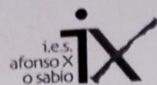




MATEMÁTICAS I

1º Control 1ª Avaluación

27/11/2023



Nome: Grupo: nº...

Exercicio 1	Exercicio 2	Exercicio 3	Exercicio 4	Puntuación

- O exame realizarase en 50 minutos, e puntúase sobre 10.
- A proba debe cubrirse utilizando un bolígrafo azul ou negro non borrable. Poñerase o nome en todas as follas.
- Non se valorará ningunha resposta que non reflecta os pasos para chegar a ela ou non estea suficientemente razoada.
- Despexar mal ou realizar pasos matematicamente incorrectos anula o apartado dese exercicio.
- Se un alumno copia, utiliza métodos indebidos como móbil, calculadoras non aptas para selectividade, auriculares bluetooth..., retiráraselle o exame e obterá unha puntuación de 0.

1. Comproba a seguinte igualdade e indica as condicións que debe cumprir o parámetro a para que se cumpra (2 puntos)

$$\log(a + \sqrt{a^2 - 1}) + \log(a - \sqrt{a^2 - 1}) = 0$$

2. Resolve o sistema (2 puntos)

$$\begin{cases} \log_2(3^y - 1) - x = 0 \\ 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 6 \end{cases}$$

3. Resolve a ecuación: (2 puntos)

$$4e^{-3x} - 5e^{-x} + e^x = 0$$

4. Resolve polo método de Gauss os sistemas: (4 puntos)

$$a) \begin{cases} x - 3y + 7z = 10 \\ 5x - y + z = 8 \\ x + 4y - 10z = -11 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ 2x + y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

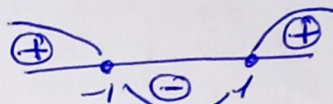
Soluciones

$$[1] a) \log(a + \sqrt{a^2 - 1}) + \log(a - \sqrt{a^2 - 1}) = \log[(a + \sqrt{a^2 - 1})(a - \sqrt{a^2 - 1})] =$$

suma por diferencia =
= diferencia de cuadrados
producto notable

$$= \log[a^2 - (\sqrt{a^2 - 1})^2] = \log(a^2 - (a^2 - 1)) = \log(a^2 - a^2 + 1) = \log 1 = 0$$

b) Si es cierto, para aquellos valores en los q. exista el logaritmo para ello $a - \sqrt{a^2 - 1} > 0$ { además $a^2 - 1 \geq 0$
 $a + \sqrt{a^2 - 1} > 0$ { $a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$



* si $a \leq 1 \Rightarrow$ como $\sqrt{a^2 - 1} < |a|$ { $\Rightarrow a - \sqrt{a^2 - 1} < 0$ No valen
para $|a| > 1$ si $a < 0$

* si $a > 1 \Rightarrow$ y además $\frac{a}{1} + \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{0} \geq 1 \Rightarrow \exists \log(a + \sqrt{a^2 - 1})$

Como $a > 1 \Rightarrow a^2 - 1 \geq 0$ $\Rightarrow a - \sqrt{a^2 - 1} \geq 0$
como $\sqrt{a^2 - 1} \leq a$

$\Rightarrow \exists \log(a - \sqrt{a^2 - 1})$

por a) 1º pto
b) 0º pto

Solución válida para $a > 1$

$$[2] \log_2(3^y - 1) - x = 0 \Rightarrow x = \log_2(3^y - 1) \text{ sustituyendo:}$$
$$3 \cdot \underbrace{\log_2(3^y - 1)}_{3^y - 1} - 2 \cdot 3^y = 6 \Rightarrow 3(3^y - 1) - 2 \cdot 3^y = 6$$
$$\Rightarrow 3 \cdot 3^y - 3 - 2 \cdot 3^y = 6; \quad 3^y(3 - 2) = 6 + 3; \quad 3^y = 9; \quad \boxed{y = 2}$$

$$\Rightarrow x = \log_2(3^2 - 1) = \log_2 8 = \boxed{3}$$

Comprobación:

$$\log_2(3^2 - 1) - 3 = \log_2 8 - 3 = 3 - 3 = 0 \quad \checkmark \text{ cierto}$$

$$3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 3^2 = 24 - 18 = 6 \quad \checkmark \text{ cierto}$$

3) $4e^{-3x} - 5e^{-x} + e^x = 0$; tener en cuenta q. $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ y por tanto $\neq 0 \rightarrow$

llamo $t = e^x \Rightarrow 4t^{-3} - 5t^{-1} + t = 0$; $4 - 5t^2 + t^4 = 0$;

$a = t^2$ (biuadrada) $a^2 - 5a + 4 = 0$; $a = \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix}$

para $a = 4 \Rightarrow t = \pm 2$; si $t = -2 \Rightarrow \cancel{\ln(-2)}$ No vale

para $a = 1 \Rightarrow t = \pm 1$; si $t = -1 \Rightarrow \cancel{\ln(-1)}$ No vale

soluciones válidas $t = 2$ y $t = 1$; como $x = \ln t \Rightarrow$

Soluciones $x = \ln 2$ y $x = 0$

4) a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & -10 & -11 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 1 & 4 & -10 & -11 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1, F_3 - 5F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \\ 0 & 14 & -34 & -42 \end{array} \right)$

$\xrightarrow{F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ S.C.I. ∞ sol.

$x - 3y + 7z = 10$
 $7y - 17z = -21$

$z = \lambda \in \mathbb{R}$

$y = \frac{-21 + 17\lambda}{7} = \left[-3 + \frac{17}{7}\lambda \right]$

$x = 10 + 3y - 7z$; $x = 10 + 3\left(-3 + \frac{17}{7}\lambda\right) - 7\lambda$;

$x = 10 - 9 + \frac{51}{7}\lambda - 7\lambda$; $x = 1 + \frac{51 - 49}{7}\lambda$; $x = 1 + \frac{2}{7}\lambda$

Sol = $\left\{ \left(1 + \frac{2}{7}\lambda, -3 + \frac{17}{7}\lambda, \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1, F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{2F_2, 3F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 12 & -4 \\ 0 & 6 & 15 & -3 \end{array} \right)$

$\xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right)$ S.C.D
 $\neq$ sol.

$3z = 1 \Rightarrow \left[z = \frac{1}{3} \right]$ $6y + 12z = -4$; $6y + \frac{12}{3} = -4$;

$6y = -4 - 4$; $6y = -8$; $y = -\frac{8}{6} = \left[-\frac{4}{3} \right]$

$x - y - 3z = 1$; $x = 1 + y + 3z$; $x = 1 - \frac{4}{3} + 3\left(\frac{1}{3}\right)$; $x = 2 - \frac{4}{3}$

$x = \frac{6-4}{3}$; $x = \frac{2}{3}$

Sol. $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right)$