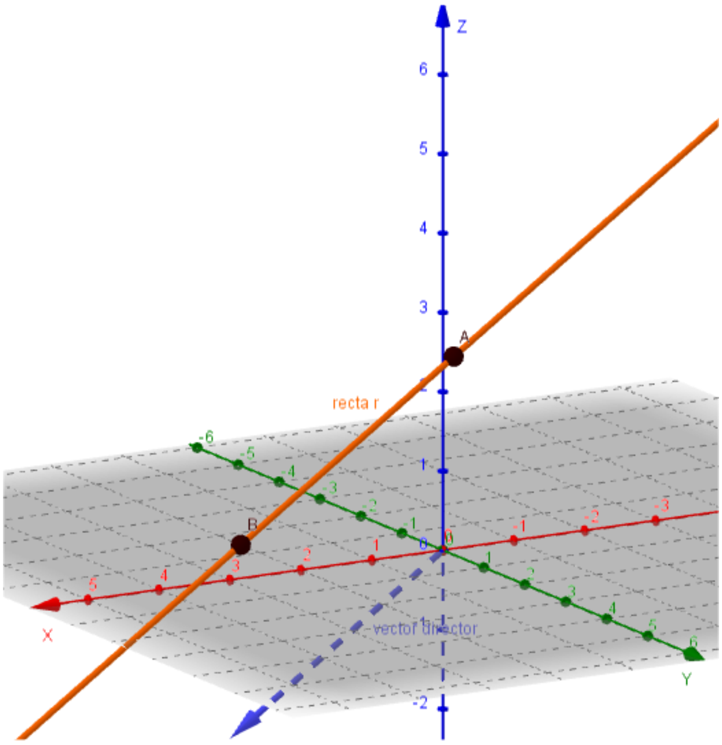
2º de bachillerato Matemáticas II
Bloque 2 de 4 - Geometría en el espacio

www.ebaumatematicas.com



Veo matemáticas por todas partes. ¿Y tú? ¿También la ves?

VECTOR NORMAL
normal vector

VECTORES LIBROS
vectors

PRODUCTO VECTORIAL
cross product

3 PUNTOS DETERMINAN UN PLANO
three points determine a plane

RECTA PARALELA A UN PLANO
line parallel to plane

PLANOS PARALELOS
parallel planes

RECTAS PARALELAS
parallel lines

RECTAS PERPENDICULARES
perpendicular lines

RECTAS EN EL ESPACIO
lines in the space

RECTAS EN EL ESPACIO
lines in 3D space

Tema 4. Geometría en el espacio - Vectores.

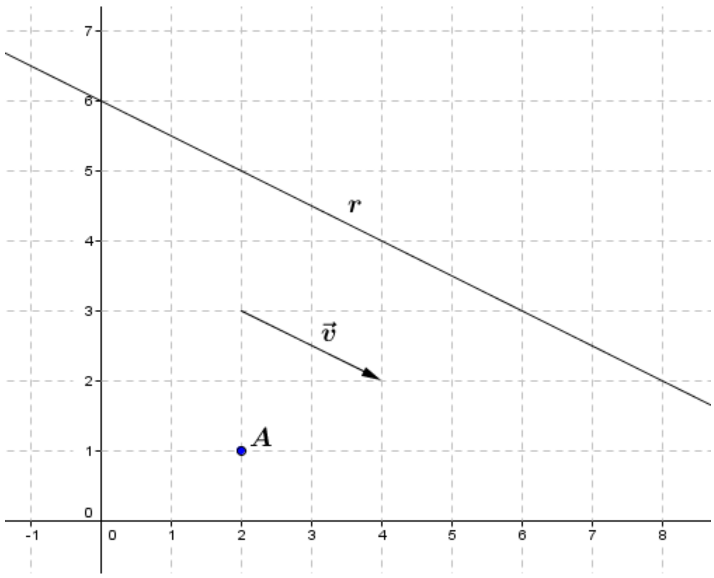
1.Geometría en el plano

En cursos pasados estudiamos la geometría del plano, con los siguientes elementos fundamentales:

- **Punto**: Posición en el plano. Para representarlo algebraicamente utilizamos letras mayúsculas, por ejemplo hablamos de un punto *A*, y se caracteriza mediante dos valores que denominamos *x* e *y*, representados por el par ordenado: (x, y). y que llamamos **coordenadas** del punto.

- **Vector (o vector libre)**: Viene dado por un par de valores llamados **componentes** (o coordenadas) del vector que escribimos como (v_1, v_2). Lo caracteriza su módulo, dirección y sentido.

