

1 ANÁLISIS DE CONTENIDO:

1.1 HISTORIA

Para tener una perspectiva completa del contenido que conforma el cuerpo teórico del tema es importante realizar un estudio de la evolución histórica de los conceptos implicados. Realizo a continuación un breve resumen de los hechos más importantes en el desarrollo histórico de la trigonometría.

PRIMEROS PRECEDENTES:

EGIPTO 2000-1800 a.C.



En el problema 56 del Papiro de Rhind o de Ahmes (en la figura se puede observar un detalle de este papiro) se encuentran por primera vez rudimentos de trigonometría y de teoría de triángulos semejantes. Del problema de mantener la pendiente de cada cara constante durante la construcción de una pirámide, surge lo que podríamos considerar como la primera razón trigonométrica. Los egipcios tenían en cuenta el cociente entre “el avance” y “la subida” para medir la pendiente, es decir, lo hacían por medio del cociente entre la variación horizontal y la vertical (la actual cotangente) a la que llamaban “seqt”. Hoy en día esta razón tiene importancia en arquitectura, donde se llama a esta medida “desplome”. En el problema 56 de este Papiro, se pide calcular el “seqt” de una pirámide de la que se conocen la altura y base.

BABILONIA 1900-1600 a. C.

En la tablilla 322 de la colección Plimpton, conservada en la Universidad de Columbia, aparece otro “germen” de la trigonometría. Esta tablilla muestra una tabla con una serie de ternas pitagóricas formadas por números enteros (idearon un método para obtenerlas) y aparece también en la tabla la razón entre hipotenusa y cateto mayor (la actual secante) en una secuencia de grado en grado de 31° a 45° . Esta tabla fue utilizada en los problemas de medir áreas de cuadrados o lados de triángulos rectángulos.

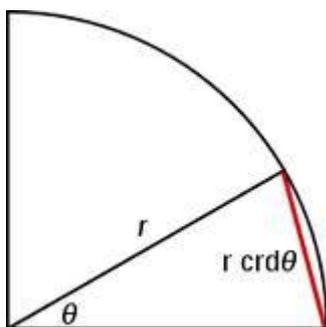
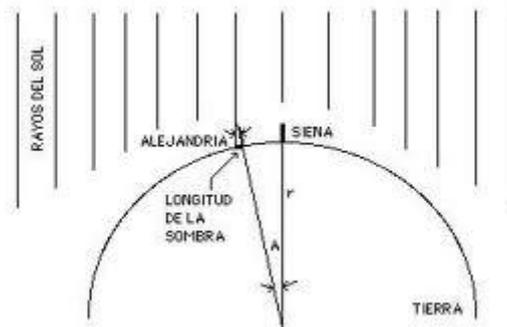
Pero las tablillas mesopotámicas y los papiros egipcios, como todos los documentos prehelénicos, contienen siempre casos prácticos, sin ninguna formulación general, son unas matemáticas totalmente utilitarias.

EL NACIMIENTO DE LA TRIGONOMETRÍA. GRECIA.

“Cuando trazo a placer el vertiginoso ir y venir de los cuerpos celestes, mis pies ya no tocan la tierra, sino que me hallo en presencia del mismo Zeus y me sacio de ambrosía, alimento de los dioses.” (Ptolomeo)

La trigonometría surge en Grecia para dar respuesta a problemas clásicos de la Astronomía de la época. **Aristarco de Samos** escribió un tratado (en torno al 260 a.C.) titulado *Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna* en el que, por medio de la semejanza de triángulos, daba la relación entre las distancias Tierra-Sol y Tierra-Luna. Otro trabajo que aportó nuevas muestras de que en aquella época se daba el ambiente idóneo para el nacimiento de la trigonometría, es el de **Eratóstenes de Cirene**

(276 a.C. -194 a.C.), que, en su tratado, *Sobre la medida de la tierra*, aproxima el tamaño de ésta utilizando una medición del ángulo entre dos ciudades, Assuan y Syena, situadas en el mismo meridiano, obteniendo el resultado de un cincuentavo de círculo completo, para después multiplicar por 50 la distancia entre estas dos ciudades y obtener así una aproximación bastante buena de la longitud de la circunferencia de la tierra, de unos 250.000 estadios, o lo que es lo mismo, unos 46.000 Km. En este trabajo se aprecia cómo se empiezan a relacionar ángulos (en la circunferencia) y distancias (longitud del arco). El intento de profundizar en el conocimiento de estas relaciones, para aplicarlo en multitud de problemas astronómicos, de navegación, agrimensura, etc., fue lo que impulsó el desarrollo de la trigonometría.



