2º BACH

Boletín refuerzo vacaciones Navidad

Son 20 ejercicios, salen 2 por cada día hábil (sin contar ni finde ni festivos)

FECHA DE ENTREGA: 8 de enero 2024

Bloque Análisis (10 ejercicios)

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$.

a) **[1,5 puntos]** Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1 punto]** Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 f(x)\right)$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función $f:[-2,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3-2x+5$.

a) **[1,5 puntos]** Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, f(-2))$ y $(2, f(2))$.

b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de inflexión.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x|x-1|$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa $x=0$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_0^x sen(t^2)\,dt$. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xF(x)}{sen(x^2)}$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, se pide:

a) (0.25 puntos) Estudiar si es par o impar.

b) (0.75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto $x=1$.

c) (1.5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2+x^2} & si \quad x\le -1\\[2mm] \dfrac{2x^2}{3-3x} & si \quad x>-1\end{cases}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en R.

b) (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1}$.

c) (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

P5) Calcule las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{2x-5}{x^2+x-2}dx$

(1.25 puntos)

b) $\int x \ln x dx$

(1.25 puntos)

P6) Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos^2(\pi x)-1}{1-x} & x<1 \\ \ln\left(x\cdot e^{x+1}\right)-2x & x\geq 1 \end{cases}.$$

(2.5 puntos)

P7) Se considera la función $f(x)=(x+1)\sin(\pi x)$.

a) Demuestra que es continua en $\mathbb{R}$.

(0.5 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (0,1)$ tal que $f(\alpha)=\frac{3}{4}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(2 puntos)

P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x)=2-2x^2 \;\text{ y }\; g(x)=x^4-x^2$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)

Bloque álgebra (10 ejercicios)

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x+(2a-1)y+\left(\sqrt{2}-2\right)z=2 \\ -ax+ay+2a^2z=\sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula los valores de t para los que el rango de la matriz $A\cdot B$ es máximo, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & t-1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \; y \; B=\begin{pmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ t+1 & t+1 & -t-1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} ax+y-2z=0 \\ 3ax+a^2y-2a^2z=3 \\ -ax-y+\left(a^2-1\right)z=a+\sqrt{3}-1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula el valor de a para que la siguiente matriz no sea regular

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular el determinante de A^tA.
b) (0.5 puntos) Calcular el rango de BA en función de b.
c) (0.75 puntos) Calcular B^{-1} para $b = 2$.
d) (0.75 puntos) Para $b = 1$, calcular B^5.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema $\begin{cases} -2x+y+kz=1 \\ kx-y-z=0 \\ -y+(k-1)z=3 \end{cases}$. se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro k.
b) (0.5 puntos) Resolverlo para $k = 3$.
c) (0.75 puntos) Resolverlo para $k = 3/2$ y especificar, si es posible, una solución particular con $x = 2$.

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x+(2a-1)y+\left(\sqrt{2}-2\right)z=2 \\ -ax+ay+2a^2z=\sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula los valores de t para los que el rango de la matriz $A\cdot B$ es máximo, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & t-1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ t+1 & t+1 & -t-1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

1. Números y Álgebra:

Despeje la matriz X de la ecuación $XA = A + XB$, si A y B son matrices cuadradas tales que $A-B$ es invertible. Luego, calcule X si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \left(A^2 - A - I\right)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

P2) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $\left|A^3\right| = 8$, siendo A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2 - t & t^2 + 2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{pmatrix}$$