- **Recta**: figura en el plano que únicamente tiene longitud, no tiene anchura ni profundidad. Se suele representar con una letra minúscula, habitualmente *r*, y se define a partir de un punto *P* $\left(x_P, y_P\right)$ y un vector $\overrightarrow{v_r} = (v_1, v_2)$. Se puede expresar con las ecuaciones:
    - Vectorial: $(x, y) = \left(x_P, y_P\right) + \lambda(v_1, v_2)$
    - Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = x_p + \lambda v_1 \\ y = y_p + \lambda v_2 \end{array}\right\}$
    - Continua: $\dfrac{x - x_p}{v_1} = \dfrac{y - y_p}{v_2}$
    - General o implícita: $A\,x + B\,y + C = 0$
    - Punto-pendiente: $\left.\begin{array}{l} Punto\ P(x_p, y_p) \\ pendiente = m = \dfrac{v_2}{v_1} \end{array}\right\} \Rightarrow y - y_p = m\left(x - x_p\right)$

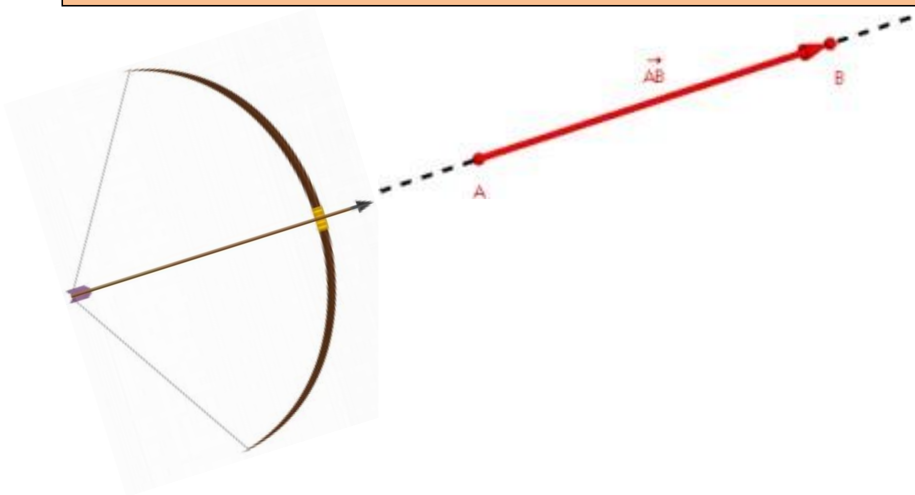


En la imagen vemos el punto *A*, de coordenadas (2, 1), el vector $\vec{v}$, de componentes (2, –1), y la recta *r*, de ecuación $y=-\frac{1}{2}x+6$.

En este capítulo y los siguientes ampliaremos esos elementos hacia las tres dimensiones, generalizando los conceptos anteriores y añadiendo otros nuevos

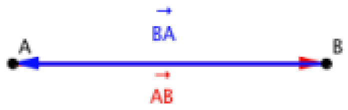
2. Vectores en el espacio

Un **vector fijo** en el espacio es un segmento orientado que viene determinado por un par de puntos, el origen *A* y el extremo *B*.



Los elementos de un vector son los siguientes:

- **Módulo:** Es la longitud del segmento orientado que lo define. El módulo de un vector será un número positivo, a excepción del vector nulo, que tendrá módulo cero.
- **Dirección:** Es la dirección de la recta que contiene al vector o cualquier recta paralela a ella. Dos vectores tendrán la misma dirección si están situados sobre la misma recta o sobre rectas paralelas.
- **Sentido:** Es la forma de recorrer el segmento *AB*, fijando el punto origen y el extremo.



Dos puntos A y B determinarán dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$, con el mismo módulo, la misma dirección y sentido opuesto. Un segmento $\overline{AB}$ es la linea que une ambos puntos sin especificar sentido.

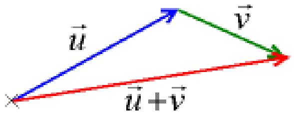
Todos los vectores fijos de igual módulo, dirección y sentido forman un mismo **vector libre**.

3.Operaciones con vectores

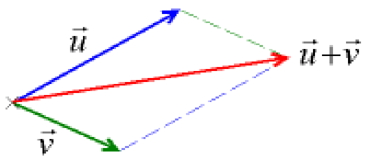
3.2. Suma de vectores

Existen dos métodos para sumar dos vectores gráficamente:

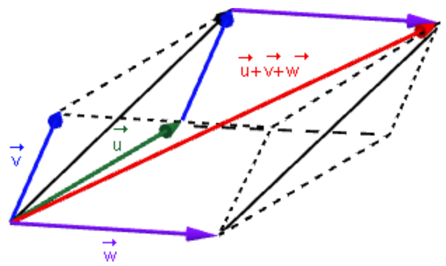
1. Se toman vectores equivalentes a ellos de manera que el extremo del primero coincida con el origen del segundo. El vector suma tiene origen en el origen del primer vector y extremo en el extremo del ultimo.



2. O bien se utiliza la técnica del paralelogramo



Este procedimiento se puede usar para sumar varios vectores. En este caso, se toman vectores equivalentes tales que el extremo de cada uno coincida con el origen del siguiente. El vector suma tiene como origen, el origen del primer vector, y como extremo, el extremo del último vector.



