Cuadernillo de Integrales

Curso Cero Universitario

o

Unidad Didáctica de 2º de Bachillerato

María Magdalena Martínez Rico y Luis Felipe Prieto Martínez

Cuadernos de Matemáticas en Arquitectura e Ingeniería CMat_03

POLITÉCNICA

CUADERNILLO DE INTEGRALES. CURSO CERO UNIVERSITARIO O UNIDAD DIDÁCTICA DE 2º DE BACHILLERATO.

Serie: Cuadernos de Matemáticas en Arquitectura e Ingeniería
Materia: Cálculo
Número: CMat_03
Autores: María Magdalena Martínez Rico (Profesora de Enseñanza Secundaria y Bachillerato)
Luis Felipe Prieto Martínez (Profesor Ayudante Doctor)
ISSN: 2952-5837

Coordinación y edición: Ester Patiño Rodríguez

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA, ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA DE MADRID DE LA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Versión 1.0, Junio 2023.

La plantilla de LaTeXutilizada para elaborar este libro se ha descargado de
https://www.latextemplates.com/template/legrand-orange-book

Índice

Introducción

Hace mucho tiempo uno de nosotros escuchó en una conferencia en la Universidad Autónoma de Madrid que, en algunas regiones de Asia, era frecuente enseñar a operar (números y expresiones algebraicas) a los alumnos durante su enseñanza primaria sin dotar a las operaciones de ningún tipo de sentido. Una vez que los alumnos se manejaban con soltura con las operaciones, comenzaban su enseñanza secundaria y entonces se les explicaba el significado de lo que habían estado haciendo.

Este método tiene sus pros y sus contras pedagógicas, pero es el que se suele seguir para explicar las integrales en 2º de Bachillerato en España.

- En primer lugar, se aprende a calcular integrales (indefinidas): la integral (indefinida) de una función $f(x)$ es el conjunto de funciones cuya derivada es $f(x)$. Para remarcar esta idea, hemos titulado al primero de los capítulos "Cálculo de Antiderivadas".
- En segundo lugar, se explica el *Teorema Fundamental del Cálculo* y la *Regla de Barrow*, que le dan un sentido geométrico a los cálculos del punto anterior. De nuevo, para dejar esto claro, hemos llamado al segundo de los capítulos "Interpretación Geométrica de las Integrales".

Una de las pegas de esta aproximación es que es bastante contraria al desarrollo histórico: la interpretación geométrica es anterior y fue el *Teorema Fundamental del Cálculo* el que motivó el estudio de los métodos de cálculo de antiderivadas. En cualquier caso, quizás sea la forma más rápida de presentar los contenidos.

Estructura del texto

Como ya hemos avanzado, el texto se divide en dos capítulos. El primero tiene tres secciones y el segundo sólo una. Cada sección comienza con algo de teoría y unos cuantos ejercicios resueltos y acaba (excepto la última) con varios ejercicios propuestos. Por último, al final de cada capítulo, se puede encontrar una abundante lista de ejercicios. Se ha intentado, en la medida de lo posible, que los ejercicios procedan de las Pruebas de Acceso a la Universidad.

Este cuaderno incluye también un Anexo con una tabla de derivadas, algunas identidades trigonométricas e información sobre una página web que puede utilizarse para practicar.

Este texto tiene la estructura de un "cuadernillo" o "workbook": detrás de cada ejercicio propuesto hay un hueco para que el alumno pueda resolverlo.

Cómo usar este cuadernillo

Para el primero de los usos que se cita en el título (el de Curso Cero Universitario) estas notas se pueden usar de forma autodidacta. En el segundo de los supuestos, en nuestra opinión se requiere algo de ayuda por parte del profesor. En cualquiera de los dos casos, recomendamos hacer todos los ejercicios propuestos.

Se incluyen bastantes ejercicios resueltos. No obstante, no incluimos las soluciones de los demás. Hemos hecho esto así deliberadamente para que (1) nadie caiga en la tentación de "supervisar las soluciones" y no hacer los ejercicios y (2) los alumnos se acostumbren a utilizar recursos informáticos para corregir sus ejercicios (ver Anexo).

Punto de Partida

Se asume que, en el momento de trabajar con este texto, el alumno conoce el concepto de *función elemental*. Como va a aparecer muchas veces en las próximas páginas, lo recordamos a continuación. Esta definición no es del todo "canónica", pero es aceptable para lo que vamos a hacer aquí.

Definición 1 Las **funciones elementales básicas** son: las **constantes**, los **polinomios**, las **potenciales** (x^n, $n \in \mathbb{R}$), las **exponenciales** (a^x, $a \in \mathbb{R}_{>0}$), las **logarítmicas** ($\log_a(x)$, $a \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \{1\}$) y las **trigonométricas** y sus inversas composicionales ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$).

Las **funciones elementales** son aquellas que se pueden obtener de las anteriores combinándolas mediante sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, composición de funciones e inversas composicionales.

Los alumnos deben saber:

- hacer esbozos razonables de estas funciones elementales,
- que las funciones elementales son continuas allá donde están definidas y
- derivar funciones elementales.

A modo de pequeña ayuda para este último punto, se incluye en el Anexo una tabla con las derivadas de las funciones elementales básicas y las reglas de derivación correspondientes a las operaciones suma, resta, multiplicación, división, composición de funciones e inversión composicional. Toda esta información junta permite calcular la derivada de cualquier función elemental.

Integration Bee

El *Integration Bee* es una competición anual de cálculo de integrales (indefinidas y definidas), creada en 1981 por Andy Bernoff para los estudiantes de matemáticas del MIT (*Massachusetts Institute of Technology*, una de las más prestigiosas universidades de acuerdo con los *rankings* internacionales). En su página web `https://math.mit.edu/~yyao1/integrationbee.html` se pueden encontrar todavía más integrales para prácticar, algunas de ellas realmente complicadas. Además, la competición tiene un formato bastante espectacular, que acaba en un torneo final que se retransmite en *YouTube* en el canal *MIT Integration Bee*.

