

Ej 1) $f(x) = (x-a)e^x$

a) f es el producto de una func. polinómica, $(x-a)$ y una exponencial, e^x , ambas continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$, independientemente del valor de a (*)

$$f'(x) = e^x + (x-a)e^x$$

en $x=0$, f tiene pto crítico $\Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow e^0 + (0-a)e^0 = 0$

$$1-a=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

b) para $a=1$ estudio completo de la función $f(x) = (x-1)e^x$

1) Dom $f = \mathbb{R}$, f cont. y derivable en $\mathbb{R}$ (visto en @)

2) Ptos corte con los ejes: Eje $y \rightarrow x=0 \Rightarrow -ae^0 = -a = \boxed{-1}$

Eje $x \rightarrow y=0 \Rightarrow (x-1)e^x = 0$

como $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$; pto $(1,0)$

3) Asintotas:

A.V $\rightarrow$ no tiene (no hay pto de no dominio)

A.H $\rightarrow$ límit $(x-1)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$ no hay A.H en $+\infty$
hay una rama ∞
o parabólica

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x-1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x+1}{e^x} = -\frac{\infty}{\infty}$$

como $x+1$ cont. y deriv. en $\mathbb{R}$
 e^x " " " " " " " $\Rightarrow$ estamos en condiciones de
IND $\frac{\infty}{\infty}$

aplicar d'Hospital: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$

$\Rightarrow y=0$ (Eje x) es A.H cuando $x \rightarrow -\infty$

A.O. $\rightarrow$ No procede, ya hemos visto que en $-\infty$ tiene una A.H.

$$\text{para } x \rightarrow \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)e^x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

L'Hopital
(estamos en condic. just. antes)

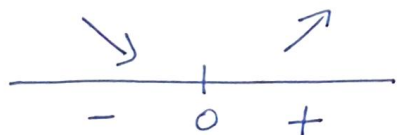
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + (x-1)e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x + xe^x - e^x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} xe^x = \infty \cdot \infty = \boxed{\infty} \text{ no tenemos A.O.}$$

1 b. 4) Monotonía

$$f'(x) = x e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{pág. 2}$$

$$e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Signo de f'

f decreciente en $(-\infty, 0)$

f creciente en $(0, +\infty)$

$\Rightarrow f$ tiene en $x=0$ un extremo relativo que es un **MÍNIMO ABSOLUTO**

f continua

b. 5) Curvatura

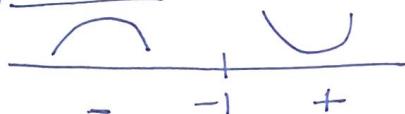
$$f(x) = (x-1)e^x$$

$$f'(x) = x e^x$$

$$f''(x) = e^x + x e^x = (x+1)e^x = 0 \Leftrightarrow x+1=0$$

$$e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -1}$$



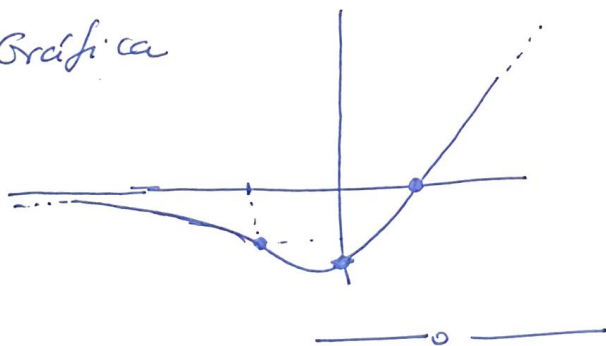
Signo de f''

f cóncava de $(-\infty, -1)$

f convexa de $(-1, +\infty)$

f tiene en $x = -1$ un pto de inflexión

b. 6) Gráfica



Ej. [2] $f(x) = \frac{ax^2+bx+2}{x-1}$ tiene A.O. que pasa por (1,1) y tiene pendiente 2. Calcula a y b

(p.3)

$$y = mx + n \text{ A.O. } y = 2x + n$$

por y pasar por (1,1) $\Rightarrow 1 = 2 \cdot 1 + n \Rightarrow \boxed{n = -1}$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2x - 1} \text{ A.O. de } f(x)$$

$$\boxed{2} = m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2+bx+2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2+bx+2}{x^2-x} =$$

$$= \frac{a}{1} = \boxed{a} \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

F.Alg. = $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (**)
 con $\partial P = \partial Q$
 $\Rightarrow \exists \lim = \text{conste}$
 coef. principales

por $\boxed{-1} = n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2+bx+2}{x-1} - 2x \overset{a=2}{\uparrow}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2x^2} + bx + 2 - \cancel{2x^2} + 2x}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx + 2x + 2}{(x-1)} \overset{b+2}{\uparrow} \boxed{\frac{b+2}{1}}$$

$$\Rightarrow b+2 = -1 \Rightarrow \boxed{b = -3}$$

(**)