Poco después de estos trabajos aparece la obra de **Hiparco de Nicea**, considerado el padre de la trigonometría porque elabora la primera tabla trigonométrica de la que se tiene constancia. Hiparco de Nicea (ca. 180-ca. 125 a.C.) se ocupó de elaborar una tabla en la que aparecieran valores de arcos y sus cuerdas correspondientes, así como la razón entre éstos, para una serie completa de ángulos. La contribución que se le atribuye a Hiparco es la de organizar y ordenar los datos empíricos obtenidos por los babilonios. No sabemos con precisión cuando comenzó a usarse una división del círculo completo en 360° , pero parece ser que este hecho se debe principalmente a Hiparco, que utilizó tal división en su tabla de cuerdas, debido probablemente a la astronomía, donde el zodiaco había sido dividido en 12 “signos” o 36 “decanes”, divididos éstos a su vez en 30 o 10 partes, respectivamente.

Otro de los personajes que ayudó al desarrollo de la trigonometría en la antigua Grecia fue **Menelao de Alejandría** (ca. 100), que en el tratado *Esférica*, libro I, establece las bases de la trigonometría esférica, estudiando y deduciendo algunas propiedades de los triángulos esféricos.

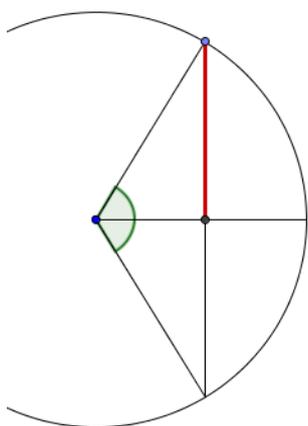
Pero fue la obra de **Ptolomeo** la de mayor importancia en cuanto a lo que concierne a los orígenes de la trigonometría. En su obra *Sintaxis matemática* (que fue llamada por los árabes *Almagesto*), escrita durante el segundo siglo de nuestra era, de la cual se conservan copias, Ptolomeo realiza un tratado astronómico, en el que calcula tablas de cuerdas, usadas para “leer” la posición de los astros. En este tratado Ptolomeo presenta un importante resultado, del cual se deducen como casos particulares fórmulas para el cálculo de cuerdas para la suma y diferencia de arcos, y de éstas las del arco doble y mitad. Con estas herramientas, Ptolomeo tuvo más fácil la elaboración de tablas de cuerdas con mayor exactitud, e incluyó en su *Almagesto* una para ángulos desde medio grado hasta 180° , de medio en medio grado. Para ello, Ptolomeo utilizó también la división de la circunferencia en 360 partes (grados), las cuales a su vez fueron subdivididas en 60 partes (*partes minutae primae*, de aquí la procedencia del término minuto) y cada una de estas también fue dividida en otras 60 partes (*partes minutae secundae*, y, de aquí la procedencia de segundo). El hecho de tomar subdivisiones de 60 partes se debe a que el sistema de numeración sexagesimal que utilizaban los babilónicos por aquella época, era mucho más eficaz para operar con fracciones que el sistema de fracciones unitarias egipcias, y el de las fracciones usuales de los griegos.

Además Ptolomeo también dividió el diámetro de su círculo trigonométrico en 120 partes, quedando el radio dividido en 60.

Las tablas que elaboró Ptolomeo en el Libro I de *Almagesto* fueron una herramienta indispensable para los astrónomos durante más de mil años.

