Recta Tangente a una curva en uno de sus Puntos

Si f(x) es derivable en x_0, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de y=f(x) en x_0 es:

$$y - y_0 = m\cdot(x-x_0) \rightarrow y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Tipos:

1) Si nos dan el punto de tangencia $x= x_0$

Tenemos que hallar el valor de $y_0=f(x_0)$ → Para ello sustituimos el valor de x en nuestra función.

Calculamos $f'(x_0)$ → Para ello derivamos nuestra función y sustituimos $x=x_0$

Por último calculamos la fórmula : $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

Ejemplo 1: Halla la ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto y=f(x)=$\frac{1-3x^2}{2}$ en x=1

Ecuación Punto-Pendiente → $y - y_0 = m\cdot(x-x_0)$

- $y_0=f(x_0)$ → $y_0=f(1)=\frac{1-3\cdot1^2}{2} = -1$ → Las coordenadas serán (1,-1)
- $f'(x)=\frac{-6x}{2} = -3x$ → m= f´(x)=-3·1=-3 →m= -3

  m=f´(x)
- $y - y_0 = m\cdot(x-x_0)$ → y +1 = -3(x-1) → **y=-3x+2**

Ejemplo 2: Halla la ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto y=f(x)=$\sqrt{x+12}$ en x=-3

Ecuación Punto-Pendiente → $y - y_0 = m\cdot(x-x_0)$

- $y_0=f(x_0)$ → $y_0=f(-3)= \sqrt{-3+12} = 3$ → Las coordenadas serán (-3,3)
- $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+12}}$ → m= $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{-3+12}} = \frac{1}{6}$ →m= $\frac{1}{6}$

  m=f´(x)
- $y - y_0 = m\cdot(x-x_0)$ → y -3 = $\frac{1}{6}\cdot$(x+3) → **y=$\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$**

Ejemplo 3: Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva f(x)= $\frac{x^2+1}{e^x}$ **en x_0=0.**

- **La ecuación de la recta Punto-pendiente : $y-y_0= m(x-x_0)$**
- Empezamos calculando el valor de y_0 para x_0= 0 ➔ f(0)= $\frac{0^2+1}{e^0}$ = 1 . Hemos calculado que para x_0 =0 la función y_0 = 1.
- Lo siguiente que hacemos es calcular la derivada de la función en el punto x=0, de esta manera estaremos calculando la pendiente de la función en ese punto.
  f ´(x) = $\frac{2xe^x - e^x(x^2+1)}{(e^x)^2}$; Calculo la pendiente para x=0 ➔ f ´(0)= $\frac{2\cdot 0\cdot e^0 - e^0(0^2+1)}{(e^0)^2}$ = -1 = m
- Sustituyo en la ecuación de la recta y me queda que
  $y - y_0 = m\,(x-x_0)$
  y – 1 = -1 (x-0) ➔ **y = 1-x**

2) Si nos dan la pendiente de la recta tangente m:

m = f´(x) → Derivamos nuestra función y la igualamos al valor de la pendiente que nos dan y así obtenemos el valor de x_0.

Tenemos que hallar el valor de $y_0=f(x_0)$ → Para ello sustituimos el valor de x en nuestra función.

Por último calculamos la fórmula : $y - f(x_0) = f´(x_0)\cdot(x-x_0)$

Ejemplo 4: Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva y= x^2+4x+1, que es paralela a la recta 4x-2y+5=0

4x-2y+5=0 → y = $\frac{4x+5}{2}$ =mx+n → Siendo m la pendiente → m=2 → Como nos dice que la recta tangente tiene que ser paralela a esta recta, la pendiente será m= f´(x) =2.

- Derivamos nuestra función → f´(x)= 2x+4 y lo igualamos al valor de la pendiente.