Recomendaciones Impresión

No es necesario imprimir este texto a color. Pero recomendamos imprimir estas notas eligiendo la opción "cuadernillo" o "folleto" en la impresora y utilizando papel tamaño A3. Así, después, se podrán doblar los papeles A3 por la mitad y se podrá trabajar sobre el resultado sin necesidad de encuadernar (se puede grapar).

Los autores

1. Cálculo de Antiderivadas

Como ya hemos dicho y volveremos a repetir por tercera vez enseguida, una *antiderivada* o *primitiva* de una función $f(x)$ es otra función $F(x)$ cuya derivada es $f(x)$, esto es, $F'(x) = f(x)$. Dicho lo cual, en este capítulo estudiaremos el problema de calcular las antiderivadas de algunas funciones elementales. Aprenderemos tres métodos para hacer esto:

- Integrales Inmediatas,
- Integrales por Cambio de Variable e
- Integrales por Partes.

Existen muchos otros métodos que no veremos aquí (como el *Método de Descomposición en Fracciones Simples*). En la siguiente sección pondremos en contexto el alcance de lo que aprenderemos a hacer.

1.1. Cuestiones Básicas e Integrales Inmediatas

Definición 2 Dada una función elemental $f(x)$ una **primitiva** o **antiderivada** es otra función $F(x)$ que cumple $F'(x) = f(x)$.

Una función $f(x)$ tiene, en general, infinitas primitivas pero todas ellas difieren únicamente en una constante. Al conjunto de todas las primitivas de $f(x)$ se le suele denotar por $\int f(x)dx$ y se le llama **integral indefinida**. De esta forma, por ejemplo, si tomamos la función $f(x) = 2x$, una posible primitiva es $F_1(x) = x^2$ pero otra posible primitiva es $F_2(x) = x^2 + 1$. El conjunto de todas las posibles primitivas es

$$\int 2xdx = x^2 + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Como consecuencia de las propiedades de la derivada, la integral indefinida cumple lo siguiente:

Teorema 1 — Propiedades de la Integral. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas y sea λ un número real. Se cumplen las siguientes propiedades:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \left(\int f(x)dx\right) + \left(\int g(x)dx\right), \qquad \int (\lambda f(x))dx = \lambda \cdot \left(\int f(x)dx\right).$$

Integrales y Funciones Elementales

Dada una función elemental, existe un método ordenado para calcular su derivada que seguro que ya conoces. La derivada de una función elemental es siempre una nueva función elemental. Pero no todo es tan sencillo cuando se trata de integrales.

Teorema 2 No todas las funciones elementales tienen una primitiva que sea una función elemental. Algunos ejemplos son

$$\int e^{x^2} dx, \qquad \int \sin(x^2)dx, \qquad \int e^{\cos x}dx, \qquad \int \ln(\ln(x))dx.$$

Existe un método general llamado **Algoritmo de Risch** que permite decidir si una función elemental tiene una primitiva elemental y, si es así, calcularla.

! De entre aquellas funciones que sí tienen una primitiva elemental, nosotros no vamos a aprender a calcular la primitiva de todos los casos. Sólo aprenderemos algunos *métodos de integración* que valen para algunas situaciones: *integrales inmediatas*, *integración por cambio de variable* e *integración por partes*.

Integrales inmediatas

Las integrales inmediatas son aquellas que puden obtenerse “a ojo” simplemente conociendo la tabla de derivadas. Ese es el caso del ejemplo anterior

$$\int 2xdx = x^2 + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Ejercicios Resueltos

Ejercicio Resuelto 1 $\int 8x dx$.
Nos fijamos primero en la parte literal de ese monomio, luego ajustaremos el coeficiente. La parte literal x debe venir de derivar algo parecido a x^2. Al derivar x^2 no obtenemos x, sino $2x$. No importa ya que, como hemos dicho, podemos sacar los números fuera de la integral:

$$\int 8x dx = 4 \cdot \int 2x dx = 4x^2 + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio Resuelto 2 $\int (5x^2 - 8x + 3) dx$.
En primer lugar utilizamos las propiedades de la integral:

$$\int (5x^2 - 8x + 3) dx = \left(5 \int x^2 dx\right) - \left(8 \int x dx\right) + \left(3 \int dx\right).$$

Después utilizamos la misma idea que en el ejercicio anterior. Nótese que, en general, la integral de cualquier función potencial es $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

$$5 \int x^2 dx - 8 \int x dx + 3 \int dx = 5\frac{x^3}{3} - 8\frac{x^2}{2} + 3x + C = \frac{5}{3}x^3 - 4x^2 + 3x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio Resuelto 3 $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Ejercicio Resuelto 4 $\int 2e^x dx = \int 2e^x dx = 2 \int e^x dx = 2e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Ejercicio Resuelto 5 $\int \frac{5x^4 - 8x + 3}{x^2} dx$.
A veces, las integrales inmediatas requieren una manipulación previa al cálculo de la integral. Aquí aparece otra fórmula que debemos conocer: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

$$\int \frac{5x^4 - 8x + 3}{x^2} dx = \int \left(\frac{5x^4}{x^2} - \frac{8x}{x^2} + \frac{3}{x^2}\right) dx = \left(5 \int x^2 dx\right) - \left(8 \int \frac{1}{x} dx\right) + \left(3 \int \frac{1}{x^2} dx\right) =$$

$$= \frac{5}{3}x^3 - 8\ln|x| - \frac{3}{x} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio Resuelto 6 $\int \cos(2x) dx = \frac{\sin(2x)}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Ejercicio Resuelto 7 $\int x(x^2 - 3)^2 dx$.
Nótese que, en este caso, tenemos un paréntesis elevado a una potencia y multiplicado por "casi" la derivada de "lo de dentro". La expresión $x(x^2 - 3)^2$ será la derivada de otra expresión del tipo $A(x^2 - 3)^3$, donde deberemos decidir el valor del número A. Para ajustar dicho valor, tenemos que derivar esta última expresión: $(A(x^2 - 3)^3)' = 6Ax(x^2 - 3)^2$.

$$\int x(x^2 - 3)^2 dx = \frac{1}{6}(x^2 - 3)^3 + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Ejercicios Propuestos

Ejercicio 1 $\int \left(2x^3 - x + \frac{3}{x}\right) dx =$

Ejercicio 2 $\int \frac{8}{x^3} dx =$

Ejercicio 3 $\int \left(\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$ (pista: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$).

