

TEMA 1. LÍMITES DE FUNCIONES E CONTINUIDADE

1.1 REPASO FUNCIONES ELEMENTAIS

1.2 LÍMITES

1.3 CONTINUIDADE. TEOREMA DE BOLZANO

1.1 REPASO FUNCIONES ELEMENTAIS

INTRODUCCIÓN

Na vida cotiá hai moitas situacións nas que se dá unha relación ou interdependencia entre dúas magnitudes: o consumo dun coche depende da súa velocidade, factura do teléfono depende do tempo, prezo de froita depende do número de quilos, etc.

Para intentar precisar estas situacións aparece o concepto matemático de función que, podería definirse como unha relación entre dúas magnitudes, onde a cada valor da primeira magnitude lle corresponde un único valor da segunda.

FUNCIÓN

Definición: Unha función real de variable real é toda correspondencia ou relación que asocia a cada número real x dun determinado conxunto outro número real y único.

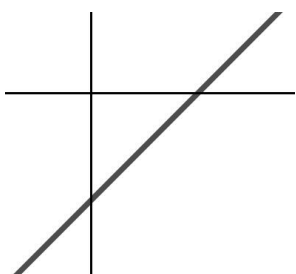
$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, é unha función, se a cada número real, $x \in D$, lle fai corresponder outro número real *único*, $f(x)$.

$$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

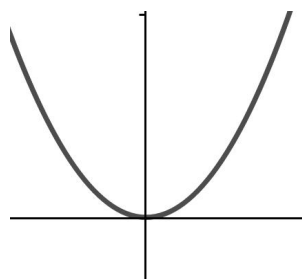
$$x \in D \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

Exemplos de funcións:

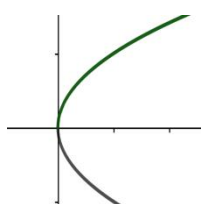
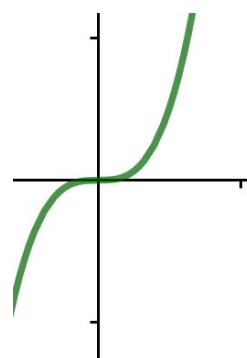
$$y = x - 1$$



$$y = x^2$$



$$y = x^3$$



Non é unha función, porque a cada valor positivo de x lle corresponden dous valores de y

FUNCIÓNS ELEMENTAIS: POLINÓMICAS, RACIONAIS, EXPONENCIAIS, LOGARITMICAS E TRIGONOMÉTRICAS

POLINÓMICAS: son as que están dadas por un polinomio:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

O dominio das funcións polinómicas é todo $\mathbb{R}$.

Exemplos:

$$f(x) = x^4 - 4x + 5 \quad \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + x \quad \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

As funcións polinómicas máis importantes son:

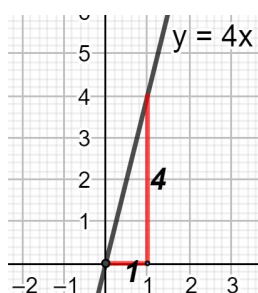
Funcións lineais:

As funcións lineais veñen dadas pola fórmula $y = m x$, tamén chamadas de “Proporcionalidade directa”.

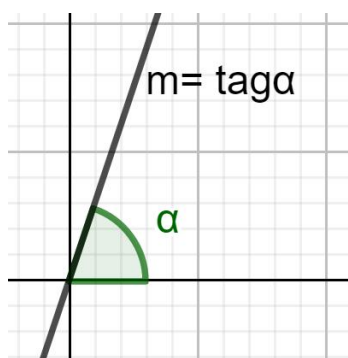
A súa representación gráfica é unha recta que pasa pola orixe de coordenadas.

O coeficiente m chámase pendente da recta e mide a súa inclinación: se é positiva a recta crece e se é negativo a recta decrece; ese crecemento ou decrecemento é máis rápido canto maior sexa o valor absoluto de m .

A pendente indica a variación da y por cada unidade que aumente a x .



