva de $f'(x) = (2-x)e^{3x}$ pasando polo punto $(0,0)$

$$\int (2-x)e^{3x}dx = \frac{1}{3}(2-x)e^{3x} + \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}(2-x)e^{3x} + \frac{1}{9}e^{3x} + C = e^{3x}\left(\frac{7}{9} - \frac{x}{3}\right) + C$$

$$\left\{ Por\ partes: \quad \begin{matrix} u = 2-x & \Rightarrow & du = dx \\ dv = e^{3x}dx & \Rightarrow & v = \frac{e^{3x}}{3} \end{matrix} \right\}$$

$$f(0) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = \frac{7}{9} + C \;\Rightarrow\; C = -\frac{7}{9}$$

Polo tanto

$$\boxed{f(x) = e^{3x}\left(\frac{7}{9} - \frac{x}{3}\right) - \frac{7}{9}}$$

Para estudar a concavidade e convexidade de $f(x)$, estudamos o signo de $f''(x)$

$$f''(x) = -e^{3x} + 3(2-x)e^{3x} = e^{3x}(5-3x)$$

Como $e^{3x} > 0$, temos que

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5/3$$

Polo tanto

| | $(-\infty, 5/3)$ | $(5/3, \infty)$ |
|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\smile$ | $\frown$ |

*Convexa en* $(-\infty, 5/3)$
*Cóncava en* $(5/3, \infty)$

**CONVOCATORIA DE SETEMBRO**

**OPCIÓN A**

***Exercicio 1:***

**a)** Dado un elemento $a_{ij}$ dunha matriz cadrada $n \times n$, ao suprimir a súa fila e a súa columna, obtense unha submatriz $(n-1) \times (n-1)$ e o seu determinante é un menor de orde $n-1$, que se chama menor complementario do elemento $a_{ij}$ e represéntase por $\alpha_{ij}$.

Chámase adxunto de $a_{ij}$ ao número $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$, é dicir, é o menor complementario co seu signo ou co signo contrario, segundo $i+j$ sexa par ou impar.

**b)**

i) $$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + \cancel{1} - \cancel{1} - (1-\lambda) - \cancel{(1-\lambda)} + \cancel{(1-\lambda)} =$$
$$= (1-\lambda)[\cancel{1} + \lambda^2 - 2\lambda - \cancel{1}] = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2)$$

Se $\lambda = 0$:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Se $\lambda = 1$:
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Se $\lambda = 2$:
$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Polo tanto:
$$\boxed{Para\ \lambda \neq 0, \lambda \neq 1, \lambda \neq 2, rang(A-\lambda I) = 3}$$
$$\boxed{Para\ \lambda = 0, rang(A-\lambda I) = 2}$$
$$\boxed{Para\ \lambda = 1, rang(A-\lambda I) = 2}$$
$$\boxed{Para\ \lambda = 2, rang(A-\lambda I) = 2}$$

ii) $XA - 2A = 3X \Leftrightarrow X(A-3I) = 2A \Leftrightarrow X = 2A(A-3I)^{-1}$

Polo apartado i., sabemos que existe $(A-3I)^{-1}$

$$|A-3I| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6;$$

$$(A-3I)^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 9 & 3 & 9 \\ 9 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}}$$

**CONVOCATORIA DE SETEMBRO**

**OPCIÓN A**

***Exercicio 2:***

***a)*** vector dirección de $r$: $\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (5,10,5) \parallel (1,2,1)$

Elementos que determinan o plano: $\begin{cases} A(0,1,2) \\ \vec{v}_r = (1,2,1) \\ \overrightarrow{AB} = (5,2,-1) \end{cases}$

Se chamamos $\pi$ ao plano buscado,

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff -4x + 6(y-1) - 8(z-2) = 0$$

$$\boxed{\pi: 2x - 3y + 4z - 5 = 0}$$

**b)** Sexa $\alpha$ o plano perpendicular a $r$ e que pasa polo punto $B(5,3,1)$. Entón

vector normal a $\alpha$: $\vec{n}_\alpha = \vec{v}_r = (1,2,1)$

$$\alpha: (x-5) + 2(y-3) + (z-1) = 0 \Rightarrow \alpha: x + 2y + z - 12 = 0$$

Para calcular o punto de corte de $\alpha$ e $r$, escribimos as ecuacións paramétricas da recta (coñecemos $\vec{v}_r = (1,2,1)$ e evidentemente $(0,0,0) \in r$):