Ejercicio 4 $\int x(\sqrt{x^2 - 3}) dx =$

Ejercicio 5 $\int (x-2)^2 dx =$

Ejercicio 6 $\int (3x-5)^7 dx$ (pista: no desarrolles, ¿cuánto vale la derivada de “lo de dentro”?).

Ejercicio 7 $\int (\sin 2x + 5\cos(x-1))\,dx =$

Ejercicio 8 $\int xe^{x^2}\,dx =$

Ejercicio 9 $\int \tan x dx$ (pista: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \sin x (\cos x)^{-1}$).

Ejercicio 10 — Murcia 2016. $\int \dfrac{x^3+x+1}{x^2+1} dx =$

Ejercicio 11 $\int \cos^2(x) dx$ (pista: utiliza la fórmula del coseno del ángulo doble, ver Anexo).

Ejercicio 12 $\int \sqrt{1-\cos x} dx$ (pista: multiplica y divide por la raíz del conjugado).

1.2. Cambio de Variable o Método de Sustitución

Ya hemos explorado en la sección anterior el uso de la *Regla de la Cadena* (ver Anexo) para el cálculo de integrales (véase el Ejercicio Resuelto 7, en el que aparecía una función compuesta y "la derivada de lo de dentro"). La manera correcta de enunciar este método es la siguiente:

Teorema 3 Dadas dos funciones continuas $f(x)$ y $\varphi(x)$, la segunda de ellas derivable, se tiene:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \overset{u=\varphi(x),du=\varphi'(x)dx}{=\!=\!=\!=\!=} \int f(u)du$$

La segunda de las integrales hace referencia a una nueva variable independiente u, pero se calcula exactamente igual que las integrales que hemos visto en la sección anterior y da como resultado una función cuya variable independiente es u. No debemos olvidar que la respuesta final debe darse en función de la variable original (x en este caso). A esto se le llama **deshacer el cambio de variable**.

Cambios de variable "con pista"

Si la única forma de utilizar los cambios de variable fuera la que aparece en el teorema anterior, el método sería poco más que un truco notacional. Para varios tipos de integrales, se conocen algunos cambios de variable que las convierten en inmediatas. Estos cambios de variable no son siempre triviales de encontrar.

! Existen varios criterios conocidos que, a la vista de una integral concreta, sugieren uno u otro cambio de variable. En este texto, nosotros no vamos a incluir esos criterios y tampoco pretendemos que los alumnos los conozcan. En su lugar, sí que incluiremos algunos ejercicios en los que se indica en el enunciado el cambio de variable que se debe realizar.

Cambio directo e inverso

Suponiendo que conocemos el cambio de variable adecuado, este cambio no siempre es el

- **cambio directo**, esto es, aquel en el que la nueva variable u aparece descrita en términos de la variable original x ($u = \varphi(x), du = \varphi'(x)du$ como se indica en el Teorema 3),

sino el

- **cambio inverso**, esto es, aquel en el que la variable original x aparece descrita en términos de la variable nueva u ($x = \phi(u), dx = \phi'(u)du$).

! No existe una "postura oficial" sobre cuál de los dos cambios se llama "directo" y cuál se llama "inverso".

En los casos más sencillos de integrales por cambio de variable, es posible obtener el cambio inverso a partir del cambio directo, o al revés (ya que a lo largo del proceso son necesarios los dos para hacer y deshacer el cambio). En el resto de casos, se requiere algún otro tipo de observación extra para hacer alguna de las dos manipulaciones.

Ejercicios Resueltos

Ejercicio Resuelto 8 Calcula, utilizando un cambio de variable, la integral $\int 2x\sin(x^2)dx$.
Hacemos el cambio de variable $u = x^2$ y como $du = 2xdx$ tenemos que:

$$\int 2x\sin(x^2)dx = \int \sin(u)du = -\cos(u) + C = -\cos(x^2) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Habitualmente, suele escribirse $du = \varphi'(x)dx$. Nosotros no vamos a darle ninguna interpretación a esta expresión, que entenderemos sólo como una cuestión de notación.

Ejercicio Resuelto 9 Resuelve la integral $\int \sqrt{4-x^2}dx$ utilizando el cambio de variable $x = 2\sin u$, donde $-\pi/2 \le u \le \pi/2$ (pista: usa la fórmula del coseno del ángulo doble).

$$I = \int \sqrt{4-4x^2}dx \overset{x=2\sin u,\ dx=2\cos u du}{=\!=\!=\!=\!=} \int \sqrt{4-4\sin^2 u}\cdot 2\cos u du = 4\int \cos^2 u du.$$

Utilizando la *Fórmula del Coseno del Ángulo Doble* ($\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u$) y la *Identidad Fundamental de la Trigonometría* ($\cos^2 + \sin^2 u = 1$) vemos que $\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$ y, por tanto:

$$I = 4\int \frac{1+\cos(2u)}{2} u du = 2u + \sin(2u) + C = 2u + 2\sin u\cos u + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Falta deshacer el cambio de variable: $x = 2\sin u \Rightarrow \frac{x}{2} = \sin u \Rightarrow \begin{cases} \arcsin\frac{x}{2} = u \\ \cos u = \sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \end{cases}$

$$I = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}x(\sqrt{4-x^2}) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio Resuelto 10 Calcula la integral $\int \sqrt{e^x-1}dx$ utilizando el cambio $t = \sqrt{e^x-1}$.
No es inmediato sustituir el cambio de variable. Primero necesitamos despejar x en función de t en la expresión que nos dan: $x = \ln(t^2+1)$. Ahora:

$$I = \int \sqrt{e^x-1}dx \overset{x=\ln(t^2+1),\ dx=\frac{2t}{t^2+1}dt}{=\!=\!=\!=\!=} \int t\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt = \int \frac{2t^2}{t^2+1}dt.$$