E ademais, m coincide coa tanxente trigonométrica do ángulo que forma a dirección positiva do eixe OX coa recta medido en sentido positivo, $m = \tan \alpha$.



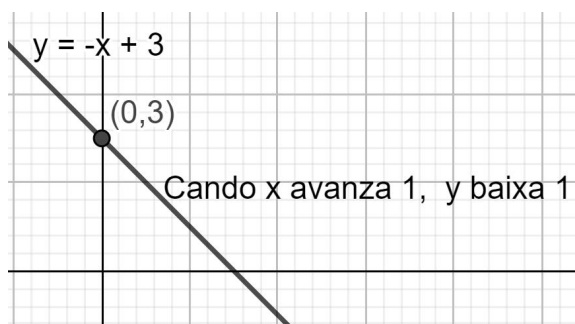
Funcións afíns:

As funcións afíns veñen dadas pola fórmula $y = mx + n$

A súa representación gráfica é unha recta que non pasa pola orixe de coordenadas

O coeficiente m é a pendente. O coeficiente n é a ordenada na orixe, é dicir, a recta pasa polo punto $(0, n)$

Exemplo: $y = -x + 3$, $m = -1$, pasa polo punto $(0, 3)$



Funcións cuadráticas:

As funcións cuadráticas son as que veñen dadas por un polinomio de 2º grao:

$$y = ax^2 + bx + c$$

A súa gráfica é unha parábola. Se " a " é maior que cero a parábola é convexa, se " a " é menor que cero a parábola é cóncava.

A parábola é simétrica respecto á recta $x = \frac{-b}{2a}$

O seu vértice é o punto de coordenadas: $v = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right)$

No vértice a parábola ten un mínimo se é convexa, e un máximo se é cóncava.

Exercicio:

1. Representar as seguintes funcións polinómicas:

a) $y = x^2 - 1$

b) $y = x^2 - 4x + 6$

c) $y = x^2 - 6x + 5$

d) $y = x^2 + 4x + 3$

Indicar o dominio, límites e percorrido

RACIONAIS: son as que están dadas por un cociente de polinomios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

O seu dominio son todos os números reais excepto os puntos que anulan o denominador, $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$.

As funcións racionais máis importantes son:

Proporcionalidade inversa:

En algunhas situacións a relación entre dúas variables é tal que cando unha se duplica a outra se reduce á metade, etc. Estas situacións chámanse de proporcionalidade inversa. Exemplos: a duración dunha viaxe en relación coa velocidade.

A función correspondente chámase función de proporcionalidade inversa e a súa fórmula é

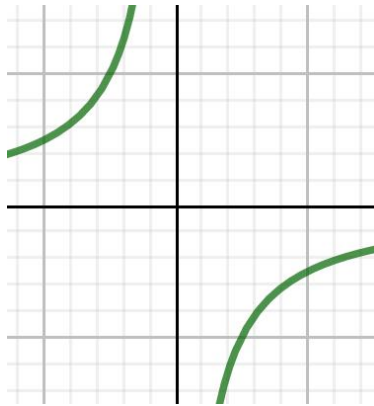
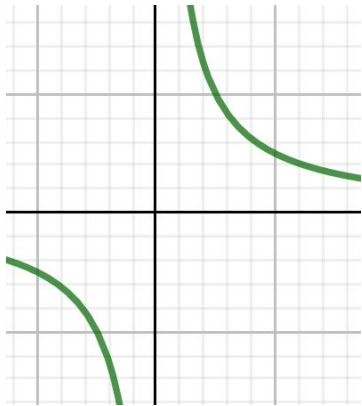
$$y = \frac{k}{x}, \text{ sendo } k > 0$$

Estas funcións non están definidas para $x=0$. Son decrecentes (se $k>0$), porque ao aumentar x diminúe y . Simétrica respecto a orixe, os eixes de coordenadas son asíntotas.

A gráfica correspondente chámase hipérbola e ten dúas ramas, unha no primeiro cuadrante e outra no terceiro.