  $f´(x_0)$ =2 → 2x+4=2 → x_0= -1
- Calculamos el valor de y_0 (Para calcular las coordenadas nos vamos a la función)

  y_0 = f(-1)= $(-1)^2 + 4\cdot(-1) + 1 = 1 - 4 + 1 = -2$
- $y - y_0 = m\cdot(x-x_0)$ → y +2= 2(x+1) → **y = 2x**

Ejemplo 5: Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva y = $2x^2$-3x que tenga pendiente -7.

El enunciado nos dice que la pendiente → m= f´(x) =2

- Derivamos nuestra función → f´(x)= 4x-3 y lo igualamos al valor de la pendiente.

  f´(x_0) =-7 → 4x-3=-7 → x_0= -1

- Calculamos el valor de y_0 (Para calcular las coordenadas nos vamos a la función)

  y_0 = f(x_0)= f(-1)= 2·$(-1)^2$-3(-1) =2+3 =5

- y – y_0 = m·(x-x_0) → y -5= -7(x+1) → **y = -7x-2**

Ejemplo 6: Halla la ecuación de la recta tangente a la curva y=$\sqrt{x}$ que sea paralela a la recta y= $\frac{1}{4}x + 1$

y = $\frac{1}{4}x + 1$ = mx+n → Siendo m la pendiente → m=$\frac{1}{4}$ → Como nos dice que la recta tangente tiene que ser paralela a esta recta, la pendiente será m= f´(x) =$\frac{1}{4}$.

- Derivamos nuestra función → f´(x)= $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ y lo igualamos al valor de la pendiente.

  f´(x_0) =$\frac{1}{4}$ → $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ =$\frac{1}{4}$ → $\sqrt{x_0}$ = 2 → x_0 = 4

- Calculamos el valor de y_0 (Para calcular las coordenadas nos vamos a la función)

  y_0 = f(4)= $\sqrt{4}$ = 2

- y – y_0 = m·(x-x_0) → y -2= $\frac{1}{4}$(x-4) → **y = $\frac{1}{4}x$ +1**

Crecimiento y Decrecimiento de una Función

Sea f una función definida en un cierto intervalo y sea a un punto de su interior.

- f es creciente en el punto a si existe un intervalo centrado en a en el que se cumple:

  f(a) < f(x) para todo punto x de ese intervalo con x>a

  f(a) > f(x) para todo punto x de ese intervalo con x<a

- f es decreciente en el punto a si existe un intervalo centrado en a en el que se cumple:

  f(a) > f(x) para todo punto x de ese intervalo con x>a

  f(a)< f(x) para todo punto x de ese intervalo con x<a

- f tiene un máximo relativo en a si existe un intervalo centrado en a en el que se cumple f(a)$\geq f(x)$ para todo x de ese intervalo.

- f tiene un mínimo relativo en a si existe un intervalo centrado en a en el que se cumple f(a)$\leq$f(x) para todo punto x de ese intervalo.

- f´(a)>0 → La función es creciente en a.

- f´(a)<0 → La función es decreciente en a.

- Si f presenta un máximo o un mínimo relativo en a, y existe f´(a), entonces f´(a)=0

Ejemplo 7: Estudia la monotonía y halla los extremos relativos de las función:

f(x)=$\frac{x-1}{x+1}$

Hay que estudiar para qué valores se anula la derivada y el signo de la misma en los intervalos definidos por dichos puntos y los que no pertenezcan al dominio.

El dominio en este caso es → D(f)= x$\epsilon\mathbb{R}$ - $\{x = -1\}$

La derivada es f´(x)=$\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}$ = $\frac{2}{(x+1)^2}$ → f´(x)=0 → No existe ningún valor que anule la derivada

x	**(-∞, -1)**	**(-1,∞)**
Signo de f´(x)	+	+
Comportamiento	↗	↗

La función crece (-∞, $-1)U(-1,\infty)$, no hay decrecimiento, ni máximos ni mínimos.