3.3. Opuesto de un vector

Dado un vector en el espacio $\vec{u}$, su vector opuesto se denota por $-\vec{u}$ y es otro vector con el mismo módulo, la misma dirección pero sentido contrario a $\vec{u}$.

3.4. Resta de vectores

Restar un vector es lo mismo que sumar el vector opuesto.

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$$

3.5. Producto de un vector por una constante

Dada una constante k y un vector $\vec{u}$, su producto es otro vector con la misma dirección, el mismo sentido si $k > 0$ o sentido contrario si $k < 0$, y cuyo módulo es k veces el módulo del vector $\vec{u}$.

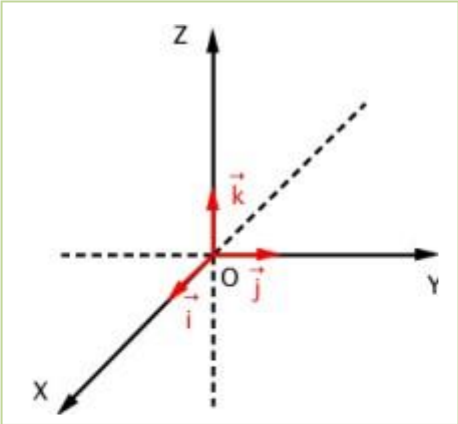
4.Sistema de referencia

Un **sistema de referencia** en el espacio de dimensión tres es un par formado por un punto fijo O y una base $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$.

Se escribe $R\equiv\{O,\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}\}$

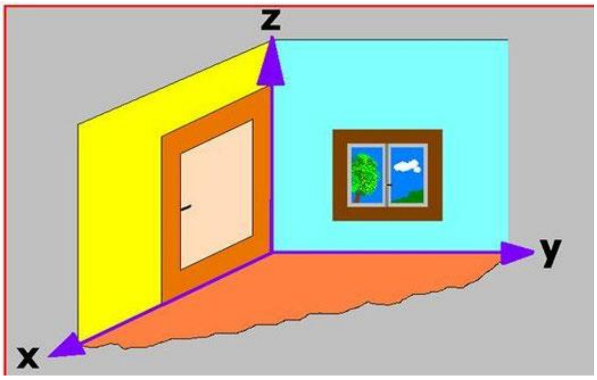
Un sistema de referencia nos permite asociar a cada punto del espacio P un vector $\overrightarrow{OP}$, llamado **vector de posición del punto**.

Las coordenadas del punto P serán las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$ respecto de la base $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$.



El **sistema de referencia canónico** en el espacio de dimensión 3 es aquel cuyo punto fijo es el origen de coordenadas $O(0,\ 0,\ 0)$ y cuya base $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ está formada por vectores de módulo 1 y perpendiculares entre sí.

Lo representamos por $R\equiv\{O,\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}\}$



4.1. Componentes (o coordenadas) de un vector

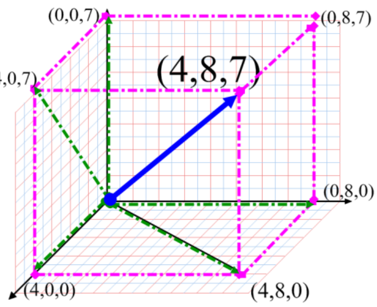
Consideramos el sistema de referencia canónico $R\equiv\{O,\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}\}$.

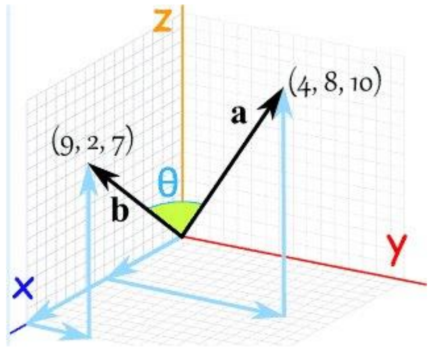
Dados dos puntos $A=(a_1,a_2,a_3)$ y $B=(b_1,b_2,b_3)$, sus vectores de posición son $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2,b_3)$, entonces las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas del extremo menos las coordenadas del origen:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b_1,b_2,b_3)-(a_1,a_2,a_3)=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$$

Ejemplo:

Los puntos de coordenadas (4, 8, 7), (9, 2, 7) y (4, 8, 10) se dibujan como sigue:





4.2. Módulo de un vector

Dado el vector $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, el módulo de $\vec{v}$ viene dado por la siguiente expresión:

$$\left|\vec{v}\right|=\sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2+{v_3}^2}$$

resultado de aplicar el teorema de Pitágoras en tres dimensiones.

***Ejemplo**:*

Calcula las componentes y el módulo de un vector de origen A= (–2, 3, 7) y extremo B=(0, 2, 4).