Exemplos: $y = \frac{2}{x}$

$y = -\frac{2}{x}$



Exercicio:

2. Indicar o dominio das seguintes funcións:

a) $y = \frac{3}{x^2}$

b) $y = \frac{4}{x^2 + 1}$

c) $y = \frac{5}{x^3 - 1}$

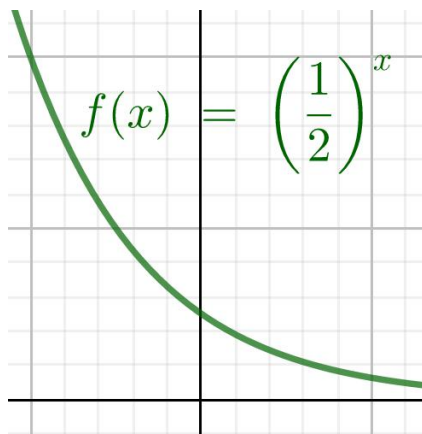
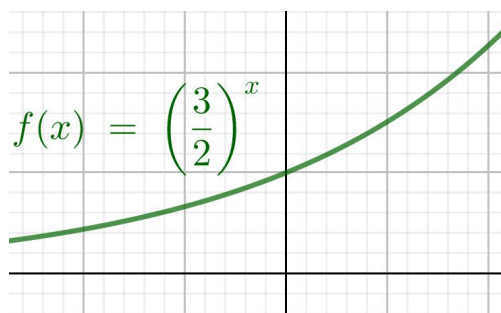
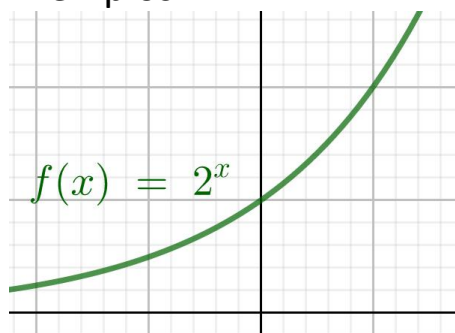
d) $y = \frac{6}{x^3 + 1}$

EXPONENCIAIS: Son as que veñan dadas pola fórmula:

$$y = a^x \quad (\text{sendo } a > 0)$$

O seu dominio é todo $\mathbb{R}$, crece ou decrece segundo “a” sexa maior ou menor que 1. Pasan sempre polo punto (0, 1).

Exemplos:



Como exemplos de situacións cun comportamento exponencial podemos destacar: Interese composto, número de resultados posibles ao tirar n moedas, crecemento dunha poboación,....

FUNCIÓN LOGARÍTMICAS: Son as que veñan dadas pola fórmula:

$$y = \log_a(P(x)) \quad (\text{sendo } a > 0, a \neq 1)$$

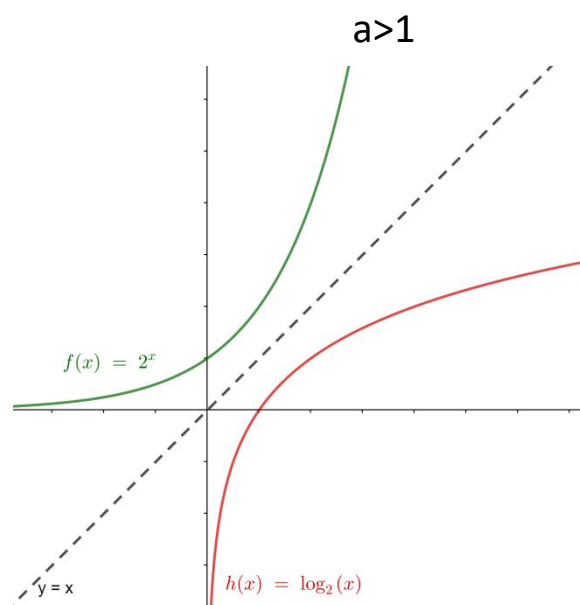
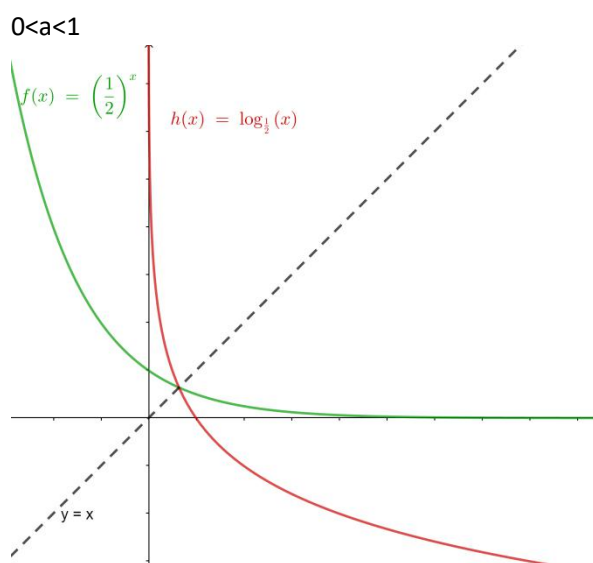
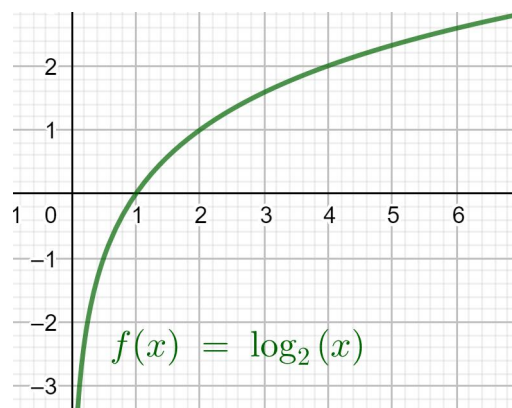
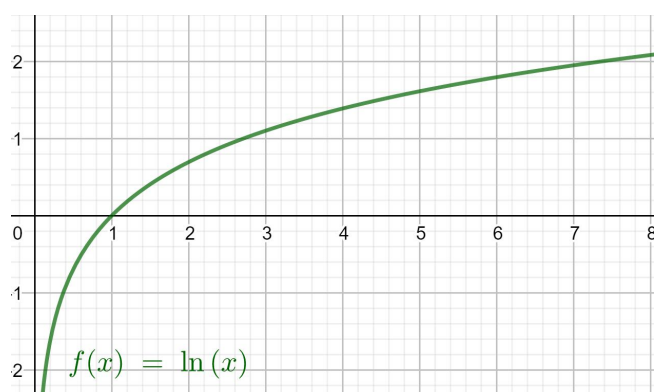
O seu dominio é $Dom(y) = \{x / P(x) > 0\}$

Son as funcións inversas das exponenciais, polo tanto son simétricas respecto a bisectriz do primeiro cuadrante.

Pasan sempre polo punto (1,0).

Son crecentes se $a > 1$ e decrecen se $a < 1$.

Exemplos:



Como exemplos de situacións cun comportamento logarítmico podemos destacar: intensidade do son, a escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos.

Exercicio:

3. Indicar o dominio das seguintes funcións:

a) $y = \log x^2$

b) $y = \log(x^2 - 1)$

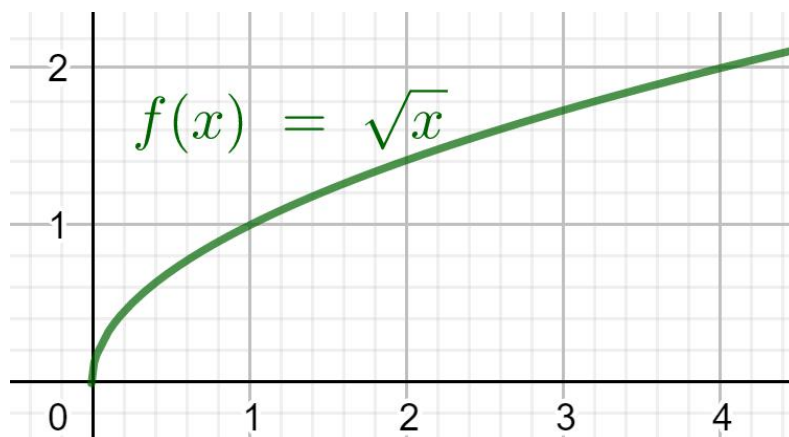
c) $y = \log(x^2 + 1)$

d) $y = \log\left(\frac{1}{x}\right)$

FUNCIÓNS CON RADICAIS (IRRACIONAIS): Son as que veñen dadas pola fórmula

$$y = \sqrt[n]{P(x)} \begin{cases} \text{se } n \text{ é par, } \text{Dom}(y) = \{x/P(x) \geq 0\} \\ \text{se } n \text{ é impar, } \text{Dom}(y) = \text{Dom}(P(x)) \end{cases}$$

Exemplo:



Exercicio:

4. Indicar o dominio das seguintes funcións:

a) $y = \sqrt{x}$

b) $y = \sqrt{x-2}$

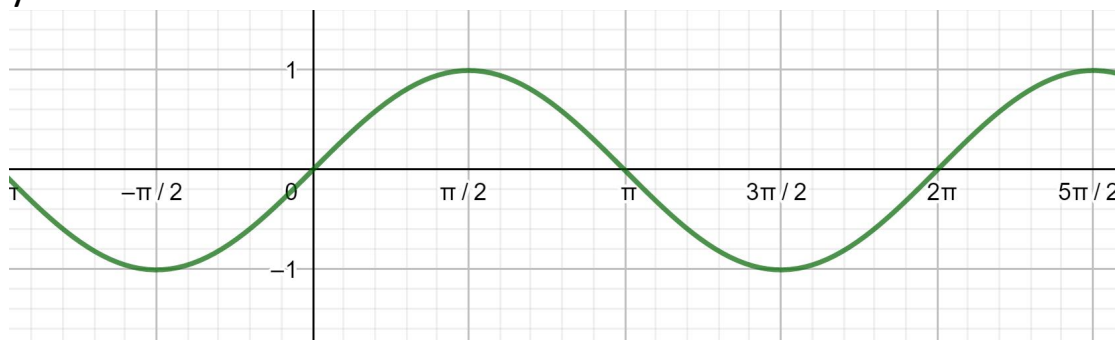
c) $y = \sqrt[3]{x}$

d) $y = \sqrt{\frac{1}{x}}$

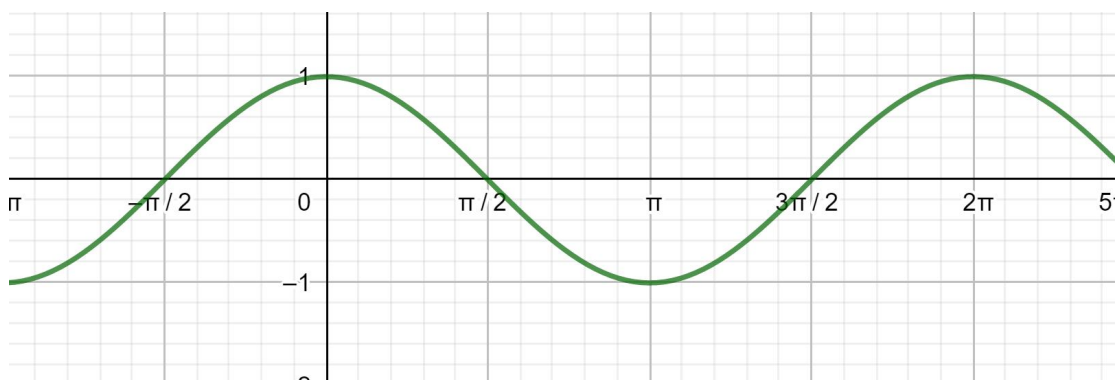
e) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