Para calcular esa integral, dividimos esos dos polinomios:

$$I = \int \frac{2t^2}{t^2+1} = \int \left(2 - 2\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 2t - 2\arctan t + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

No nos olvidemos de deshacer el cambio:

$$I = \int \sqrt{e^x-1}dx = 2\sqrt{e^x-1} - 2\arctan\sqrt{e^x-1} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Ejercicios Propuestos

Ejercicio 13 Calcula la siguiente integral indefinida haciendo el cambio de variable $t = 1+\sqrt{x}$:
$\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

Ejercicio 14 Calcula la siguiente integral indefinida haciendo el cambio de variable $u = e^x$:
$\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$

Ejercicio 15 — Murcia 2021. Calcula la integral indefinida $\displaystyle\int x\sin(x^2)dx$ utilizando el Método de Cambio de Variable (o Método de Sustitución).

Ejercicio 16 — Murcia 2019. Calcula la integral indefinida $\displaystyle\int \sin x e^{\cos x}dx$ utilizando el Método de Cambio de Variable (o Método de Sustitución).

Ejercicio 17 — Similar a Murcia 2018. Calcula la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx$ utilizando el Método de Cambio de Variable (o Método de Sustitución).

Ejercicio 18 — Galicia 2022. $\int \sin x \cdot \sin(\cos x)dx =$

Ejercicio 19 — Galicia 2022. $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx =$

Ejercicio 20 — Murcia 2018. Calcula la siguiente integral indefinida $\int \frac{\cos x \sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$. Obtén una primitiva $F(x)$ de $\frac{\cos x \sin^2 x}{1+\sin^2 x}$ que cumpla $F(\pi/2) = 1$ (pista: utiliza el cambio de variable $t = \sin x$).

Ejercicio 21 — Murcia 2012. De todas las primitivas de la función $\frac{e^{2x}}{1+e^x}$ encuentra la que pasa por $(0,1)$ (pista: utiliza el cambio de variable $t = e^x$).

Ejercicio 22 — Murcia 2012. Calcula $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ (pista: utiliza el cambio de variable $x = t^2$).

1.3. Integración por Partes

En esta sección hablaremos de algunos trucos para integrar productos de funciones.

! En general, $\int f(x)g(x)dx \neq \left(\int f(x)dx\right)\cdot\left(\int g(x)dx\right)$.

Tenemos el siguiente resultado que es una consecuencia de la *Fórmula de Leibniz* (ver Anexo):

Teorema 4 Dadas dos funciones continuas y derivables $u(x), v(x)$ tenemos que:

$$\int u(x)\underbrace{v'(x)dx}_{dv} = u(x)v(x) - \int v(x)\underbrace{u'(x)dx}_{du}$$

El Método de Integración por Partes se utiliza principalmente en los siguientes casos:

1. Cuando queremos integrar el producto de dos funciones (quizás alguna sea 1, y no "se vea"), una de las cuales es "fácil de integrar" (dv), la otra es "fácil de derivar" (u) y tales que el producto de los resultados de estas operaciones (vdu) es también "fácil" (o "más fácil") de integrar. Los principales ejemplos son:

$$\int \text{polinomio}\cdot\text{exponencial}\ dx, \qquad \int \text{polinomio}\cdot\sin(x)\ dx \qquad \int \text{polinomio}\cdot\cos(x)\ dx$$

$$\int (\text{función arco})dx, \qquad \int \text{logaritmo}\ dx.$$

2. Cuando es posible, repitiendo el proceso una o más veces, obtener una expresión que contenga la integral inicial, de manera que esta pueda "despejarse". Este es el caso de:

$$\int \sin(x)e^x dx, \qquad \int \cos(x)e^x dx, \qquad \int \sin^n(x)dx, \qquad \int \cos^n(x)dx.$$

Ejercicios Resueltos

Ejercicio Resuelto 11 Calcula la integral indefinida $\int x^2 e^x dx$ cuya gráfica pasa por el punto $(0,1)$.
Utilizamos integración por partes. La función que vamos a derivar es $u(x) = x^2$ (ya que al derivar un polinomio siempre nos queda uno de menor grado) y la que vamos a integrar es $v'(x) = e^x$ (porque integrar una exponencial no nos va a complicar la expresión).

$$\int x^2 e^x dx \overset{u=x^2,\, dv=e^x dx}{=\!=\!=\!=\!=} x^2 e^x - 2\int e^x \cdot x dx\ .$$

La integral que hemos obtenido en el segundo miembro es más sencilla que la original, pero va a necesitar que apliquemos el Método de Integración por Partes otra vez:

$$\int e^x \cdot x dx \overset{u=x,\, dv=e^x dx}{=\!=\!=\!=\!=} xe^x - \int e^x dx\ = xe^x - e^x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Por último, uniendo todo, llegamos a

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x + C) = (x^2 - 2x + 2)e^x - C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

De entre todas esas primitivas, aquella cuya gráfica pasa por el punto $(0,1)$ es la función $F(x)$ que cumple que

$$F(0) = (0^2 - 0 + 2)e^0 - C = 2 - C = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = (x^2 - x + 1)e^x - 1.$$