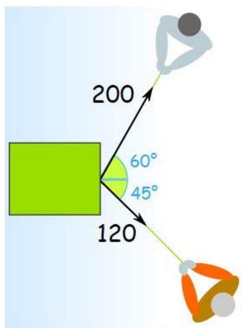
Las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(0,2,4)-(-2,3,7)=(2,-1,-3)$

El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{0^2+(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

5. Operaciones con vectores usando componentes

A partir de ahora se supone que se ha fijado el sistema de referencia canónico:

5.1. Suma, resta y opuesto de vectores



Dados dos vectores en el espacio $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$:

- Su suma es otro vector $\vec{u}+\vec{v}$ cuyas componentes son:
$$\vec{u}+\vec{v}=(u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3)=(u_1+v_1,\,u_2+v_2,\,u_3+v_3)$$
- El opuesto del vector $-\vec{v}$ es:
$$-\vec{v}=-(u_1,u_2,u_3)=(-u_1,-u_2,-u_3)$$
- La resta es otro vector $\vec{u}-\vec{v}$ cuyas componentes son:
$$\vec{u}-\vec{v}=(u_1,u_2,u_3)-(v_1,v_2,v_3)=(u_1-v_1,\,u_2-v_2,\,u_3-v_3)$$

5.2. Producto de un vector por una constante

Dada una constante k y un vector $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, su producto será otro vector $k\cdot\vec{u}$ cuyas componentes son:

$$k\cdot\vec{u}=(k\cdot u_1,k\cdot u_2,k\cdot u_3)$$

5.3. Suma de un punto más un vector

Dado un punto $A=(a_1,a_2,a_3)$ y un vector $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, para sumar el punto A y el vector $\vec{u}$ trabajamos con el vector de posición del punto A y el vector $\vec{u}$. Lo que obtenemos es otro punto B, cuyo vector de posición es la suma del vector de posición de A y el vector $\vec{u}$:

$$\overrightarrow{OB}=(a_1,a_2,a_3)+(u_1,u_2,u_3)=(a_1+u_1,a_2+u_2,a_3+u_3)$$

Ejemplo:

Dado el punto $A=(1,\ 2,\ 3)$ y los vectores $\vec{u}=(2,\ 5,\ 0)$ y $\vec{v}=(-9,\ 5,\ 3)$, tenemos:

- $-3\cdot\vec{u}=-3\cdot(2,\ 5,\ 0)=(-6,-15,0)$
- $\vec{u}+\vec{v}=(2,\ 5,\ 0)+(-9,\ 5,\ 3)=(-7,10,3)$
- $A+\vec{u}=(1,\ 2,\ 3)+(2,\ 5,\ 0)=(3,7,3)$
- $2\vec{u}-3\vec{v}=2\cdot(2,\ 5,\ 0)-3\cdot(-9,\ 5,\ 3)=(31,-5,-9)$

6. Estudio de la dependencia e independencia lineal de vectores mediante sus componentes

¿Son realmente independientes los 3 vectores de la fotografía?

- Un conjunto de n vectores son **linealmente independientes** cuando la matriz que forman sus componentes tiene de rango n.
- Un conjunto de n vectores son **linealmente dependientes** cuando la matriz que forman sus componentes tiene un rango estrictamente menor que n.

En un trípode o caballete de pintor, si consideramos cada pata como un vector en qué posición son independientes y en cual dependientes las tres patas o vectores? ¿plegado o desplegado?

Ejemplos:

1. ¿ $\vec{u}=(1,\ 2,\ 3)$, $\vec{v}=(3,\ 0,\ 1)$ y $\vec{w}=(3,-6,-7)$ son linealmente dependientes o independientes?

   Planteamos el determinante formado por las componentes de los tres vectores:

   $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -7 \end{vmatrix} = 6-54-(-42-6)=0$$

   Por lo que el rango de la matriz de las componentes es menor que 3, y los vectores del sistema son linealmente dependientes.

2. ¿ $\vec{u}=(1,\ 2,\ 3)$, $\vec{v}=(3,\ 0,\ 1)$ y $\vec{w}=(2,\ 2,\ 2)$ son linealmente dependientes o independientes?

   Planteamos el determinante formado por las componentes de los tres vectores:

   $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 12-36-(12-12)=-24\neq 0$$

   Por lo que el rango de la matriz de las componentes es 3, y los vectores del sistema son linealmente independientes.

3. ¿ $\vec{u}=(1,\ 2,\ 3)$, $\vec{v}=(3,\ 0,\ 1)$, $\vec{w}=(2,\ 2,\ 2)$ y $\vec{t}=(-1,\ 0,\ 2)$ son linealmente dependientes o independientes?

   En este caso no podemos plantear directamente el determinante, sino que debemos plantear la matriz del mismo:

   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Es una matriz de dimensión 4x3, su rango nunca puede ser 4, luego son linealmente dependientes.

3 vectores de $\mathbb{R}^3$ o más de 3 **SIEMPRE** serán linealmente dependientes.

4. ¿ $\vec{u}=(-2,\ 1,\ 3)$ y $\vec{v}=(2,\ 1,\ 1)$ son linealmente dependientes o independientes?