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Para obter o punto de corte da recta e o plano, substituímos as coordenadas do punto xenérico da recta na ecuación do plano:

$$\lambda + 4\lambda + \lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

Polo tanto a recta corta ao plano no punto correspondente ao valor do parámetro $\lambda = 2$:

$$\boxed{P(2,4,2)}$$

**c)** Se chamamos $\beta$ ao plano buscado,

$$\left.\begin{array}{r} \beta \parallel \pi \\ \pi: 2x - 3y + 4z - 5 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta: 2x - 3y + 4z + D = 0$$

Ademais,

$$\left.\begin{array}{r} \beta \parallel r \\ (0,0,0) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow d(r,\beta) = d\big((0,0,0),\beta\big) = \frac{|D|}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{|D|}{\sqrt{29}}$$

Polo tanto:

$$\frac{|D|}{\sqrt{29}} = \sqrt{29} \Rightarrow D = \pm 29$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \beta: 2x - 3y + 4z + 29 = 0 \\ ou \\ \beta: 2x - 3y + 4z - 29 = 0 \end{array}}$$

**CONVOCATORIA DE SETEMBRO**

**OPCIÓN A**

***Exercicio 3:***

**a)** Para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 1$, ten que ser continua en $x = 1$.

Se $f(x)$ é continua en $x = 1$, debe ser $lim_{x\to 1} f(x) = f(0)$

$$\left.\begin{array}{l} lim_{x\to 1^-} f(x) = lim_{x\to 1^-}(ax^2 + b) = a + b \\ lim_{x\to 1^+} f(x) = lim_{x\to 1^+} \frac{2lnx+2}{x^2} = 2 \\ f(1) = a + b \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = 2$$

Se $a + b = 2$, $f(x)$ será derivable en $x = 1$ se $f'(1^-) = f'(1^+)$

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} 2ax + b & se \quad x < 1 \\ \frac{2x-2x(2lnx+2)}{x^4} & se \quad x > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(1^-) = 2a + b \\ f'(1^+) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2a + b = -2$$

Polo tanto, $f(x)$ será derivable en $x = 1$, se:

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 2 \\ 2a + b = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = -4 \\ b = 6 \end{array}}$$

**b)** Para $a = -4$ e $b = 6$

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} -8x + 6 & se \quad x \le 1 \\ \frac{2x-2x(2lnx+2)}{x^4} & se \quad x > 1 \end{array}\right.$$

$-8x + 6 = 0 \iff x = 3/4$

$2x - 2x(2lnx + 2) = 0 \iff 2x(1 - 2lnx - 2) = 0$ → $x = 0 < 1$ ; → $2lnx = -1 \iff x = e^{-1/2} < 1$

Polo tanto, o único valor que anula a primeira derivada é $x = 3/4$.

| | $(-\infty, 3/4)$ | $(3/4, 1)$ | $(1, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ | ↘ |

$$\boxed{\begin{array}{l} Crecente\ en\ (-\infty, 3/4) \\ Decrecente\ en\ (3/4, \infty) \end{array}}$$