[3]
$$f(x) = \begin{cases} (3x-6)e^x & x \leq 0 \\ \frac{36(\sin x - ax)}{x^3} & x > 0 \end{cases}$$

f , función a trozos

- $f_1(x) = (3x-6)e^x$ es producto de una polinómica $(3x-6)$ y una exponencial, ambas cont'y derivables $\Rightarrow f_1$ continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, en particular en $(-\infty, 0)$

- ~~$f_2(x) = x^3$ polinómica~~

$f_2(x) = \frac{36(\sin x - ax)}{x^3}$ es una ^{División} ~~fracción algebraica~~

de una función sinusoidal ~~cuasi~~ una polinómica : $36(\sin x - ax)$
dividido entre x^3 func. polinómica

$\Rightarrow f_2$ continua EN SU DOMINIO $\mathbb{R} - \{0\}$

pero como f está definida como f_2 para $x > 0$
no le afecta el cero, así que f cont'y deriv en $(0, +\infty)$

Continuidad en $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x-6)e^x = (0-6)e^0 = \boxed{-6} \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{36(\sin x - ax)}{x^3} = \frac{36(0)}{0} = \frac{0}{0}$$

como se cumple que $\frac{36(\sin x - ax)}{x^3}$ cont'y deriv. en 0 (visto antes)

IND $\frac{0}{0}$

$\Rightarrow$ estamos en condiciones de aplicar L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{36(\cos x - a)}{3x^2} = \frac{36(1-a)}{0} \text{ para poder aplicar}$$

L'Hopital $36(1-a) = 0 \Rightarrow 36 - 36a = 0 \Rightarrow \boxed{a=1}$

En cuyo caso:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{36(\cos x - 1)}{3x^2}, \text{ aplicamos L'Hopital } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{36(-\sin x)}{6x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-36 \sin x}{6x} = \frac{0}{0} \quad \text{seguimos en condiciones de L'Hopital}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-36 \cos x}{6} = -\frac{36}{6} = \boxed{-6} \quad \text{si, efectivamente si } a=1 \Rightarrow f \text{ cont-}$$

tinua en $x=0$. y por tanto f cont $\mathbb{R}$.

5 a) $a, b, a > 0, b > 0$ $f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4}$ pto. crítico en $(1, 2)$

$(1, 2) \in \text{gráfica de } f(x) \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow \frac{b}{1+a} = 2 \Rightarrow \boxed{b = 2(1+a)}$

$f'(1) = 0$

$$f'(x) = \frac{2bx(1+ax^4) - bx^2(4ax^3)}{(1+ax^4)^2}$$

$a > 0$
 $1+a > 0$
y por tanto $1+a \neq 0$

$$f'(1) = \frac{2b(1+a) - b(4a)}{(1+a)^2} = 0 \Rightarrow 2b(1+a) - b(4a) = 0$$

$\uparrow$
 $1+a \neq 0$
por $a > 0$

$$\Rightarrow 2b + 2ab - 4ab = 0 \Rightarrow 2b - 2ab = 0 \Rightarrow 2b(1-a) = 0$$

como $\left. \begin{matrix} (1-a) = 0 \\ b > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{a=1} \Rightarrow b = 2(1+1) = \boxed{4}$

y por tanto
 $b \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{a=1, b=4} \text{ solución}$$

$$[5] \quad f(x) = \begin{cases} x^3 + bx + 2 & x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{ax} & x > 0 \end{cases}$$

a? f cont. y en $x = -1$ ext. relat. (p. 6)

f función a trozos f_1 es una f. polinómica $\Rightarrow$ cont. y deriv. $\mathbb{R}$
 f_2 cociente de una logarítmica y una polinómica, para
 que esté bien definida $\begin{cases} x+1 > 0 \\ ax \neq 0 \end{cases}$ como f_2 está defini-
 da para $x > 0 \Rightarrow x+1 > 0$ cierto
 $ax \neq 0 \Rightarrow \boxed{a \neq 0}$

$\Rightarrow f_2$ cont. y deriv. en $(0, +\infty)$
 $\boxed{a \neq 0}$

f cont. en $x=0$?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 + bx + 2 = \boxed{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{ax}$$

sólo podemos
 calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$

como $x \rightarrow 0 \Rightarrow x+1 \rightarrow 0$
 $\Rightarrow$ No hay problema
 además $a \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{ax} = \frac{0}{0} \text{ IND}$$