   En este caso no podemos plantear directamente el determinante, sino que debemos plantear la matriz del mismo:

   $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 2, pues hay un menor de orden 2 con determinante no nulo .

   Por tanto es un sistema de vectores linealmente independientes.

Dos vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ son linealmente dependientes si sus coordenadas son proporcionales, es decir, si son paralelos.

$$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=\frac{u_3}{v_3}$$

Ejemplo:

Comprueba si los vectores $\vec{u}=(-2,\ 1,\ 3)$ y $\vec{v}=(4,\ -2,\ -6)$ *son paralelos.*

$$\frac{-2}{4}=\frac{1}{-2}=\frac{3}{-6}=-0,5$$ Luego son paralelos.

Un vector en el espacio define una dirección (una recta)

Dos vectores en el espacio pueden ser paralelos y definir una única dirección (recta)
Dos vectores en el espacio pueden no ser paralelos, definen dos direcciones distintas y constituyen un plano.

Tres vectores en el espacio pueden ser paralelos todos ellos y definir una única dirección (una recta) o ser 2 paralelos y uno no paralelo volviendo a definir dos direcciones distintas y constituir un plano (los tres vectores están en dicho plano) o ser no paralelos entre si y por tanto definir 3 direcciones distintas formando un tetraedro.

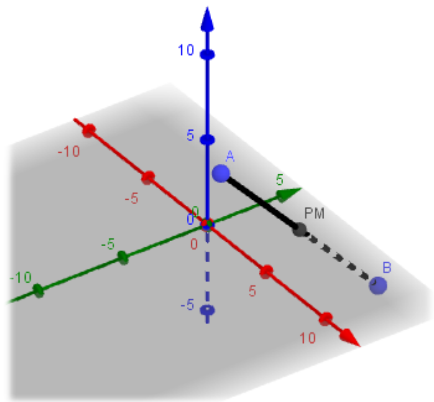
7. Aplicaciones de los vectores

7.1. Punto medio de un segmento

Dados dos puntos del espacio $A=(a_1,a_2,a_3)$ y $B=(b_1,b_2,b_3)$, el punto medio del segmento $\overline{AB}$ es:

$$PM_{AB}=\frac{(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)}{2}$$

Ejemplos:



1. Dados los puntos $A=(4,-2,6)$ y $B=(3,8,-5)$ *calcula el punto medio del segmento* $\overline{AB}$:

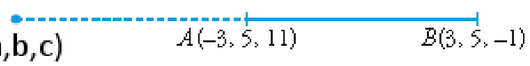
   Solución:
   $$PM=\frac{(4+3,-2+8,6-5)}{2}=(7/2,3,1/2)$$

2. Dados los puntos A(–3, 5, 11) y B(3, 5, –1):
   a) Halla el punto medio del segmento $\overline{AB}$.
   b) Halla el simétrico de B respecto de A.
   c) Obtén un punto M de AB tal que $\overline{AM} = 2\overline{MB}$.
   d) Obtén un punto N de AB tal que $\overline{NB} = 3\overline{AN}$.

   Solución:
   a)

$$PM_{AB}=\left(\frac{-3+3}{2},\frac{5+5}{2},\frac{11-1}{2}\right)=(0,5,5)$$

b)

B´(a,b,c)


Sea B´=(a,b,c) el simétrico de B respecto de A. Por ello debe cumplirse que A sea el punto medio del segmento que une B y B´:

$$PM_{BB'}=\left(\frac{3+a}{2},\frac{5+b}{2},\frac{-1+c}{2}\right)=(-3,5,-1)$$

$$\begin{cases}\dfrac{3+a}{2}=-3\\ \dfrac{5+b}{2}=5\\ \dfrac{-1+c}{2}=11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3+a=-6\rightarrow a=-9\\ 5+b=10\rightarrow b=5\\ -1+c=22\rightarrow c=23\end{cases}\Rightarrow\boxed{B'=(-9,5,23)}$$

c)

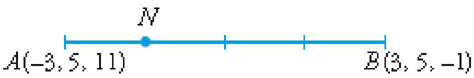
Si M tiene componentes $M(x,\ y,\ z)$ se debe cumplir:

$$\overline{AM}\ =\ 2\overline{MB}\rightarrow(x,\ y,\ z)-(-3,5,11)=2\left[(3,5,-1)-(x,\ y,\ z)\right]$$

$$(x+3,y-5,z-11)=2(3-x,5-y,-1-z)$$

$$\begin{cases}x+3=6-2x\\ y-5=10-2y\\ z-11=-2-2z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x=3\rightarrow x=1\\ 3y=15\rightarrow y=5\\ 3z=9\rightarrow z=3\end{cases}\Rightarrow\boxed{M=(1,5,3)}$$

d)



Si N tiene componentes $N(\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ c)$ se debe cumplir:

$$\overline{NB}\ =\ 3\overline{AN}\Rightarrow(3,5,-1)-(\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ c)=3\left[(\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ c)-(-3,5,11)\right]$$