No está claro que hubiera progresos importantes en la trigonometría de Ptolomeo, en el año 150 de nuestra era, respecto a la de Hiparco en el año 150 a.C., o incluso respecto a Apolonio y Arquímedes cien años antes. Pero lo que es claro, es que desde ese momento en que la trigonometría satisface todas las exigencias prácticas de los problemas astronómicos, se deja de profundizar en su estudio, ya que en esta época imperaba un movimiento a la práctica que dominó durante tres siglos. Pero más tarde estas técnicas serían estudiadas de nuevo por árabes e hindúes, los cuales harán de puente entre la matemática antigua y el mundo moderno.

LA TRIGONOMETRÍA HINDÚ



Los *Siddhāntas* son unas obras escritas, que aparecieron hacia finales del siglo IV, que recogen conocimientos sobre astronomía. En ellos se puede observar una gran influencia de las teorías astronómicas griegas, y particularmente de la trigonometría y astronomía de Ptolomeo. Pero aunque los hindúes adquiriesen sus conocimientos acerca de la trigonometría de Grecia, le dieron una nueva forma muy significativa.

La trigonometría de Ptolomeo se basaba en la relación entre las cuerdas y los correspondientes arcos o ángulos centrales que ellas subtenden, pero los hindúes estudiaron la razón entre la mitad de la cuerda (semicuerda) y la mitad del arco, y esta razón fue el antecesor de nuestro actual seno.

No mucho después de los *Siddhāntas*, durante el siglo VI, vivió **Aryabhata**, cuya obra más conocida, titulada *Aryabhatiya*, es un delgado volumen escrito en verso que recoge temas de astronomía y matemáticas. Sin ninguna relación con la lógica o la metodología deductiva más propias de la matemática griega, Aryabhata también realizó tablas donde se dan los senos de los ángulos menores o iguales que 90° para 24 intervalos angulares de $3\frac{3}{4}$ de grado cada uno. Las tablas incluyen también los valores de lo que llamamos seno verso de un ángulo es decir, $(1 - \text{sen } \theta)$. Aryabhata utilizó una circunferencia de $360 \cdot 60 = 21.600$ unidades, para lo que tuvo que tomar entonces un radio de 3.438 unidades (utilizando una aproximación de π correcta hasta la milésima), por lo tanto, habría que dividir los valores de la tabla entre ese radio, para obtener unas tablas de senos bastante precisas.

LA TRIGONOMETRÍA ÁRABE

Un par de siglos después de Aryabhata, aparecen las primeras referencias sobre trigonometría en Arabia. Estas referencias en principio adoptaban el modelo de cuerdas griego, pero finalmente se decantaron por el modelo hindú, basando así su teoría sobre la función seno, y fue a través de los árabes como llegó a Europa la trigonometría del seno.

Una de las obras destacables es la de **Al-Battani** (ca. 850-929), conocido en Europa como Albategnius, que en su libro *Sobre el movimiento de las estrellas* aplica la

trigonometría directamente al triángulo rectángulo, obteniendo una fórmula que en la actualidad se leería como

$$b = a \frac{\text{sen}(90^\circ - A)}{\text{sen } A}$$

donde a y b son los catetos de un triángulo rectángulo y A el ángulo opuesto al lado a . Un siglo más tarde, en la época de **Abu ʿl-Wefa** (939-998), la función tangente era ya conocida y se podía expresar la relación anterior como $a = b \operatorname{tg} A$. Los árabes calculaban la función tangente sobre el círculo unidad, lo que no ocurría con la función seno de los hindúes, acercándose un poco más a la idea de la trigonometría moderna. Además el trabajo de Abu ʿl-Wefa fue un trabajo más sistemático, “a la griega”, en la que se demuestran ya importantes resultados como las fórmulas del ángulo doble y del ángulo mitad, o el teorema de los senos para triángulos esféricos. También realizó una tabla de senos de ángulos de cuarto en cuarto grado con ocho cifras decimales exactas, una tabla de tangentes, y utilizó en sus cálculos las seis funciones trigonométricas usuales y diversas relaciones entre ellas, pero esta utilización de las seis funciones no pareció ser muy seguida en el periodo medieval.