$\left[\begin{array}{l} \ln(x+1) \text{ es cont. y derivable en} \\ \text{su dominio, en este caso} \\ \text{(por ser logar)} (-1, \infty) \\ ax \text{ es cont. y deriv en } \mathbb{R} \\ \text{(por ser polinómica)} \\ \frac{0}{0} \text{ IND} \\ \text{aplique cond. 2' de L'Hôpital} \end{array} \right] \quad (*)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(x+1))'}{(ax)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{a} = \boxed{\frac{1}{a}}$$

con $a \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow 1 = 2a \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$a \neq 0$

para $x = -1$ f ext. relativo

(p. 7)

si $x = -1 \Rightarrow f$ está definida como $f_1(x) = x^3 + bx + 2$
que es polinómica $\Rightarrow$ cont. deriv en $\mathbb{R}$

$$\exists f'(-1); \quad f_1'(x) = 3x^2 + b$$

$$f_1'(-1) = 3(-1)^2 + b = 3 + b = 0$$

$$\boxed{b = -3}$$

Si $a = \frac{1}{2}$ y $b = -3 \Rightarrow f$ es CONTINUA en $\mathbb{R}$ y

f tiene en $x = -1$ un ext. relativo
(OJO! NO hemos probado la derivabilidad de f en 0, porque ni la pedían ni la necesitábamos, el ext. relativo está en -1 (no en 0))

[6] $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x)^{\frac{a}{x^2}} = 2$

II
1 $^\infty$

1) $a \neq 0$ si no, no tendríamos límite

$a?$ (en clase)
~~liminaria~~ $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x)^{\frac{a}{x^2}}$ (liminaria parecida con $\sin x$)
 $f(x) = 1 - \sin^2 x$ sinusoidal cont y deriv. en $\mathbb{R}$

Tipo $n^0 e$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x^2} = +\infty$
por $x^2 > 0$ siempre que $x \neq 0$
 $\boxed{\text{si } a \neq 0}$

$A = e \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x - 1) \cdot \frac{a}{x^2} = B$

$B = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x - 1) \frac{a}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\sin^2 x) a}{x^2} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-a \sin^2 x)'}{(x^2)'} =$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2a \sin x \cdot \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a(\sin 2x)}{2x} =$ $\left\{ \begin{array}{l} -a \sin^2 x \text{ sinusoidal} \\ x^2 \text{ polinómica} \\ \text{cont. deriv en } \mathbb{R} \\ \frac{0}{0} \text{ IND} \\ \text{entonces en condiciones de aplicar L'Hopital} \end{array} \right.$

$= \frac{0}{0}$ seguimos en $\oplus$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[-a(\sin 2x)]'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a 2 \cos 2x}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} -a \cos 2x = \boxed{-a}$

$\Rightarrow B = -a$ y $A = e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ $\boxed{\text{limite}}$
 $a > 0$ como $\frac{1}{e^a} = 2 \Rightarrow e^{-a} = 2 \Rightarrow -a = \ln 2$

[6] continuación: $\Rightarrow \boxed{a = -\ln 2}$

(p.8)

[7] $f(x) = \begin{cases} 5 - ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{6}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}, \boxed{a \neq 0}$

Calcular a para f continua

Si $x \neq 1 \Rightarrow f$ func. a todos f_1 es polinómica $\Rightarrow$ cont. y deriv. en $\mathbb{R}$
 $f_2 = \frac{6}{ax}$ hipérbola es cont y derivable SÓLO en $\mathbb{R}$

en su Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$, como f está definida como f_2 para $x > 1$ y por tanto $x \neq 0 \Rightarrow$ no hay problema

Si $x = 1$
 $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 5 - ax^2 = \boxed{5 - a} =: f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6}{ax} = \boxed{\frac{6}{a}} \text{ con } \underline{a \neq 0} \end{array} \right.$

para f cont en $x = 1 \Rightarrow 5 - a = \frac{6}{a} \Rightarrow a(5 - a) = 6$

$\Rightarrow 5a - a^2 - 6 = 0 \Rightarrow -a^2 + 5a - 6 = 0 \Rightarrow a^2 - 5a + 6 = 0$

$a = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} \boxed{3} \\ \boxed{2} \end{cases}$

Si $a = 2$ ó $a = 3 \Rightarrow f$ continua en todo $\mathbb{R}$
 (No pedían derivabilidad, sólo continuidad)

[9] $f(x) = \frac{e^x}{x^3 - x}$

(p.11)

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{x^3 - x = 0\}$

$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-1) = 0$

pts. de NO dominio: $x=0, x=-1, x=1$

Dom $f = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

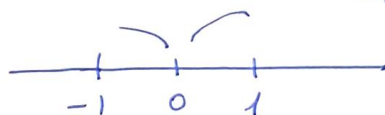
A.V. candidatos $x=0, 1, -1$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x^3 - x} = \frac{1}{0} \text{ IND.}$

$e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$
así que no afecta al signo.