Ejercicio Resuelto 12 — Madrid 2012. Calcula, utilizando el método de integración por partes, la primitiva $g(x)$ de la función $\cos^2 x$ que cumple $g(\pi/4) = 0$.
Es posible resolver la integral como una integral inmediata (de hecho es uno de los ejercicios propuestos de la sección correspondiente), pero la vamos a resolver por el método de integración por partes:

$$\int \cos^2 x dx \overset{u=\cos x,\, dv=\cos x dx}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \cos x \sin x + \int \sin x \sin x dx = \cos x \sin x + \int (1 - \cos^2 x) dx =$$

$$= \cos x \sin x + x - \int \cos^2 x dx.$$

Si definimos $I = \int \cos^2 x dx$, hemos llegado a la ecuación:

$$I = \cos x \sin x + x - I \Rightarrow 2I = \cos x \sin x + x + C,\ C \in \mathbb{R} \Rightarrow I = \int \cos^2 x dx = \frac{\cos x \sin x + x}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

De entre todas las primitivas, buscamos $g(x)$:

$$g(\pi/4) = \frac{\cos(\pi/4)\sin(\pi/4) + \pi/4}{2} + C = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}}{2} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{\pi + 2}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{\cos x \sin x + x}{2} - \frac{\pi + 2}{8}.$$

Ejercicios Propuestos

Ejercicio 23 — Murcia 2014. $\int \arctan x dx =$

Ejercicio 24 $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx =$

Ejercicio 25 $\int (\ln(x))^2 dx =$

Ejercicio 26 $\int \sin x \cdot \ln(\cos x) dx =$

Ejercicio 27 $\int \cos^3 x dx =$

Ejercicio 28 $\int \cos(x) e^x dx =$

Ejercicio 29 — Murcia 2021. Calcula la integral indefinida $\int x^2 \ln x dx$. Determina la primitiva de la función $f(x) = x^2 \ln x$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(1,0)$.

Ejercicio 30 — Similar a Madrid 2013. $\int \ln(x)dx =$

Ejercicio 31 — Murcia 2020. $\int ln(1+x^2)dx =$

Ejercicio 32 — Murcia 2017. $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx =$

Ejercicio 33 — Murcia 2017. $\int x \sin \frac{\pi x}{2} dx =$

Ejercicio 34 — Murcia 2015. De todas las primitivas de la función $2x\arctan x$, encuentra aquella cuya gráfica pasa por el punto $(0,-2)$.

Ejercicios Finales

Ejercicio 35 — Similar a Madrid 2020. Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide calcular $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$.

Ejercicio 36 — Madrid 2019. Calcula la integral $\int (\sin x)^4 (\cos x)^3 dx$ (pista: se puede usar el cambio de variable $t = \sin x$).

Ejercicio 37 — Similar a Madrid 2017. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + x + 6}{x - 2}$ se pide calcular $\int f(x) dx$.

Ejercicio 38 — Murcia 2016. $\int \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} dx =$

Ejercicio 39 — Murcia 2016. $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx =$

Ejercicio 40 Busca un polinomio $p(x)$ tal que no sepas calcular la integral indefinida $\int \frac{1}{p(x)}dx$ con los métodos que hemos explicado aquí. Utiliza *Wolfram Alpha* (ver Anexo) para intentar resolver la integral del ejempo que has propuesto. ¿Ha sido capaz el programa de calcular la integral? ¿El resultado es una función elemental?

Ejercicio 41 — Murcia 2015. De entre todas las primitivas de la función $f(x) = \tan^2(x)$, encuentra aquella cuya gráfica pasa por el punto $(\pi/4, 1)$.

Ejercicio 42 — Murcia 2014. $\int x\cos x dx =$

Ejercicio 43 — Madrid 2017. $\int (3u+1)\cos(2u)du =$

Ejercicio 44 — Murcia 2014-Madrid 2012. $\int x^2 \sin x dx =$

Ejercicio 45 — Murcia 2008. $\int \frac{x^3+1}{x^2+1}dx =$

Ejercicio 46 — Madrid 2009. Resuelve las siguientes integrales:

$\int (2x+1)^3 dx =$

$\int x^3 e^{x^4} dx =$

$\int 2^x dx =$

$\int \frac{1+x+x^4}{x^3}dx =$

Ejercicio 47 — Madrid 2013. $\int \frac{x-3}{x^2+9}dx =$

Ejercicio 48 — Madrid 2015. $\int (3x+5)\cos x dx =$

Ejercicio 49 — Madrid 2015. $\int \left(\frac{x}{x^2-4} - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx =$

2. Interpretación Geométrica de las Integrales

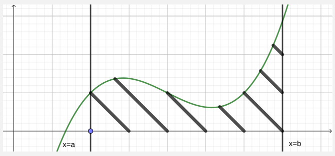
Este capítulo está relacionado con el **Problema del Calculo Integral**: calcular el área encerrada en una región del plano. Este problema se puede resolver, en muchos casos importantes, mediante el uso de *integrales definidas*.

El *Problema del Cálculo Integral* se relaciona con el *Problema del Cálculo Diferencial* a través del *Teorema Fundamental del Cálculo*. Por eso, ambos problemas se estudian en la Universidad en una misma asignatura, llamada “Cálculo”. El objeto fundamental de estudio de esta asignatura es, en teoría, el de *límite* que, de alguna manera, engloba a las *derivadas* (vía el límite del cociente incremental) y a las *integrales* (vía las *Sumas de Riemann*, que no se estudian en 2º de Bachillerato).

La forma más sencilla de calcular una integral definida es, como explicaremos enseguida, calcular previamente la integral indefinida correspondiente. ¿Qué se hace, entonces, con las integrales definidas correspondientes a una integral indefinida que no se puede expresar en términos de funciones elementales? Afortunadamente, calcular la integral indefinida no es la única opción: es posible dar una aproximación del valor de una integral definida utilizando diferentes métodos numéricos. No estudiaremos nada de esto aquí, pero es un tema muy interesante sobre el que, esperamos, aprenderás más en los próximos cursos.