Ejemplo 8: Estudia la monotonía y halla los extremos relativos de las función:

f(x)= $\frac{lnx}{x}$

El dominio de f(x) → $\left.\begin{matrix} x>0 \\ x\neq 0\end{matrix}\right\}$ → D(f)=x∈(0,∞)

Su derivada → f´(x)= $\frac{\frac{1}{x}x-1\cdot lnx}{x^2}=\frac{1-lnx}{x^2}$ →f´(x)=0 → 1-lnx=0 → x= e

x	**(0, e)**	**(e,∞)**
Signo de f´(x)	+	-
Comportamiento	↗	↘

Crecimiento: (0,e)

Decrecimiento (e,∞)

Máximo relativo que también es absoluto: (e, $\frac{1}{e}$) → Las coordenadas se calculan siempre en f(x)

Ejemplo 9: Estudia la monotonía y halla los extremos relativos de la función:

f(x)= $\frac{3x^2-9x+3}{3x-1}$

El dominio de f(x) → D(f) = x∈ℝ -$\left\{x=\frac{1}{3}\right\}$

Su derivada es: f´(x)=$\frac{(6x-9)\cdot(3x-1)-3\cdot(3x^2-9x+3)}{(3x-1)^2}$ =$\frac{18x^2-27x-6x+9-9x^2+27x-9}{(3x-1)^2}=\frac{9x^2-6x}{(3x-1)^2}$ → f´(x)=0 →

$9x^2-6x=0$ → 3x(3x-2)=0 →$\begin{cases} x=0 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$

x	(-∞, 0)	(0,$\frac{1}{3}$)	($\frac{1}{3}$,$\frac{2}{3}$)	($\frac{2}{3}$, ∞)
Signo de f´(x)	+	-	-	+
Comportamiento	↗	↘	↘	↗

Crecimiento: $(-\infty,0)U(\frac{2}{3},\infty)$

Decrecimiento: (0, $\frac{1}{3})U(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

Máximo : (0,-3)

Mínimo: ($\frac{2}{3},-\frac{5}{3}$)

Curvatura y Puntos de Inflexión

La segunda derivada da información sobre la posición de una curva respecto de la tangente en un punto.

- Si $f''(x)>0$ en un intervalo centrado en a, la curva está por encima de la tangente en P(a,f(a)). Entonces decimos que la función es cóncava hacia arriba en a.
- Si $f''(a)<0$ en un intervalo centrado en a, la curva está por debajo de la tangente en P(a,f(a)). Entonces decimos que la función es cóncava hacia abajo en a.
- Si la curva cambia de posición respecto de la tangente en a, decimos que el punto P(a,f(a)) es un punto de Inflexión.

Ejemplo 10: Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función: $f(x)=3x^3-9x^2$ Di dónde es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y hacia abajo.

- El dominio de la función es $D(f)= x\in\mathbb{R}$
- Crecimiento y Decrecimiento

La primera derivada: $f'(x)= 9x^2-18x \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow 9x^2-18x=0 \rightarrow 9x(x-2)=0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

x	$(-\infty, 0)$	$(0,2)$	$(2, \infty)$
Signo de f´(x)	+	-	+
Comportamiento	↗	↘	↗

Crecimiento: $(-\infty, 0) U (2, \infty)$

Decrecimiento: (0,2)

Máximo: (0,0)

Mínimo: (2,-12)

- Curvatura y Puntos de Inflexión

Segunda Derivada: f´´(x)= 18x -18 → f´´(x)=0 → 18x-18=0 → x=1

x	$(-\infty, 1)$	$(1,\infty)$
Signo de f´´(x)	-	+
Comportamiento	∩	U

Cóncava hacia arriba: $(-\infty, 1)$

Cóncava hacia abajo: $(1,\infty)$

Punto de Inflexión: (1,-6)

Cálculo de Parámetros

Ejemplo 10: Determinar a,b y c para que la función f(x)= x^3+ax^2+bx+c tenga un máximo para x=-4, un mínimo para x=0 y tome el valor 1 para x=1

- valor 1 para x=1 → (1,1) → f(1)=1→1=1^3+a·1^2+b·1+c → **a+b+c=0**

- f´(x)=3x^2+2ax+b → Nos dice que existe un mínimo en x=0. Como es un mínimo la pendiente (o sea la derivada) en ese punto es cero.

  f´(0)=0 → 3·0^2+2a·0+b=0 → **b=0**

- f´(x)=3x^2+2ax+b → Nos dice que existe un máximo en x=-4. Como es un máximo la pendiente (o sea la derivada) en ese punto es cero.