$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

$\boxed{x > 0}$
 $\boxed{y x < 1} \Rightarrow x^3 - x < 0$



ejemplo $(0.1)^3 - 0.1 = -0.099$ Negativo

$x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0$ y $x > -1$, p. ejemplo, tomamos -0.1

$(-0.1)^3 - (-0.1) = 0.099$ Positivo

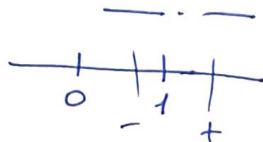
$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$

En $x=0$ f tiene A.V.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

$\boxed{x=1} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{e}{0} \text{ IND}$



$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

y $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$ en $x=1$ f A.V.

$x \rightarrow 1^- \Rightarrow 0 < x < 1$ p. ejemplo, $0.1 \Rightarrow f(0.1) = e$

$(0.1)^3 - 0.1 = -0.099$
Negativo

$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow 1 < x$

p. ejemplo, $0.9 \Rightarrow 1.1$

$\Rightarrow (1.1)^3 - 1.1 = 0.131$ positivo

Para $x = -1$

(p. 12)

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^x}{x^3 - x} = \frac{\frac{1}{e}}{0} \quad \text{IND}$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow | \leftarrow \\ -1 \quad 0 \end{array}$$

$e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ así que no afecta al signo

$x \rightarrow -1^-$, p.ej: $(-1.1)^3 - (-1.1) = -0.231$
Negativo

$x \rightarrow -1^+$, p.ej: $(-0.9)^3 - (-0.9) = 0.171$ Positivo.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} f \text{ tiene A.V. en } x = -1 \\ \text{con} \end{array} \right.$$

A.H.

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3 - x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{IND}$

$$\left[\begin{array}{l} e^x \text{ f. exponencial } \Rightarrow \text{ cont. y deriv. en } \mathbb{R} \\ x^3 - x \text{ f. polinómica } \Rightarrow \text{ cont. y deriv. en } \mathbb{R} \\ \frac{\infty}{\infty} \text{ indet. en L'Hôpital} \end{array} \right] \textcircled{*} \text{ se cumplen condiciones d'Hôpital}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{3x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \textcircled{*} \text{ otra vez L'Hôpital (seguimos en las mismas condiciones)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \textcircled{*} \text{ seguimos en las mismas condiciones } \Rightarrow \text{L'Hôpital}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6} = \frac{\infty}{6} = +\infty \Rightarrow \text{no tiene A.H. en } +\infty \text{ (es una rama } \infty \text{ o parabólica)}$$

2) Veamos en $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{-x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x(-x^3 + x)} \\ &= \frac{1}{\infty(-\infty)} = \frac{1}{-\infty} = \boxed{0} \Rightarrow f \text{ tiene A.H. en } y=0 \text{ para } x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

A.O. en $x \rightarrow -\infty$ f tiene A.H. en $y=0$ luego en $-\infty$ no puede tener A.O.

en $x \rightarrow +\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x}{x^3-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^4-x^2}$

$= \frac{\infty}{\infty}$ seguimos en condic. (*) $\Rightarrow$ L'Hopital

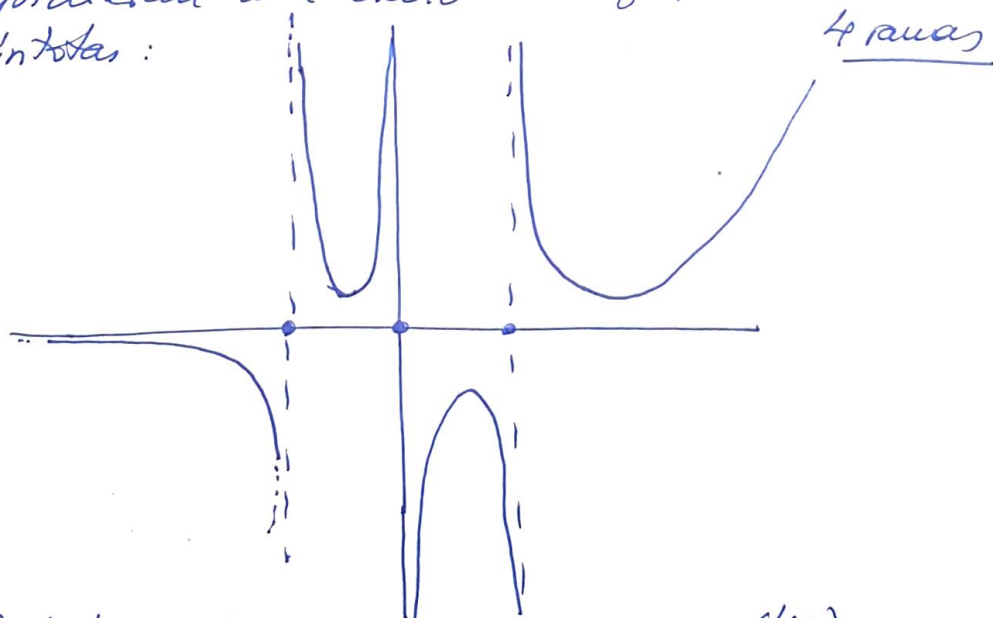
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{4x^3-2x}$ seguimos en (*) L'Hopital