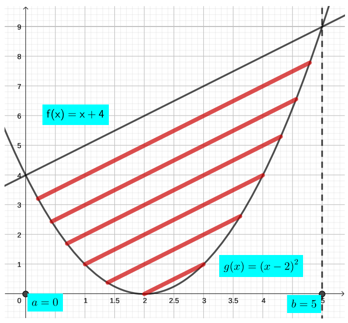
2.1. Teorema Fundamental del Cálculo

Definición 3 Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua y de signo constante. La **integral definida** $\int_a^b f(x)dx$ es el **área con signo** limitada por la gráfica, el eje OX y las rectas $x=a$ y $x=b$: el signo del área es positivo si la gráfica queda por encima del eje y negativo si queda por debajo.



En general, si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua, no necesariamente positiva y que corta al eje OX en un conjunto finito de puntos $a_1,\ldots,a_n$, se define la integral definida como

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \ldots + \int_{a_n}^{b} f(x)dx.$$



Como consecuencia de lo anterior, si f,g son dos funciones continuas que sólo se intersecan en dos puntos de abscisas a,b de forma que la gráfica de f queda por encima de la gráfica de g en el intervalo $[a,b]$, entonces el área de la región delimitada por las dos curvas es $\int_a^b (f(x)-g(x))dx$.

Teorema 5 — Teorema Fundamental del Cálculo. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$.

(1) Para $x\in[a,b]$, definimos $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. $F(x)$ es diferenciable en (a,b) y, para todo $c\in(a,b)$, $F'(c)=f(c)$.

(2) **(Regla de Barrow)** Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

Es habitual utilizar la notación $[F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$.

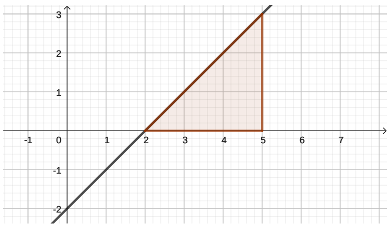
Teorema 6 — Propiedades de la Integral. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $[a,b]$, λ un número real, $c\in(a,b)$ y φ una función diferenciable en $[a,b]$. Se cumple que:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right) + \left(\int_a^b g(x)dx\right), \qquad \int_a^b (\lambda f(x))dx = \lambda\cdot\left(\int_a^b f(x)dx\right),$$

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\int_a^c f(x)dx\right) + \left(\int_c^b f(x)dx\right), \quad \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \overset{u=\varphi(x),\ du=\varphi'(x)dx}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du\,.$$

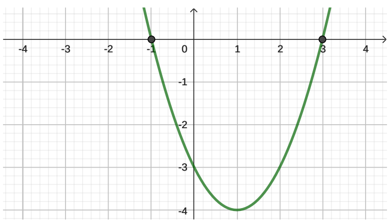
Ejercicios Resueltos

Ejercicio Resuelto 13 Calcula $\int_2^5 (x-2)dx$ (a) utilizando la definición y (b) utilizando la Regla de Barrow.
(a) La gráfica de la función $x-2$ es una recta que corta al eje OX en el punto $(2,0)$ y tiene pendiente 1. Por lo tanto $\int_2^5 (x-2)dx = \frac{9}{2}$ ya que es el área de un triángulo de base 3 y altura 3.



(b) Por otro lado, $\int_2^5 (x-2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^5 = \left(\frac{25}{2} - 10\right) - \left(\frac{4}{2} - 4\right) = \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2}$.

Ejercicio Resuelto 14 Calcular el área comprendida entre el eje OX y la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$.
La función $f(x)$ es una parábola y, junto con el eje OX delimita una única región acotada. Para hallar su área, necesitamos saber los puntos donde la gráfica de $f(x)$ y el eje OX se cortan, que son aquellos cuya abscisa satisface: $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1, 3$.



Nótese que la parábola "mira hacia arriba" por lo tanto $\int_{-1}^3 f(x)dx$ es el valor del área que buscamos, pero cambiado de signo. El área es

$$-\left(\int_{-1}^3 f(x)dx\right) = -\left(\left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-1}^3\right) = -[(9-9-9) - (-\frac{1}{3} - 1 + 3)] = 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}.$$

Ejercicio Resuelto 15 Calcular el área comprendida entre las curvas $y = (x-2)^2$, $y = x+4$.
La situación está representada en la segunda de las imágenes de la página anterior. Esas dos curvas son una parábola de vértice en $(2,0)$ que "mira hacia arriba" y una recta que pasa por $(0,4)$ y tiene pendiente 1. Se cortan en dos puntos cuyas abscisas son los valores de x que cumplen $(x-2)^2 = x+4 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 5$. En el intervalo $[0,5]$ es la gráfica de la recta la que "queda por encima" Por lo tanto, el área que nos piden se puede calcular como

$$\int_0^5 \left((x+4) - (x-2)^2\right) dx = \int (-x^2 + 5x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2\right]_0^5 = \left(-\frac{125}{3} + \frac{125}{2}\right) = \frac{125}{6}.$$

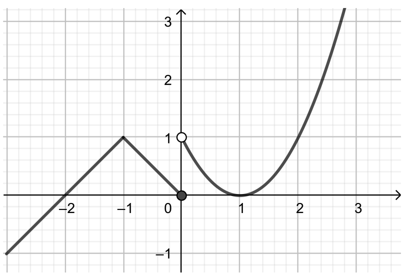
Ejercicio Resuelto 16 $\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\sin(x^2)dx \overset{u=x^2,\ du=2xdx}{=\!=\!=} \int_0^{\pi} \sin u du = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 2.$

Ejercicios Finales

Ejercicio 50 Calcula el área comprendida entre las curvas $y = -x^2 + x + 5$, $y = x^2 - 3x - 25$.

Ejercicio 51 — Madrid 2020. Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx$.

Ejercicio 52 — Madrid 2018. Usando la gráfica de la función $f(x)$ que aparece abajo, se pide determinar el valor de $\int_{-2}^{0} f(x) dx$.



Ejercicio 53 — Madrid 2019. Dada $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, donde "ln" denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$, se pide calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.