  F´(-4)=3·$(-4)^2$+2a·(-4)+b=0 → 48-8a+b=0 →**8a-b=48**

- Resolvemos el sistema $\begin{cases} a+b+c=0 \\ b=0 \\ 8a-b=48 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a=6} \\ \boldsymbol{b=0} \\ \boldsymbol{c=-6} \end{cases}$

- **Ejemplo 11: Sea f(x)= x^3+ax^2+bx+5. Halla a y b para que la curva y=f(x) tenga en x=1 un punto de inflexión con tangente horizontal.**

  - Si tenemos una tangente horizontal en x=1, es que la pendiente en x=1 es 0 o que la f'(1)=0
  - Si tenemos un punto de Inflexión en x=1 → f´´(1)=0

  Por lo tanto lo primero que vamos a hacer es derivar nuestra función.

  f´(x)= $3x^2+2ax+b$ → f´(1)=0 → $3\cdot1^2+2a\cdot1+b=0$ → 3+2a+b=0 → 2a+b=-3

  f´´(x)=6x+2a → f´´(1)=0 → 6·1+2a=0 → **a=-3**

  Sustituyendo en 2a+b=-3 → 2·(-3)+b=-3 → **b=3**

- **Ejemplo 12: hallar el valor de b y m para que la curva y=x^3+bx^2+mx+1 tenga un punto de inflexión en el punto (0,1) y la pendiente de la recta tangente en ese punto valga 1.**

  - Si tiene un punto de inflexión en x=0 → f´´(0)=0
  - Si la pendiente en x=0 vale 1 → f´(0)=1
  - Y por último pasa por el punto (0,1) → f(0)=1 → 1= $0^3+b\cdot0^2+m\cdot0+1$ → 1=1 Se cumple

  f´(x)= $3x^2+2bx+m$ → f´(0)=1 → $3\cdot0^2+2b\cdot0+m=1$ → **m= 1**

  f´´(x)=6x+2b → f´´(0)=0 → 6·0+2b=0 → **b=0**

- **Ejemplo 13: La función f(x)= ax^3+bx^2+cx+d, tiene como tangente en el punto de inflexión (1,0), la recta y=-3x+3 , y presenta un extremo en el punto de abcisa x=0**

  - Pasa por el punto (1,0) → f(1)=0 → $a\cdot1^3+b\cdot1^2+c\cdot1+d$= 0 → **a+b+c+d=0**
  - Punto de Inflexión en x=1 → f´´(1)=0 → f´(x)= $3ax^2+2bx+c$ → f´´(x)=6ax+2b

    f´´(1)=0 → f´´(1)=**6a+2b=0**
  - Recta tangente a la recta y=-3x+3 en el punto x=1

    f´(1)=-3 → f´(1)=$3a\cdot1^2+2b\cdot1+c=-3$ → **3a+2b+c=-3**

- Presenta un extremo en x=0, es decir la derivada en ese punto es 0 → f´(0)=0

f´(0)=3a·0^2+2b·0+c=0 → **c=0**

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{a+b+c+d=0}\\ \mathbf{6a+2b=0}\\ \mathbf{3a+2b+c=-3}\\ \mathbf{c=0}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c}\mathbf{a+b+d=0}\\ \mathbf{6a+2b=0}\\ \mathbf{3a+2b=-3}\\ \mathbf{c=0}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c}\boldsymbol{a=1}\\ \boldsymbol{b=-3}\\ \boldsymbol{c=0}\\ \boldsymbol{d=2}\end{array}\right\}$$