**CONVOCATORIA DE SETEMBRO**

**OPCIÓN A**

***Exercicio 4:***

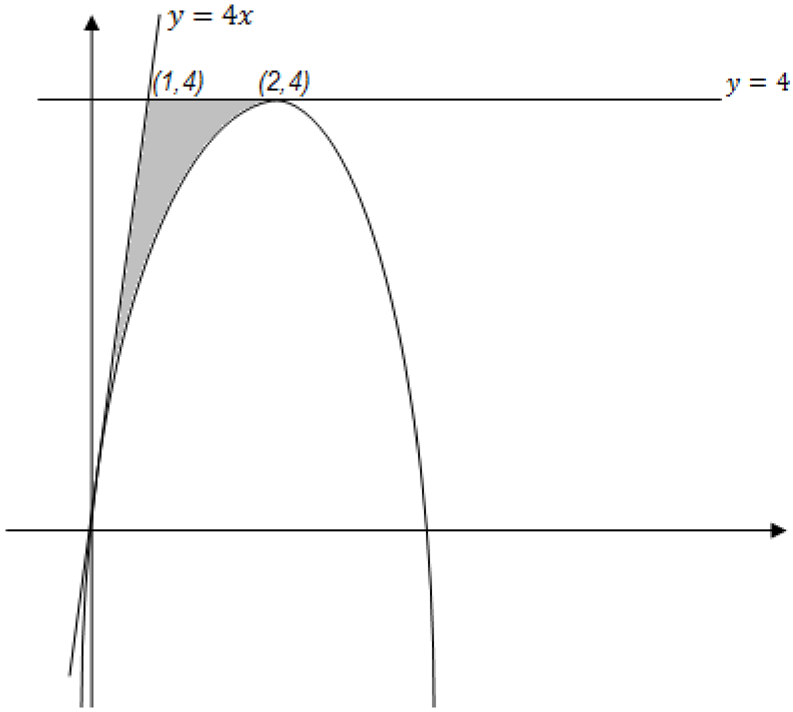
$f(x) = 4x - x^2 = x(4-x)$

Puntos de corte cos eixes: $(0,0), (4,0)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 4-2x \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ f''(x) = -2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Cóncava. Vértice: } (2,4)$$

Recta tanxente en $(0,0)$: $y = 4x$

Recta tanxente en $(2,4)$: $y = 4$




$$A = \int_0^1 [\cancel{4x} - (\cancel{4x} - x^2)]\,dx + \int_1^2 [4 - (4x - x^2)]\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3} + \cancel{8} - \cancel{8} + \frac{8}{3} - 4 + 2 = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{A = \frac{2}{3}\,u^2}$$

**CONVOCATORIA DE SETEMBRO**

**OPCIÓN B**

***Exercicio 1:***

**a)**

Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de $C$:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow rang(C) \geq 2 \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2+1+3-2 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad rang(C) = 2$$

Cálculo do rango de $A$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4m \;\Rightarrow\quad rang(A) = 2 \; se\; m = 0; \quad rang(A) = 3, se\; m \neq 0$$

<u>Discusión:</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} m = 0,\;\; rang(C) = rang(A) = 2 < 3 = nº\; de\; incógnitas.\; Sistema\; compatible\; indeterminado. \\ m \neq 0, \qquad rang(C) = 2 \;\neq 3 = rang(A).\; Sistema\; incompatible. \end{array}}$$

**b)** Para $\boxed{m = 0}$ , é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + y = -z \\ x - y = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} z \\ y = -\dfrac{1}{2} z \end{cases}$$

As infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2}\lambda \\ y = -\dfrac{1}{2}\lambda; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

**CONVOCATORIA DE SETEMBRO**

**OPCIÓN B**

***Exercicio 2:***

**a)** Determinamos un vector director e un punto de cada unha das rectas:

$P_r(0,1,1);\qquad \vec{v}_r = (0,3,3)$

$$P_s(-4,2,0);\qquad \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,1,1)$$

Coordenadas proporcionais. Polo tanto, as rectas son paralelas ou coincidentes

$P_r(0,1,1) \in r,\ P_r(0,1,1) \notin s$

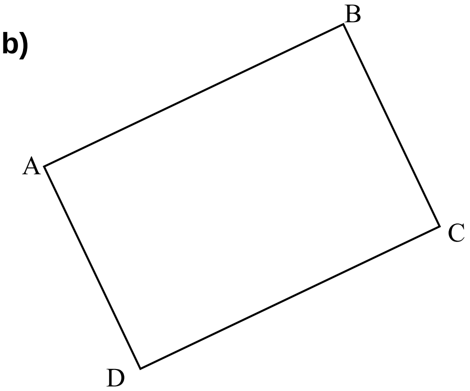
$\boxed{As\ rectas\ son\ paralelas\ non\ coincidentes}$

Como as rectas son paralelas, a distancia entre elas pode calcularse como a distancia dun punto dunha delas á outra:

$$d(r,s) = d(P_r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\sqrt{4+16+16}}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \boxed{3\sqrt{2}}$$

$$\left\{\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \overrightarrow{k} \\ -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,4,-4)\right\}$$