Ejercicio 54 — Madrid 2018. Dada la función $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$, se pide hallar el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

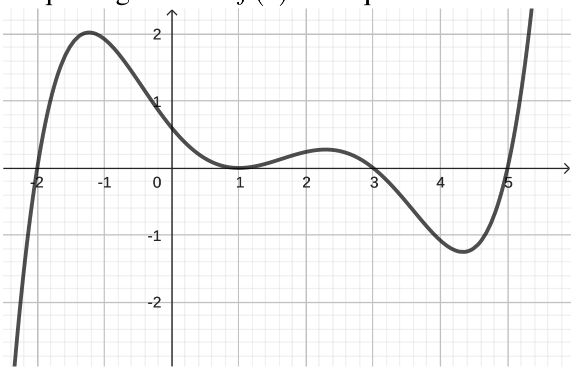
Ejercicio 55 — Madrid 2017. Se pide calcular $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)dx$ donde $f(x) = \begin{cases} xe^{2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Ejercicio 56 — Madrid 2017. $\displaystyle\int_{3}^{5} \frac{x^2+x+6}{x-2} dx =$

Ejercicio 57 — Madrid 2017. Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{x}$, se pide calcular el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = -x + 3$.

Ejercicio 58 Calcula el área A encerrada entre la curva $y = 1 - x^2$ y el eje OX.

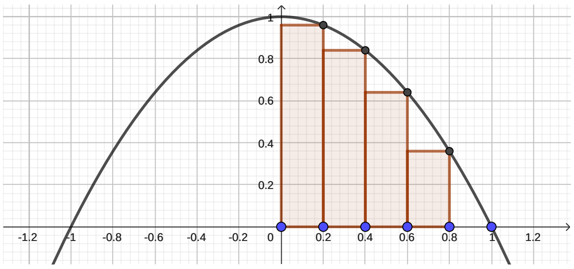
Ejercicio 59 — Madrid 2022. Determina razonadamente cuál es el signo de $\int_{-2}^{5} f(x)dx$ en vista de que la gráfica de $f(x)$ es la que se muestra en la siguiente imagen:



Ejercicio 60 — Murcia 2016. Determine el valor de $a > 0$ para que $\int_{0}^{a} \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \dfrac{1}{4}$.

Ejercicio 61 Una posible manera de demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo es utilizar la idea de la *Suma de Riemann* para calcular las correspondientes áreas. Vamos a utilizar esa idea para calcular el área A del Ejercicio 58, en lugar de hacerlo utilizando la Regla de Barrow.

(a) Vamos a aproximar la mitad del área A por los 5 rectángulos (el último tiene altura 0) que se ven en la imagen. ¿Cuál es la suma de las áreas de esos 5 rectángulos?



(b) Supongamos que hacemos una aproximación similar pero usando n rectángulos. ¿Cuál sería el valor S_n de la suma de las áreas de esos n rectángulos?

(pista: utiliza la fórmula $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$).

(c) ¿Cuál es el valor de $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$?

Ejercicio 62 — Murcia 2011. Calcula el área comprendida entre la curva $y = \dfrac{4}{9+3x^2}$, el eje de abscisas y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.

Ejercicio 63 — Similar a Murcia 2004. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

(b) $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$

(c) Si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0,$ entonces $a = b$.

(d) Si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x,$ entonces $a = b$.

(e) $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Ejercicio 64 — Madrid 2000. Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$, donde a es un número real comprendido entre 0 y 1 ($0 < a < 1$). Ambas curvas se cortan en un punto (x_0, y_0) con abscisa positiva. Halla a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.

Ejercicio 65 — Madrid 2000. Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$. Determina el área encerrada por las gráficas de ambas funciones y la recta $x = 2$.

Ejercicio 66 Calcula el área determinada por la gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$, el eje horizontal y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

Ejercicio 67 — Madrid 2005. Sea $f(x)$ una función derivable en $(0,1)$ y continua en $[0,1]$, tal que $f(1) = 0$ y $\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar la $\int_0^1 f(x)dx$.

Ejercicio 68 — Madrid 2007. Si f es una función continua, obtener $F'(x)$ siendo

$$F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3)dt.$$

Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 f(t)dt = 1$, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$.

Ejercicio 69 — Madrid 2008. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| < 2 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$.

(a) Calcula a, b para que $f(x)$ sea continua y derivable en todo x.

(b) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, calcula el área de la región acotada limitada por la gráfica de f, el eje horizontal y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