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{12x^2-2}$ seguimos en (*)

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{24x}$ a través (*) L'Hopital

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{24} = \frac{\infty}{24} = \infty \Rightarrow$ No hay A.O. (~~como A.V.~~)

Si pidieran un esbozo de la gráfica basándonos en las Asintotas:



b) Recta tangente en $x=2$

$m = f'(2)$

$$f'(x) = \frac{e^x(3x^2-1) - (x^3-x)e^x}{(x^3-x)^2} = \frac{e^x(3x^2-1-x^3+x)}{(x^3-x)^2}$$

$$f'(2) = \frac{e^2(3 \cdot 4 - 1 - 8 + 2)}{(8-2)^2} = \frac{e^2(12-1-8+2)}{6^2} = \frac{5e^2}{36}$$

10) $n=?$ recta que pasa por $(2, f(2))$

P.14

$$f(2) = \frac{e^2}{8-2} = \frac{e^2}{6}$$

Recta tangente: $\boxed{y - \frac{e^2}{2} = \frac{5e^2}{36} (x - 2)}$

10) lo hicimos en clase * interesante

11) $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$

para que $f(1) = 2$; $f'(1) = 1$

$$f(1) = a - 2 - 1 + b = a + b - 3 = 2 \Rightarrow \underline{a + b = 5}$$

$$f'(x) = 3ax^2 - 4x - 1$$

$$f'(1) = 3a - 4 - 1 = \boxed{3a - 5 = 1} \Rightarrow 3a = 1 + 5$$

$$3a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{3} \Rightarrow \boxed{a = 2} \Rightarrow 2 + b - 3 = 2$$

$$b = 5 - 2 \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

12) $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ be^x & x \geq 0 \end{cases}$ cont y deriv en 0

f a todas, f_1 polinómica $\Rightarrow$ cont y deriv $\mathbb{R}$

f_2 exponencial $\Rightarrow$ cont y deriv $\mathbb{R}$

f cont y deriv en $\mathbb{R}$ - los

Para $x=0$

cont $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - ax + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} be^x = b \end{array} \right\} \boxed{b=1}$ para f cont en todo $\mathbb{R}$

deriv $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f_1'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x - a) = -a \\ \lim_{x \rightarrow 0} f_2'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (be^x) = b \end{array} \right\} -a = b = 1 \Rightarrow \boxed{a = -1}$ para f deriv. en $\mathbb{R}$

[13]

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{2x-4} = \frac{0}{0}$$

(p.15)
 el numerador es exponencial
 el denominador es una func. polinómica
 $\frac{0}{0}$ IND.
 Estamos en condic. d'Hospital
 (demasiado fácil)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

[14]

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x < 1 \rightarrow \text{polinómica} \Rightarrow \text{cont y deriv } \mathbb{R} \\ \frac{2x-1}{x-2} & 1 \leq x \leq 3 \rightarrow \text{hipérbola} \Rightarrow \text{cont y deriv en su DOMINIO } \mathbb{R} - \{2\} \\ 2e^x & x > 3 \end{cases}$$

¡OJO! en $x=2$
 NO es continua (no deriv.)

$$\boxed{\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}}$$

Exponencial $\Rightarrow$ cont. deriv. en $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ NO continua en $x=2$

para $x=2$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x-2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x-2} = +\infty \end{cases}$$

$$x=1^9 \Rightarrow \frac{2 \cdot 1^9 - 1}{1^9 - 2} = \frac{+}{-} \Rightarrow \text{Negativo}$$

$$x=2^1 \Rightarrow \frac{2 \cdot 2^1 - 1}{2^1 - 2} = \frac{+}{+}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{3}{0} \text{ IND}$$

f presenta en $x=2$ una discontinuidad de salto ∞

para $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{1}{-1} = -1$$

f cont en $\boxed{x=1}$

para $x=3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{6-1}{3-2} = \frac{5}{1} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 2e^x = 2e^3$$

$5 \neq 2e^3$
 f NO continua en $x=3$
 descont. salto finito de magnitud $|2e^3 - 5|$

[14] Continuidad: por tanto (p.16)
 f cont $\mathbb{R} - \{2, 3\}$ $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

en $x=2 \Rightarrow$ discont. salto ∞

en $x=3 \Rightarrow$ discont. de salto finito de magnitud $|2e^3 - 5|$

Derivabilidad en $x=2$ y $x=3$ f No derivable (no es continua en esos pto y ademá $2 \notin \text{Dom } f$)

para $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2)' = \lim_{x \rightarrow 1} (2x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x-2} \right)' = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-2) - (2x-1)}{(x-2)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 4 - 2x + 1}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3}{(x-2)^2} = \frac{-3}{1} = -3 \neq 2$$