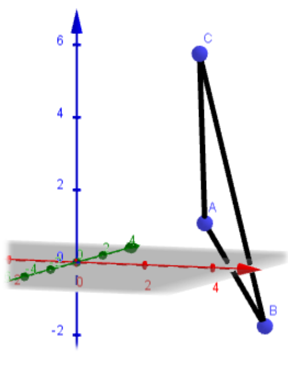
$$(3-a,5-b,-1-c)=3(a+3,b-5,c-11)$$

$$\begin{cases}3-a=3a+9\\ 5-b=3b-15\\ -1-c=3c-33\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4a=6\rightarrow a=\dfrac{-6}{4}=\dfrac{-3}{2}\\ -4b=-20\rightarrow b=5\\ -4c=-32\rightarrow c=8\end{cases}\Rightarrow\boxed{N\left(\frac{-3}{2},\ 5,8\right)}$$

7.2. Condición de puntos alineados

Se dice que tres puntos $A=(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\mathrm{a}_3)$, $B=(\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,\mathrm{b}_3)$ y $C=(\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,\mathrm{c}_3)$ en el espacio están alineados si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales, es decir:

$$\frac{b_1-a_1}{c_1-a_1}=\frac{b_2-a_2}{c_2-a_2}=\frac{b_3-a_3}{c_3-a_3}$$

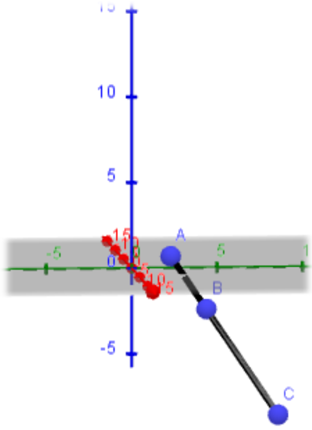


En el plano se pueden dibujar los puntos y comprobarlo visualmente.
En el espacio la representación en papel es difícil y recurriremos al cálculo numérico.

Ejemplos:

1. Comprueba si los puntos $A(3,2,1), B(4,4,-2)\ y\ C(4,-1,6)$ están alineados.
   Determino los vectores $\overrightarrow{AB}=(4-3,4-2,-2-1)=(1,2,-3)$ y
   $\overrightarrow{AC}=(4-3,-1-2,6-1)=(1,-3,5)$
   ¿$\frac{1}{1}=\frac{2}{-3}=\frac{-3}{5}$? Son todos los cocientes distintos, aunque bastaría con que fuesen distintos dos de ellos. **Los puntos no están alineados**.

2. Comprueba si los puntos $A(3,2,1), B(4,4,-2)\ y\ C(6,8,-8)$ están alineados.
   Determino los vectores $\overrightarrow{AB}=(4-3,4-2,-2-1)=(1,2,-3)$ y
   $\overrightarrow{AC}=(6-3,8-2,-8-1)=(3,6,-9)$
   ¿$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{-3}{-9}$? Si, Todas valen 1/3. **Los puntos están alineados**.



3. Calcula m y n para que los puntos P(7, –1, m), Q(8, 6, 3) y R(10, n, 9) estén alineados.

   $\overrightarrow{PQ}=(1,\ 7,\ 3-m\ ),\ \overrightarrow{QR}=(2,\ n-6,\ 6)$
   P, Q y R están alineados si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$ son vectores de componentes proporcionales:

$$\frac{1}{2}=\frac{7}{n-6}=\frac{3-m}{6}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}=\frac{7}{n-6}\rightarrow n-6=14\rightarrow\boxed{n=20}\\ \frac{1}{2}=\frac{3-m}{6}\rightarrow 6=6-2m\rightarrow\boxed{m=0}\end{cases}$$

   Luego m = 0 y n = 20.

Ejercicios

1. Calcula las componentes y el módulo de un vector de origen A (1, 1, 2) y extremo B(3, 1, – 4).

2. Dados los puntos P (2, 2, 3) , Q (1, 0, 5) y R (- 2, 3, 4) y los vectores $\vec{v}=(1,-1,3), \vec{w}=(0,-2,1)$ calcula, indicando si el resultado es punto o vector:
   a) $\overrightarrow{QP}$ b) $3\vec{v}-2\vec{w}$ c) $\vec{v}-\overrightarrow{RP}$ d) $P+\vec{v}$ e) $R+\overrightarrow{PQ}+\vec{w}$

3. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-3,5),\ \vec{v}=(-6,3,0)$ y $\vec{w}=(7,2,-1)$ calcula:
   a) $3\vec{u}-2\vec{v}+5\vec{w}$
   b) $2\vec{u}-2\vec{v}+2\vec{w}$
   c) $3(\vec{u}-2\vec{v})+3\vec{w}$
   d) $3\vec{u}-2(\vec{v}+\vec{w})$