FUNCIÓNS TRIGONOMÉTRICAS

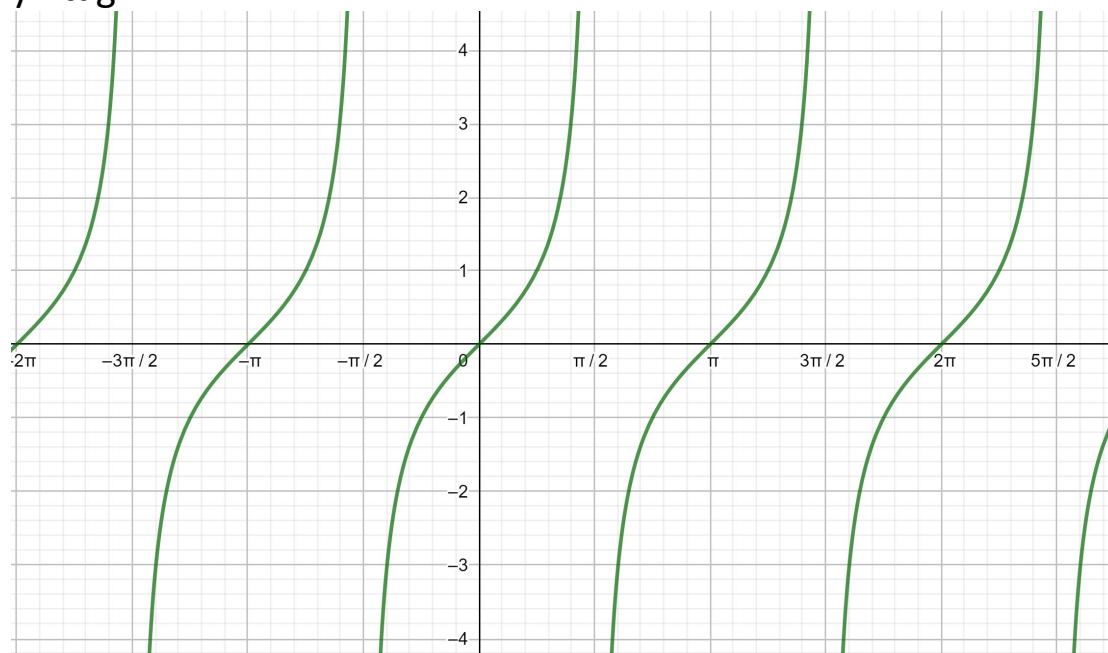
$y = \sin x$



$y = \cos x$



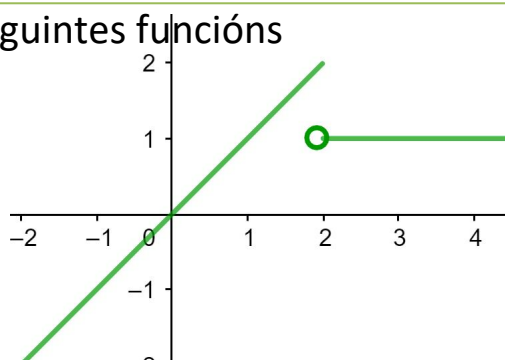
$y = \tan x$



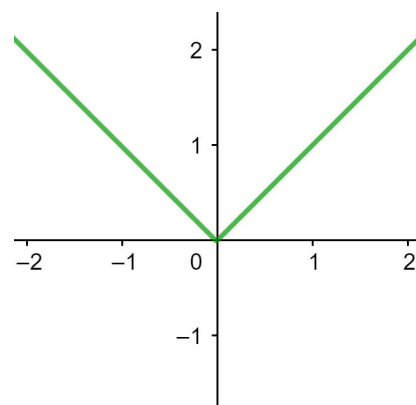
FUNCIÓN DEFINIDAS A TROZOS

Exemplo: Representar as seguintes funções

$$1. f(x) = \begin{cases} x & , x \leq 2 \\ 1 & , x > 2 \end{cases}$$



$$2. y = |x| = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$$



Ejercicio:

5. Representar as seguintes funções a trozos:

$$a) y = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & , x \leq 0 \\ 1 & , 0 < x < 4 \\ x - 3 & , x \geq 4 \end{cases} \quad b) y = \begin{cases} x + 2 & , x < 1 \\ 3(x - 2)^2 & , x \geq 1 \end{cases}$$

$$c) y = |4 - x| \quad d) y = |x^2 - 4x|$$