

Algunos ejemplos de cálculo de derivadas

- $y = \sqrt{3x} \implies y' = \sqrt{3}$
- $y = \sqrt[5]{3x+1} \implies y' = \frac{3}{5\sqrt[5]{(3x+1)^4}}$
- $y = \frac{2}{x^6}$. Obsérvese que la función se puede escribir así: $y = 2\frac{1}{x^6}$. Entonces: $y' = 2\frac{-6}{x^7} = \frac{-12}{x^7}$
- $y = \frac{5x-1}{5x+1} \implies y' = \frac{5(5x+1) - (5x-1)5}{(5x+1)^2} = \frac{25x+5-25x+5}{(5x+1)^2} = \frac{10}{(5x+1)^2}$
- $y = \frac{2}{(x-1)^3} \implies y' = \frac{0(x-1)^3 - 2 \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{-6(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{-6}{(x-1)^4}$
- $y = x^3\sqrt{x^5} \implies y' = 3x^2\sqrt{x^5} + \frac{5x^7}{2\sqrt{x^5}} = \frac{6x^2 \cdot x^5}{2\sqrt{x^5}} + \frac{5x^7}{2\sqrt{x^5}} = \frac{6x^7+5x^7}{2\sqrt{x^5}} = \frac{11x^7}{2\sqrt{x^5}} = \frac{11x^7\sqrt{x^5}}{2x^5} = \frac{11x^2\sqrt{x^5}}{2} = \frac{11x^2 \cdot x^2\sqrt{x}}{2} = \frac{11x^4\sqrt{x}}{2}$

Esta derivada se podría haber hecho de otras dos formas distintas:

✓ Obsérvese que la función se puede escribir así: $y = x^3\sqrt{x^5} = x^3 \cdot x^{5/2} = x^{11/2}$. Entonces $y' = \frac{11}{2}x^{9/2} = \frac{11}{2}\sqrt{x^9} = \frac{11}{2}x^4\sqrt{x} = \frac{11x^4\sqrt{x}}{2}$

✓ La otra forma consiste en escribir la función introduciendo x^3 dentro del radical: $y = x^3\sqrt{x^5} = \sqrt{x^{11}}$. Entonces $y' = \frac{11x^{10}}{2\sqrt{x^{11}}} = \frac{11x^{10}\sqrt{x^{11}}}{2x^{11}} = \frac{11x^{15}\sqrt{x}}{2x^{11}} = \frac{11x^4\sqrt{x}}{2}$

- $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Utilizando que la derivada de $y = \frac{1}{f(x)}$ es $y' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$, se tiene que $y' = -\frac{\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}}{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2} = -\frac{\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}}{\frac{2}{x\sqrt[3]{x}}} = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x}}$

Pero quizás sea más fácil hacerlo así: $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-2/3} \implies y' = -\frac{2}{3}x^{-5/3} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x}}$

- $y = \frac{5x}{\sqrt{x}-5} \implies y' = \frac{5(\sqrt{x}-5) - 5x \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-5)^2} = \frac{10\sqrt{x}(\sqrt{x}-5) - 5x}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-5)^2} = \frac{10\sqrt{x}(\sqrt{x}-5) - 5x}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-5)^2} = \frac{10x(\sqrt{x}-5) - 5x\sqrt{x}}{2x(\sqrt{x}-5)^2} = \frac{10x\sqrt{x} - 50x - 5x\sqrt{x}}{2x(\sqrt{x}-5)^2} = \frac{5x\sqrt{x} - 50x}{2x(\sqrt{x}-5)^2} = \frac{5(\sqrt{x}-10)}{2(\sqrt{x}-5)^2}$

$$\bullet y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^4} - \frac{3x^2}{x^6} = y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4} = \frac{-x^2 - 2x - 3}{x^4}$$

También se puede hacer escribiendo $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \frac{x^2 + x + 1}{x^3}$, y aplicando la regla de derivación de un cociente: $y' = \frac{(2x+1)x^3 - (x^2+x+1)3x^2}{x^6} = \frac{x^2((2x^2+x) - (3x^2+3x+3))}{x^6} = \frac{-x^2-2x-3}{x^4}$

$$\bullet y = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \Rightarrow y' = \frac{-2(x^2-1)^2 - (-2x \cdot 2(x^2-1)2x)}{(x^2-1)^4} = \frac{-2(x^2-1)^2 + 8x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{-2(x^2-1)(x^2-1-4x^2)}{(x^2-1)^4} = \frac{-2(-3x^2-1)}{(x^2-1)^3} = \frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

$$\bullet y = \frac{\sqrt{x}}{e^x} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^x - \sqrt{x}e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x - 2xe^x}{2e^{2x}\sqrt{x}} = \frac{e^x(1-2x)}{2e^{2x}\sqrt{x}} = \frac{1-2x}{2e^x\sqrt{x}}$$

$$\bullet y = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\bullet y = \sqrt{x + \sqrt{x}} \Rightarrow y' = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$$

$$\bullet y = \frac{x+1}{x+2}(2x-5) \Rightarrow y' = \left(\frac{(x+2) - (x+1)}{(x+2)^2} \right) (2x-5) + \frac{x+1}{x+2} \cdot 2 = \frac{2x-5}{(x+2)^2} + \frac{2x+2}{x+2} = \frac{2x-5 + (2x+2)(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{2x-5 + 2x^2 + 4x + 2x + 4}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 8x - 1}{(x+2)^2}$$

$$\bullet y = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3) \Rightarrow y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(\sqrt{x} + 3) + \sqrt[3]{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + 3}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} + 3)\sqrt[3]{x}}{3x} + \frac{\sqrt[3]{x}\sqrt{x}}{2x} = \frac{2\sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3) + 3\sqrt[3]{x}\sqrt{x}}{6x} = \frac{\sqrt[3]{x}(2\sqrt{x} + 6 + 3\sqrt{x})}{6x} = \frac{\sqrt[3]{x}(5\sqrt{x} + 6)}{6x}$$

$$\bullet y = \sqrt{\frac{1}{x^2-2}} \Rightarrow y' = \frac{-\frac{2x}{(x^2-2)^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x^2-2}}} = \frac{-\frac{2x}{(x^2-2)^2}}{\frac{2}{\sqrt{x^2-2}}} = -\frac{x\sqrt{x^2-2}}{(x^2-2)^2} = -\frac{x(x^2-2)}{(x^2-2)^2\sqrt{x^2-2}} = -\frac{x}{(x^2-2)\sqrt{x^2-2}}$$

$$\bullet y = x^2(x-2)^4 \Rightarrow y' = 2x(x-2)^4 + x^2 4(x-2)^3 = 2x(x-2)^3(x-2+2x) = 2x(x-2)^3(3x-2)$$

$$\bullet y = \sqrt{\frac{\sin x}{x}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\sin x}{x}}} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \sqrt{\frac{x}{\sin x}} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2}$$