4. Dados los puntos $A\ (0,-2,\ 6)\ y\ B\ (4,\ 8,\ \text{-}4)$, determina el punto medio del segmento AB.

5. Comprueba si los puntos $A\ (3,\ 2,\ 1),\ B\ (4,\ 4,-2)\ y\ C\ (4,-1,\ 3)$ están alineados.

6. Determina si son linealmente independientes o no los conjuntos de vectores siguientes:
   a) $\vec{u}=(1,\ 2,\ 0), \vec{v}=(3,\ 0,\ 1)\ y\ \vec{w}=(4,\ 2,-7)$.
   b) $\vec{u}=(1,\ 2,\ 0)\ y\ \vec{v}=(2,\ 4,\ 0)$.
   c) $\vec{u}=(1,\ 2,\ 0), \vec{v}=(4,\ 1,\ 3), \vec{w}=(4,\ 2,-7)\ y\ \vec{x}=(0,0,1)$

Soluciones:

1. $\overrightarrow{AB}=(2,0,-6)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{40}$ *2. a) Vector* $\overrightarrow{QP}=(1,2,-2)$ *b) Vector* $3\vec{v}-2\vec{w}=(3,1,7)$ *c) Vector (-3,0,4) d) Punto=(3,1,6) e) Punto (-3,-1,7) 3. a) (50,-5,10) b) (28,-8,8) c) (60,-21,12) d) (1,-14,17) 4. PM(2,3,1) 5. No están alineados. 6. a) L. Independientes (mismo plano) b) L. Dependientes (paralelos) c) Linealmente dependientes (>3)*

8.Producto escalar de 2 vectores

El ángulo que forman dos vectores libres es el menor de los ángulos que forman dos de sus representantes con un origen común.

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se llama ***producto escalar de*** $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y se denota por $\vec{u}\cdot\vec{v}$, al número real que resulta al multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$$

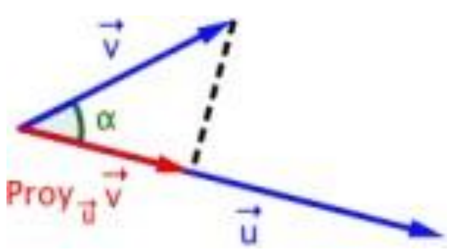
Ejemplo:

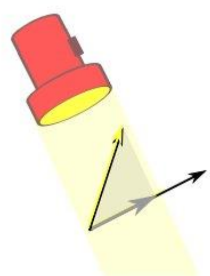
Dados los vectores $\vec{u}=(1,3,0), \vec{v}=(1,1,-1)$*, que forman un ángulo de 43'1°, calcula su producto escalar.*

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\sqrt{1^2+3^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\cdot\cos 43'1^{o}=4$$

8.1. Interpretación geométrica

El producto escalar de dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual al producto del módulo de uno de ellos por el módulo de la proyección del otro sobre él.





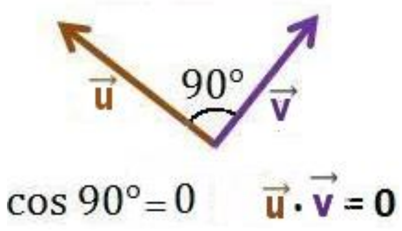
Observamos en la figura un triángulo rectángulo, donde la hipotenusa es $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y uno de los catetos es la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$. Aplicando la definición de coseno de un ángulo agudo:

$$\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v}=\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\alpha$$

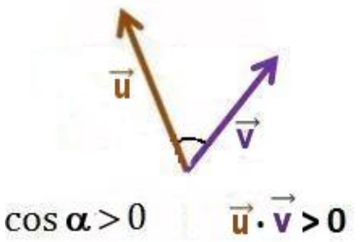
El producto escalar de dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vale:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v}$$

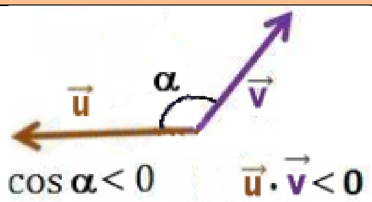
El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos es **cero** si y solo si los vectores son perpendiculares (forman un ángulo de 90º).



El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos es **positivo** si y solo si los vectores forman un ángulo agudo (forman un ángulo entre 0º y 90º).

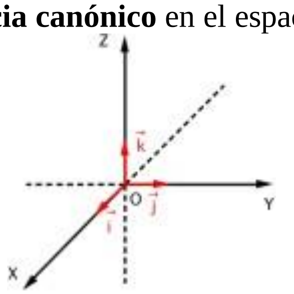


El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos es **negativo** si y solo si los vectores forman un ángulo obtuso (forman un ángulo entre 90º y 180º).