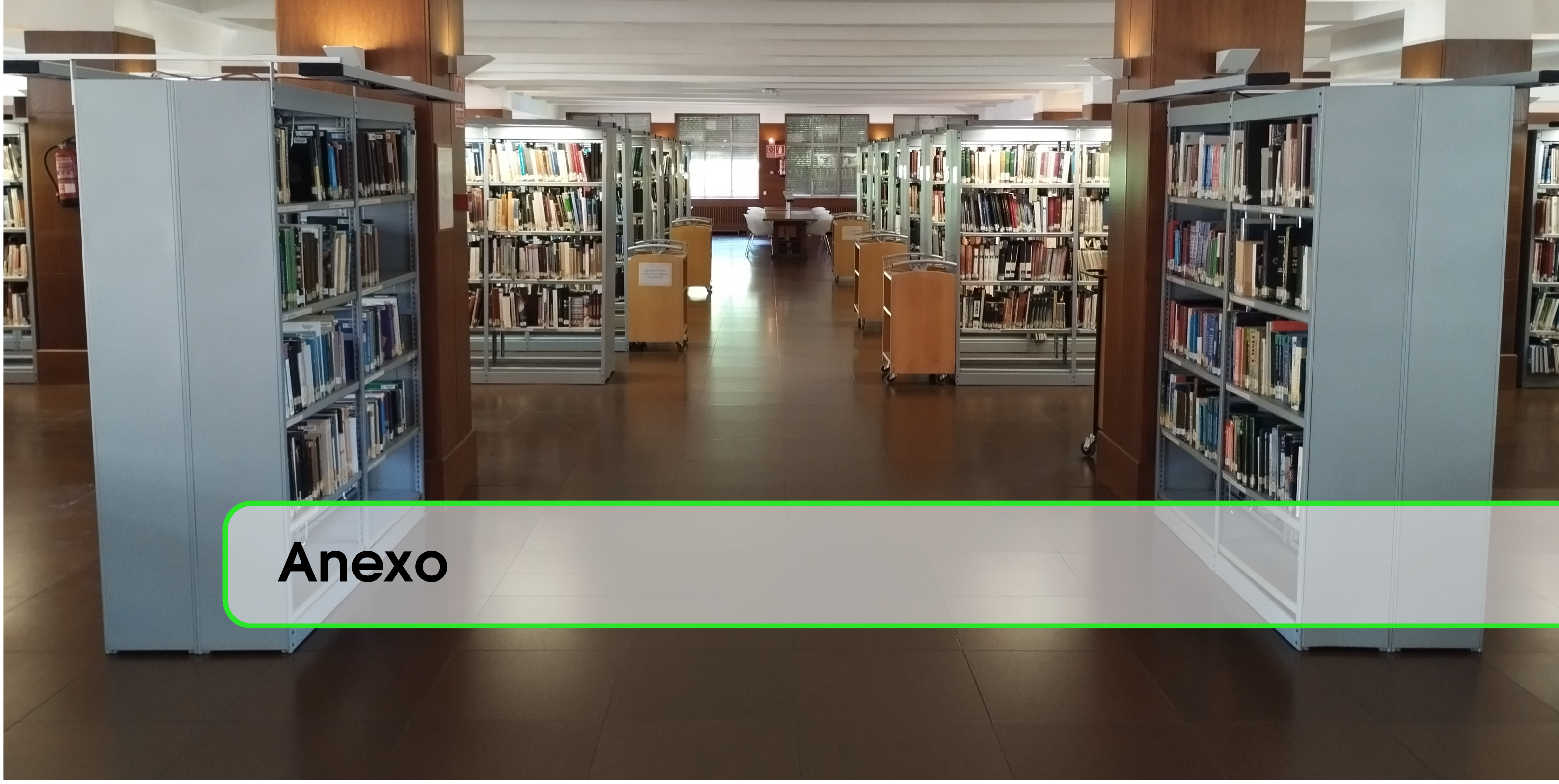
Ejercicio 70 — Madrid 2005. Determina el valor del parámetro a tal que $\displaystyle\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \frac{1}{4}$.

Ejercicio 71 — Madrid 2011. Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = -\sin x$ y el eje OX, entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

Ejercicio 72 — Madrid 2011. Halla el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -\sin x$ alrededor del eje OX, entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

Ejercicio 73 — Madrid 2018. Halla el área del recinto plano limitado por el eje OX, la curva $y = 2\cos x + |x-1|$ y las rectas $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

Ejercicio 74 — Andalucía 2023. Considera la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$. Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{xF(x)}{\sin(x^2)}$.



Anexo

Derivadas de las Funciones Elementales Básicas

DERIVADA DE:	**IGUAL A:**
Funcion Constante k	0
Función Potencial x^a	$a \cdot x^{a-1}$
Función Polinómica $a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	$n a_n x^{n-1} + \ldots + 2a_2 x + a_1$
Función Exponencial (Fácil) e^x	e^x
Función Exponencial (General) a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
Función Logarítmica (Fácil) $\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
Función Logarítmica (General) $\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$
Función Seno $\sin(x)$	$\cos(x)$
Función Coseno $\cos(x)$	$-\sin(x)$
Función Tangente $\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
Función Arcoseno $\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Función Arcocoseno $\tan(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
Función Arcotangente $\tan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Reglas de Derivación

Las siguientes reglas, en combinación con la tabla de las derivadas de las funciones elementales básicas de la página anterior, nos permiten calcular la derivada de cualquier función elemental. El resultado obtenido siempre será, de nuevo, una función elemental básica.

Para toda pareja de funciones $f(x)$ y $g(x)$ que sea posible derivar en un determinado punto x:

DERIVADA DE:	**IGUAL A:**
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$k\cdot f(x)$, con $k\in\mathbb{R}$	$k\cdot f'(x)$
$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ **(Regla del producto o Regla de Leibniz)**
$\frac{f(x)}{g(x)}$, con $g(x)\neq 0$	$\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ **(Regla del Cociente)**
$f(g(x))$	$f'(g(x))\cdot g'(x)$ **(Regla de la Cadena)**
$(f^{-1})'(x)$, con $f'(f^{-1}(x))\neq 0$	$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ **(Teorema de la Función Inversa)**

Identidades Trigonométricas

Identidad Fundamental (y sus variantes)
$\cos^2 t+\sin^2 t=1, \qquad 1+\tan^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}, \qquad \frac{1}{\tan^2 t}+1=\frac{1}{\sin^2 t}.$
Fórmulas del ángulo doble
$\cos(2t)=\cos^2 t-\sin^2 t=2\cos^2 t-1, \qquad \sin(2t)=2\cos t\sin t,$ $\tan(2t)=\frac{2\tan t}{1-\tan^2 t}.$

Recursos Online

Wolfram Alpha es un software gratuito y online que puedes utilizar, entre otras muchas cosas, para prácticar con los ejercicios de integrales. Puedes encontrarlo en la web

https://www.wolframalpha.com

o escribiendo "wolframalpha" en *Google*.

En el campo "Escriba lo que quiera calcular o saber" puedes utilizar los siguientes comandos, como se muestra en los ejemplos, y después pulsar el botón "=" si algún día quieres comprobar que has hecho bien alguno de tus ejercicios:

- "integrate arcsin(x) dx" para calcular la integral indefinida $\int \arcsin(x)dx$,
- "integrate arcsin(x) dx from -1 to 1", para calcular la integral definida $\int_{-1}^{1} \arcsin(x)dx$.