$\Rightarrow f$ No derivable en $x=1$

f der. en $\mathbb{R} - \{1, 2, 3\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$

[15] $f(x) = ax^3 + bx^2 + x - 1$ $a, b \in \mathbb{R}$ $f(1) = 1$
 $f'(1) = 0$

f func. polinómica cont y derivable $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$ $f(1) = 1 \Leftrightarrow a + b + 1 - 1 = 0$
 $\boxed{a+b=0}$

$f''(x) = 6ax + 2b$; $f''(1) = \boxed{6a + 2b = 0}$

hacemos un sistema: $\begin{cases} a+b=0 \\ 6a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ 3a+b=0 \end{cases} ; 3a-a=0$

$2a=0 \Rightarrow \boxed{a=0} \Rightarrow 2b=0 \Rightarrow \boxed{b=0}$

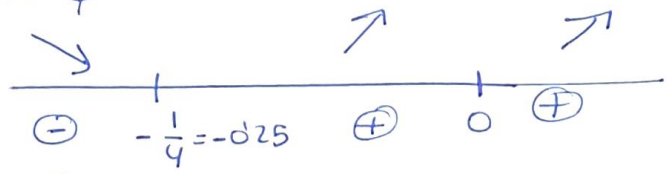
[16] $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$ estudiar monotonía

$f'(x) = 12x^3 + 3x^2$ $12x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(12x+3)=0$

$f''(x) = 36x^2 + 6x$ $\begin{cases} \boxed{x=0} \\ 12x+3=0 \Rightarrow 12x=-3 \\ x=-\frac{3}{12} = -\frac{1}{4} \end{cases}$

f tiene en $x=0$ y $x=-\frac{1}{4}$ pts. críticos
• estudiamos el signo de f'

$$f'(x) = 12x^3 + 3x^2$$



en $-\frac{1}{4}$ izqda $\rightarrow 12(-1)^3 + 3(-1)^2 = -9 < 0$ decreciente

en $-\frac{1}{4}$ drcha $\rightarrow 12(-0.2)^3 + 3(-0.2)^2 = 0.024 > 0$ creciente

$\Rightarrow$ en $x = -\frac{1}{4}$ f tiene un ~~Máximo~~ Mínimo relativo

en 0 drcha $\rightarrow 12(1)^3 + 3 \cdot 1^2 = (+) \rightarrow$ creciente

¿qué ocurre en $x=0$?

$$f''(x) = 36x^2 + 6x$$

$f''(0) = 0 \rightarrow$ Pto de inflexión (como además $f'(0) = 0$
& lleva pto silla o pto estacionario)

f creciente $(-\frac{1}{4}, +\infty)$

f decreciente $(-\infty, -\frac{1}{4})$

17

 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos(3x)}{\sin^2 x} = \frac{1 - 0 - 1}{0} = \frac{0}{0}$

- numerador es suma y resta de exponenciales y sinusoidales $\Rightarrow$ cont y deriv $\mathbb{R}$
- denominador: producto de sinusoidales $\Rightarrow$ cont y deriv en $\mathbb{R}$
- $\frac{0}{0}$ IND. de L'Hospital

$\Rightarrow$ podemos aplicar L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + 3 \sin 3x}{2 \sin x \cdot \cos x} \stackrel{\uparrow}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + 3 \sin 3x}{\sin 2x} = \frac{1 - 1 + 0}{0} = \frac{0}{0}$$

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

seguimos en las condiciones de (*) $\Rightarrow$ volvemos a aplicar L'Hospital $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 3 \cdot 3 \cos 3x}{2 \cdot \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 9 \cos 3x}{2 \cos 2x} =$$

$$= \frac{1 + 9 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{1 + 9}{2} = \frac{10}{2} = \boxed{5} \quad \text{per d'Hospital}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos 3x}{\sin^2 x} = 5}$$

$$\boxed{18} \quad \left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \text{ t.g.} \\ f(0) = 1 \\ m = f'(0) = 1 \\ f'(\frac{1}{2}) = 0 \\ f''(\frac{1}{2}) < 0 \end{array} \right\}$$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow \boxed{c = 1}$$

$$f'(x) = 2ax + b; \quad f''(0) = 1 \Leftrightarrow \boxed{b = 1}$$

$$f'(\frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow 2a \cdot \frac{1}{2} + b = 0 \Leftrightarrow a + b = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$f''(x) = 2a; \quad f''(\frac{1}{2}) = 2 \cdot (-1) = -2 < 0 \quad \text{efectivament és màxim.$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = -x^2 + x + 1}$$

$$\boxed{19} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(mx)}{x^2} = 2 \quad \boxed{m > 0}$$