**b)**




Evidentemente $A, B \in r$. Polo tanto, $C, D \in s$. Tendo en conta que $P_s(-4,2,0)$ e $\vec{v}_s = 0,1,1)$, un punto xenérico de $s$ será da forma $(-4, 2+\lambda, \lambda)$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow (0,3,3)\cdot(-4,\lambda-2,\lambda-4) = 0 \Rightarrow 3\lambda - 6 + 3\lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow \boxed{C(-4,5,3)}$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow (0,3,3)\cdot(-4,\lambda+1,\lambda-1) = 0 \Rightarrow 3\lambda + 3 + 3\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{D(-4,2,0)}$$

A área do rectángulo podemos calculala como:

$$A = d(r,s)\cdot d(A,B) = d(r,s)\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{(4-1)^2+(4-1)^2} = 18$$

Ou ben

$$A = d(A,B)\cdot d(A,D) = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(4-1)^2+(4-1)^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+(2-1)^2+(-1)^2} = 18$$

Polo tanto:

$$\boxed{A = 18\,u^2}$$

**CONVOCATORIA DE SETEMBRO**

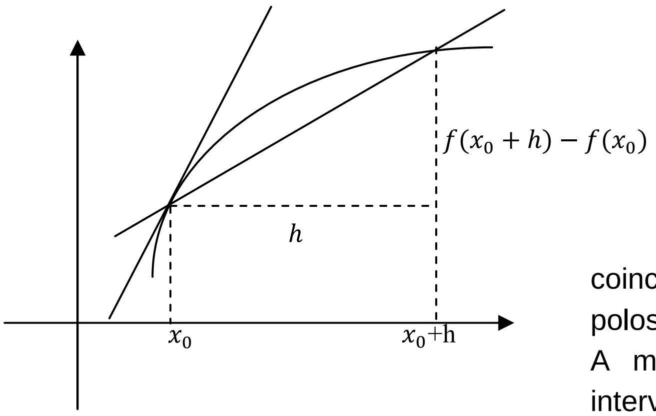
**OPCIÓN B**

***Exercicio 3:***

**a)** Dise que $f(x)$ é derivable no punto $x_0$, se existe e é finito o seguinte límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

represéntase por $f'(x_0)$ e chámase derivada de $f(x)$ en $x_0$.




*Interpretación xeométrica*: O cociente

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

coincide coa pendente da recta secante que pasa polos puntos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0+h, f(x_0+h))$. A medida que vai diminuindo a amplitude do intervalo $[x_0, x_0+h]$, os puntos de corte determinados polas distintas secantes fanse máis e máis próximos. No límite, a secante convírtese na tanxente.

Así, a derivada de $f(x)$, en $x = x_0$, coincide coa pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(x_0, f\big(x_{0)}\big)$:

$$f'(x_0) = lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \text{ Pendente da recta tanxente á gráfica de } f(x), \text{ en } x = x_0.$$

**b)** $f'(x) = -2e^{-x}(x+1) + 2e^{-x} = -2xe^{-x}$

$$\left.\begin{aligned} &f'(x) = 0 \iff x = 0 \\ &f''(x) = -2e^{-x} + 2xe^{-x} = 2e^{-x}(x-1) \\ &f''(0) = -2 < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{Máximo\ relativo: (0,2)}$$

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, \infty)$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ |

$$\boxed{\begin{array}{l} Crecente\ en\ (-\infty, 0) \\ Decrecente\ en\ (0, \infty) \end{array}}$$

**CONVOCATORIA DE SETEMBRO**

**OPCIÓN B**

***Exercicio 4:***

**a)** Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2 - \frac{x}{4}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}} - \frac{1}{4}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{4(4+x)\sqrt{4+x}}}{2} = \boxed{-\frac{1}{64}}$$

**b)** Buscamos unha función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ e ademais $F(\pi) = 0$

$$\int xsenxdx = -xcosx + \int cosx\, dx = -xcox + senx + C$$

$$\left\{ Por\ partes: \begin{array}{c} u = x \;\Rightarrow\; du = dx \\ dv = senxdx \;\Rightarrow\; v = -cosx \end{array} \right\}$$

$$0 = F(\pi) = \pi + C \;\Rightarrow\; C = -\pi$$

Polo tanto

$$\boxed{f(x) = -xcox + senx - \pi}$$