Pero los árabes llevaron la trigonometría más allá, **Al-Biruni** (973-1048), al resolver el problema de inscribir un polígono regular de nueve lados en una circunferencia, lo reduce a resolver la ecuación $x^3 = 1 + 3x$, por medio de la fórmula matemática para $\cos 3\theta$. También en aquella época, **Ibn-Yunus**, introdujo la fórmula

$$2 \cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y)$$

que es una de las cuatro fórmulas de transformación “de productos a sumas” que se utilizaron en Europa durante el siglo XVI, antes de que se inventaran los logaritmos. Los avances serían menores en los siguientes siglos, y ya en periodo de decadencia cultural del mundo islámico, **Nasir Eddin Al-Tusi** (1201-1274), astrónomo nieto del gran conquistador Genghis Khan, siguiendo las líneas de Abu ʿl-Wefa escribió el primer tratado sistemático de trigonometría plana y esférica, en la que se presenta como materia independiente, y no ya ligada a la astronomía. En esta obra se estudian las seis funciones trigonométricas usuales, y se dan reglas para resolver los diversos casos de triángulos planos y esféricos.

LA EUROPA MEDIEVAL

Durante el siglo XII los europeos latinos superaron la barrera lingüística que les separaba de la cultura árabe, e incluso de la cultura griega. Comenzaron a hacerse en esta época una oleada de traducciones del árabe, hebreo y griego al latín. De pronto la Europa Occidental comenzó a mirar la matemática árabe de una manera más favorable a como lo había hecho con la geometría griega, y los intelectuales latinos del siglo XII adquirieron la trigonometría árabe tal y como aparecía en las obras astronómicas. De una de estas traducciones, hecha por Gerardo de Chester sobre el 1150, surge el término seno. Los hindúes llamaron *jiva* a la semicuerda antes nombrada, y los árabes adoptaron este nombre bajo la forma *jiba*, ahora bien, en árabe existe también la palabra *jaib* que significa –bahía- o –ensenada-, y cuando Roberto de Chester se encontró con el término técnico *jiba*, debió confundirlo con la palabra usual *jaib*, y lo tradujo por la palabra *sinus* que es el nombre latino para –bahía- o –ensenada-. A veces se utilizó para la semicuerda la frase más detallada *sinus rectus* o “seno recto o vertical”, y de ahí también el nombre de *sinus versus* o nuestro “seno verso” para el “seno vuelto sobre su lado”.

Europa no alcanzó un alto nivel en el campo de la trigonometría hasta que **Regiomontano** (1436-1476) escribió su obra *De triangulis* hacia el 1464. En el primer

libro de este tratado, encontramos una exposición de los conceptos fundamentales sobre magnitudes y razones, inspirada por Euclides, y a continuación vienen más de 50 proposiciones que tratan de la resolución de triángulos basándose en las propiedades de los triángulos rectángulos. El libro II comienza enunciando con claridad el teorema de los senos y demostrándolo, y sigue con otros problemas sobre determinación de lados, ángulos y áreas de triángulos planos conociendo algunos datos. Un ejemplo de este tipo de resultados es el siguiente:

“Si se conocen la base de un triángulo y el ángulo opuesto, y si además se conoce o bien la altura correspondiente a la base, o bien el área, entonces pueden calcularse los otros lados”.

Los libros III y IV contienen resultados acerca de la trigonometría esférica, incluyendo el teorema de los senos.

En esta obra, Regiomontano no contempla la función tangente que si incluiría en un tratado posterior *Tabulae directionum*, Regiomontano utilizó un radio de 100.000 unidades para su tabla de tangentes de ángulos de grado en grado. Las obras de Regiomontano influyeron notoriamente en los trabajos de principios del siglo XVI. En esta época también contribuyó al desarrollo de la trigonometría Nicholas Copernicus o **Copérnico** (1473-1543) que fue un astrónomo que revolucionó la concepción del mundo, si bien es cierto que su obra estaba directamente influenciada por la obra de Regiomontano.