numerador: sinusoidal (comb. lineal de senos y cosenos) con polinómica $\Rightarrow$ cont. y deriv $\mathbb{R}$
denominador: polinómica $\Rightarrow$ cont. y deriv $\mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos mx}{x^2} = \frac{1 - 1}{0} = \left[\frac{0}{0} \right] \text{ IND}$

estamos en condic. d'Hospital

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{+m \sin mx}{2x} = \frac{0}{0} \quad \text{seguimos en condic. (*)}$$

$$\text{d'Hospital:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 \cos mx}{2} = \frac{m^2}{2} = 2 \Rightarrow m^2 = 4 \left| \begin{array}{l} \text{como } m > 0 \\ \Rightarrow \boxed{m = 2} \end{array} \right.$$

Ej. 20

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(p. 19)

f función a trozos, f_1 es división de una sinusoidal y una polinómica, será cont. y deriv. salvo en el punto donde se anula el denominador, en este caso $x=0$. Como f está definida como f_1 para $x \neq 0$ no hay problema $\Rightarrow f$ cont. en $\mathbb{R} - \{0\}$ y deriv. en $\mathbb{R} - \{0\}$

para $x=0$ f está definida como $\underline{0} =: f(0)$

Veamos los límites laterales,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{0}{0}$$

por lo visto anteriormente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} =$$

$$= \sin 0 = \underline{0} = f(0)$$

por tanto f continua en $x=0$

$\Rightarrow f$ continua en $\mathbb{R}$

$$[21] \quad f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x < 0 \\ x e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

por $\oplus$ f es cont. y deriv. en $\mathbb{R} - \{0\}$. Veamos en $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = \underline{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x e^x = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = \underline{0} = f(0)$$

$\Rightarrow f$ cont. en 0 y por tanto f cont. $\mathbb{R}$

$\oplus$ $f_1 = \sin x$, sinusoidal $\rightarrow$ cont. y deriv. en $\mathbb{R}$ en particular en $(-\infty, 0)$
 $f_2(x) = x e^x$ producto de una polinómica y una exponencial $\rightarrow$ cont. y deriv. en $\mathbb{R}$, en particular en $(0, +\infty)$

por f_1 cont. y deriv. en $\mathbb{R}$ $\left\{ \Rightarrow \right.$
 f_2 " " " " " " " " " " " "

P. 20

$\exists f_1'(x) = \cos x$ cont. en $\mathbb{R}$

$\exists f_2'(x) = e^x + x e^x = (1+x)e^x$ cont. en $\mathbb{R}$

puedo definir $f'(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ x e^x & x > 0 \end{cases}$ cont y deriv. en $\mathbb{R}$ - 10 f

Veamos que pasa en $x=0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)e^x = (1+0)e^0 = 1 \cdot 1 = 1$

$\Rightarrow f'$ cont. en 0 y se define como $f'(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ (1+x)e^x & x > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f$ derivable en 0 y en todo $\mathbb{R}$.

[22] a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x} = \frac{0(1-0)}{0-0-0} = \frac{0}{0}$ indet.

* $\left[\begin{array}{l} \bullet \text{ numerador es producto de polinómicas} \rightarrow \text{cont y deriv } \mathbb{R} \\ \bullet \text{ denominador es suma y resta de polinómicas y trigonométricas} \Rightarrow \text{cont y deriv. en } \mathbb{R} \\ \bullet \frac{0}{0} \text{ ind. de L'Hôpital} \end{array} \right]$

$\Rightarrow$ por * estamos en condiciones de aplicar L'Hôpital

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2(1-2x))'}{(x-2x^2-\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(1-2x) + x^2(-2)}{1-4x-\cos x} =$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 4x^2 - 2x^2}{1-4x-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 6x^2}{1-4x-\cos x} = \frac{0}{0}$

seguimos en cond. L'Hôpital por * $\Rightarrow$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-12x}{-4+\sin x} = \frac{2-0}{-4+0} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ por L'Hôpital

$\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

$$22 b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\sin \frac{1}{x}} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x \sin \frac{1}{x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cancel{x} \frac{1}{x} - 2x}{x^2 \cdot \cancel{x} \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} (3 \sin \frac{1}{x} - 2x)}{\sin \frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x^2} \cancel{x} \frac{1}{x} - \frac{2}{x}}{\sin \frac{1}{x}} \underset{\uparrow}{=} \frac{0 \cdot 0 - 0}{0} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

- ④
- numerador: producto y resta de hipérbolas con $\text{Dom} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y sinusoidales $\rightarrow$ cont y deriv en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, como $x \rightarrow \infty$ no hay problema ($x \neq 0$)
 - denominador: sinusoidal compuesta con hipérbola $\rightarrow$ cont y deriv en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, como $x \rightarrow \infty$ no hay problema por $x \neq 0$
- $\frac{0}{0}$ inde. d'Hospital

por ④ cumplen condiciones de d'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{x^2} \sin \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \right)'}{\left(\sin \frac{1}{x} \right)'} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{3 \cdot 2x}{x^4} \sin \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \frac{2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{6}{x^3} \sin \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cos \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{6}{x^3} \sin \frac{1}{x} - \frac{3}{x^4} \cos \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{1}{x^2} \left(-\frac{6}{x} \sin \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \cos \frac{1}{x} + 2 \right)}{-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}} \right] \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2} \left(-\frac{6}{x} \sin \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \cos \frac{1}{x} + 2 \right)}{\cancel{x^2} \cos \frac{1}{x}} \underset{x \neq 0}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{6}{x} \sin \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \cos \frac{1}{x} + 2}{\cos \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{x} \sin \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \cos \frac{1}{x} - 2}{\cos \frac{1}{x}} = \frac{0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 2}{\cos 0} =$$

$$= \frac{0 + 0 - 2}{1} = \boxed{-2}$$

[23] $f(x) = \frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4}$

$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

A.V. candidatos son -2 y 2 ; $\boxed{x=-2} \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{n^\circ}{0} \underline{\underline{\text{IND.}}}$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$
 $\uparrow$

tomamos valores próx. a -2^- para ver el signo: $\frac{(-2.1)^3 - 4(-2.1) - 1}{(-2.1)^2 - 4} = \frac{-}{+}$

tomamos valores próx. a -2^+ para ver el signo

$\frac{(-1.9)^3 - 4(-1.9) - 1}{(-1.9)^2 - 4} = \frac{-}{-} = \oplus$
 $\swarrow$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$

$x = -2$ A.V. $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right.$

$\boxed{x=2} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{n^\circ}{0} \text{ IND.}$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$
 $\uparrow$

tomamos valores próximos a 2^- , p.ejemplo $\frac{(1.9)^3 - 4(1.9) - 1}{(1.9)^2 - 4} = \frac{-}{-} = \oplus$

tomamos valores próximos a 2^+ para ver el signo, por ejemplo:

$\frac{(2.1)^3 - 4(2.1) - 1}{(2.1)^2 - 4} = \frac{-}{+} = \ominus$
 $\swarrow$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow x=2$ A.V. con $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right.$

A.H. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4} = \infty$

[F. Algebraica $\frac{P(x)}{Q(x)}$
 con $\partial P = 3 > 2 = \partial Q$]

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 4x - 1}{x^2 - 4} = -\infty$

No hay A.H., sino ramas ∞ o parabólicas.

A.O. por ser $f(x)$ F. Alg. con $\partial P = \partial Q + 1$ sabemos que si la tiene

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x - 1}{x^3 - 4x} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$

$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4} - x$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x - 1 - x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x^2 - 4} = \boxed{0}$

F. Alg.
Grado numerador =
= grado denominador
 $\Rightarrow$ Elim. = cociente de coef. princ.

$\Rightarrow \boxed{y=x}$ A.O. cuando $x \rightarrow +\infty$

por ser $f(x)$ F. Alg. no es necesario comprobar que también es A.O. en $x \rightarrow -\infty$ por simetría.

[24] a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3 + 2x^2} - \sqrt{3x^3}} = \frac{\infty}{\infty - \infty} \quad \infty - \infty \text{ IND}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} (\sqrt{3x^3 + 2x^2} + \sqrt{3x^3})}{(\sqrt{3x^3 + 2x^2})^2 - (\sqrt{3x^3})^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} (\sqrt{3x^3 + 2x^2} + \sqrt{3x^3})}{3x^3 + 2x^2 - 3x^3} =$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^4 + 2x^3} + \sqrt{3x^4}}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{\cancel{x^2}} (\sqrt{\frac{3x^4}{x^4} + \frac{2x^3}{x^4}} + \sqrt{\frac{3x^4}{x^4}})}{2x^2} =$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3 + \frac{2}{x}} + \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3+0} + \sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \boxed{\sqrt{3}}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = \infty \cdot 0$ indet. (p. 24)
convertible en
L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \text{ IND}$$

• numerador: función sinusoidal compuesta con una hipérbola con $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow$ cont'y deriv. en $\mathbb{R} - \{0\}$ como $x \rightarrow \infty$ no hay problema ($x \neq 0$)

• denominador hipérbola con $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{0\}$ cont'y deriv en $\mathbb{R} - \{0\}$, como $x \rightarrow +\infty$ no hay problema ($x \neq 0$)

por (2) estamos en condiciones de aplicar L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\operatorname{sen} \frac{1}{x} \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{x^2} =$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} = \cos 0 = \boxed{1} \Rightarrow \text{por L'Hôpital}$$

$x \neq 0$

$$\underline{\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 1}$$