Se sabe que en 1539 Copérnico recibió como estudiante al joven matemático prusiano Georg Joachim **Rheticus** (1514-1576) que había estado en contacto con la matemática que se hacía en Nuremberg, por lo tanto con la trigonometría de Regiomontano, pero Rheticus fue más lejos, aunando las ideas de estos dos maestros escribió el tratado más completo que se había escrito hasta el momento sobre trigonometría, bajo una obra en dos volúmenes titulada *Opus palatinum de triangulis*. El autor descarta en este libro el tratamiento tradicional de las razones trigonométricas consideradas respecto a arcos de circunferencia, para definir las directamente a partir de los lados de un triángulo rectángulo. Rheticus estudió las seis funciones trigonométricas, y realizó tablas detalladas de todas ellas. Para realizar sus tablas usó una hipotenusa (radio) de 10.000.000 de unidades para las funciones seno y coseno, y para las funciones restantes un cateto adyacente de también 10.000.000 de partes, para intervalos angulares de 10”.

PRELUDIO A LA MATEMÁTICA MODERNA

La mayor parte de las obras de la antigüedad habían sido ya traducidas, el álgebra árabe había sido asimilada e incluso mejorada y la trigonometría se había convertido en una materia independiente. La época estaba casi madura para llevar a cabo rápidos avances que superaran las contribuciones antiguas, medievales y renacentistas. La figura más brillante de esta transición fue **François Viète** (1540-1603), o en su forma latinizada Franciscus Vieta. La trigonometría de Viète se caracteriza por su enfoque analítico general. Realizó un trabajo similar al de Rheticus, realizando también tablas para las seis razones trigonométricas, en su obra *Canon mathematicus* (1579), utilizando un radio de gran magnitud para evitar la aparición de complicadas fracciones, aunque Viète también prefería darle un enfoque a la trigonometría basada en el triángulo rectángulo. Al darle un carácter analítico, Viète pudo dedicarse a obtener identidades como un grupo de fórmulas conocidas como las “*reglas de prostafairesis*”, esto es, fórmulas, como la obtenida por Ibn-Yunus, que permitían convertir un producto de funciones circulares en una suma o diferencia (de donde les venía el nombre de *prostafairesis*, palabra griega que significa suma y resta). Un ejemplo de estas fórmulas es

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

A finales del siglo XVI se popularizó este método de prostafairesis, que hizo que, ayudados por tablas trigonométricas, cálculos tediosos se realizaran con menor esfuerzo en todos los observatorios astronómicos importantes. Los cocientes por su parte se manejaban de la misma manera utilizando una tabla de secantes y cosecantes. Viète llegó más allá, relacionando la trigonometría con la teoría de números para obtener unas fórmulas para el seno y coseno de los ángulos múltiplos de un ángulo dado. Todo este cuerpo teórico facilitó a Viète el uso de la trigonometría en la resolución de ecuaciones, como ya hiciera Al-Biruni siglos atrás con una ecuación en particular. La trigonometría dio así un salto hacia problemas aritméticos y algebraicos, y, a finales del siglo XVI y comienzos del XVII, hubo un entusiasmo considerable por la trigonometría. En esta época aparece por primera vez el nombre de trigonometría, en el título de una exposición de Bartholomaeus Pitiscus (1561-1613) que se publicó en el año 1595 como suplemento a un libro sobre “esférica”

Poco después, en 1635, **Gilles Personne de Roberval** realizó un bosquejo de la mitad de un arco de la curva “seno”, hecho con el que se descubre un nuevo aspecto de la trigonometría, encaminada ahora hacia un enfoque funcional, que culminará con Euler. Roberval pudo demostrar con su método de indivisibles que

$$\int_a^b \operatorname{sen} x \, dx = \cos a - \cos b$$

Pocos años más tarde, la trigonometría tomó un nuevo rumbo dado por los hermanos **Jacques Bernoulli** (1654-1705) y **Jean Bernoulli** (1667-1748), que redescubrieron los desarrollos de $\operatorname{sen} n\theta$, $\cos n\theta$, en función de $\operatorname{sen} \theta$ y $\cos \theta$ dados anteriormente por Viète y los generalizaron a valores racionales de n . Pero lo más destacable de su trabajo es cómo los hermanos Bernoulli intentan desarrollar la trigonometría desde un punto de vista analítico, con lo que llegaron a resultados de una complejidad superior con los que estudiaron ciertas ecuaciones diferenciales.

Un trabajo fundamental en este nuevo aspecto analítico de la trigonometría fue el de **Roger Cotes** (1682-1716). Cotes tuvo una muerte prematura y sólo se publicaron algunos trabajos incompletos, a título póstumo, en 1722 con el nombre de *Harmonia mensurarum*. En esta obra se reconocía el carácter periódico de las funciones trigonométricas, y aparecieron por primera vez impresas las representaciones de las funciones tangente y secante. Se trata de uno de los primeros libros en los que se da un tratamiento sistemático a las funciones trigonométricas o circulares, incluyendo una tabla de integrales de éstas. Pero el autor llega más allá, al ocuparse del problema de la descomposición de polinomios y aplicar sus conocimientos de trigonometría para llegar a resultados que fueron utilizados posteriormente por **Abraham De Moivre** (1667-1754), quien, en 1707, en un artículo publicado en las *Philosophical Transactions*, utiliza una fórmula equivalente a

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

De Moivre siguió utilizando la trigonometría para experimentar con números complejos que resolvieran ecuaciones polinómicas o facilitaran descomponer polinomios sin raíces reales en factores cuadráticos, como ya hiciera Cotes.

Leonhard Euler (1707.1783), uno de los más grandes matemáticos de la época, que realizó un sinnúmero de trabajos en distintas ramas de la matemática desde joven y a lo largo de su vida publicó más de 500 libros y artículos. Después de su muerte, siguieron apareciendo obras que se publicaron póstumamente. La obra de Euler *Introductio in analysin* se considera la piedra angular del nuevo análisis, vital en el desarrollo de la

matemática en el siglo XVIII. En lo que respecta a la trigonometría, para Euler el seno de un ángulo era indistintamente un segmento, sino simplemente un número, la ordenada de un punto de la circunferencia unidad, o el número definido por una serie infinita. Euler convirtió la trigonometría en una potente herramienta del análisis. Estos desarrollos en serie de las funciones trigonométricas fueron aplicados por Euler en el cálculo de la suma de series infinitas. Otra de las aplicaciones que Euler le dio a la trigonometría analítica está relacionado con el estudio de curvas planas, donde encontró expresiones que involucraban a las funciones circulares para representar de forma paramétrica diversas curvas conocidas, como la cicloide. Como último apunte de la aportación que Euler hizo a la trigonometría, cabe decir también que la notación que actualmente se utiliza para las funciones trigonométricas, sin, cos, tan, cot, sec, cosec se debe también a su obra *Introductio* en la cual utilizaba estas abreviaturas.

La trigonometría siguió y sigue siendo una herramienta fundamental en el análisis moderno. Los nuevos matemáticos de los últimos siglos han estado obligados a familiarizarse con las funciones trigonométricas, que aparecen en muy distintos ambientes: como coeficientes de los desarrollos en serie de funciones continuas, o bien como componentes de funciones solución de ecuaciones diferenciales o en derivadas parciales, implicadas en multitud de problemas relacionados con el estudio de los fenómenos físicos, también toman forma de las componentes de matrices correspondientes a giros en el plano y el espacio, etc.

1.2 ESTRUCTURA CONCEPTUAL

Siguiendo con el análisis de contenido, y, tras esta revisión del desarrollo histórico de la trigonometría, sigue a continuación un análisis de los conceptos y procedimientos que se ven involucrados en el proceso de aprendizaje y enseñanza de la trigonometría. En principio, este análisis está hecho sin tener en cuenta que la unidad didáctica va dirigida a alumnos de 4º de E.S.O., más adelante realizaré una concreción y seleccionaré de este análisis los conceptos y procedimientos oportunos para la enseñanza de la trigonometría a ese nivel.

El análisis está separado en conceptos y procedimientos, y dentro de estos grupos podemos observar tres niveles de complejidad. En lo conceptual distinguimos entre hechos, conceptos y estructuras, y, a su vez, dentro de la categoría con un nivel básico de complejidad, hechos, distingo entre términos, notaciones, convenios y resultados. En el campo procedimental, los tres niveles de dificultad considerados son: destrezas, razonamientos y estrategias.