8.2. Expresión analítica del producto escalar

Consideramos el **sistema de referencia canónico** en el espacio de dimensión tres:



Sean dos vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_1,u_2,u_3)\cdot(v_1,v_2,v_3)=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3$$

Ejemplos:

a) Dados los vectores $\vec{u}=(3,2,-4)$ y $\vec{v}=(-1,3,7)$ calcula su producto escalar.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(3,2,-4)\cdot(-1,3,7)=3\cdot(-1)+2\cdot3+(-4)\cdot7=-3+6-28=-25$

Podemos afirmar que estos vectores forman un ángulo entre 90º y 180º (obtuso).

b) Dados los vectores $\vec{u}=(3,2,4)$ y $\vec{v}=(-1,3,7)$ calcula su producto escalar.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(3,2,4)\cdot(-1,3,7)=3\cdot(-1)+2\cdot3+4\cdot7=-3+6+28=31$

Podemos afirmar que estos vectores forman un ángulo entre 0º y 90º (agudo).

c) Dados los vectores $\vec{u}=(3,2,3)$ y $\vec{v}=(-1,3,-1)$ calcula su producto escalar.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(3,2,3)\cdot(-1,3,-1)=3\cdot(-1)+2\cdot3+3\left(-1\right)=-3+6-3=0$

Podemos afirmar que estos vectores forman un ángulo de 90º , son vectores ortogonales o perpendiculares.

8.3. Aplicaciones del producto escalar

Ángulo entre dos vectores

A partir de la definición del producto escalar, tenemos:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\Rightarrow\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}$$

Esto nos permitirá determinar el ángulo formado por 2 vectores a partir de su producto escalar y sus componentes.

Vectores ortogonales

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **ortogonales** cuando determinan un ángulo de 90º, es decir, son perpendiculares. Y por tanto, cos 90º = 0, es decir, su producto escalar es 0.

$$\vec{u}\perp\vec{v}\text{ si y solo si }\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

Ejemplo:

Calcula un vector ortogonal al vector $\vec{u}=\left(3,-2,1\right)$.

Llamemos a dicho vector $\vec{v}$. Para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares se debe verificar que $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Como hay muchos vectores ortogonales a $\vec{u}$, pongamos a las dos primeras coordenadas de $\vec{v}$ unos valores cualesquiera, por ejemplo $\vec{v}=\left(1,2,k\right)$. Y planteemos la ecuación:

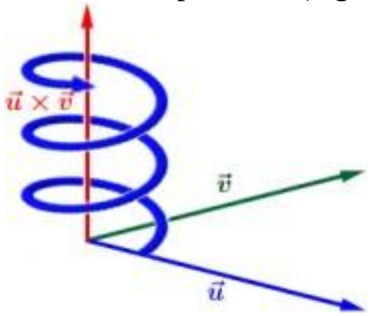
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(3,-2,1\right)\cdot\left(1,2,k\right)=3-4+k=0\Rightarrow k=1$$

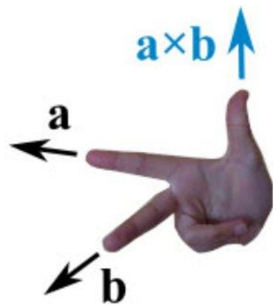
"Un" vector ortogonal a $\vec{u}=\left(3,-2,1\right)$ **es** $\vec{v}=\left(1,2,1\right)$

9.Producto vectorial de 2 vectores

Se llama **producto vectorial** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y se denota por $\vec{u}\times\vec{v}$, a otro **vector** con las siguientes características:

- **Módulo**: $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen(\vec{u},\vec{v})$.
- **Dirección**: es la perpendicular a ambos vectores.
- **Sentido**: es el de avance de un sacacorchos (o tornillo) que gira del primero al segundo vector del producto (regla de Maxwell).





9.1. Expresión analítica del producto vectorial

Sean $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ dos vectores expresados en el **sistema de referencia canónico** en el espacio, **el producto vectorial de** $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se puede expresar mediante el siguiente determinante:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}+(u_3v_1-u_1v_3)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$$

Ejemplo:

a) Halla el producto vectorial de los vectores $\vec{u}=(3,1,0)$ y $\vec{v}=(-1,4,2)$.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 3 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 2\end{vmatrix}=2i+12k-(-k+6j)=2i-6j+6k=(2,-6,6)$$

b) Halla el producto vectorial de los vectores $\vec{v}=(-1,4,2)$ y $\vec{u}=(3,1,0)$.

$$\vec{v}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ -1 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{Como es el mismo del anterior}\\ \text{intercambiadas las filas 2ª y 3ª}\\ \text{el determinante cambia de signo}\end{matrix}\right\}=(2i-6j+6k)=(-2,6,-6)$$

9.2. Propiedades del producto vectorial

a) El producto vectorial de un vector por sí mismo es cero.

$$Si\ \vec{u}=(3,1,0)\Rightarrow\vec{u}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 3 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{Como hay dos filas iguales}\\ \text{el determinante es 0}\end{matrix}\right\}=0i+0j+0k=(0,0,0)$$

b) El producto vectorial de dos vectores no nulos es el vector cero si y sólo si los vectores son paralelos.

$$Si\ \vec{u}=(3,1,0)\ y\ \vec{v}=(6,2,0)\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Hay dos filas proporcionales}\\ \text{el determinante es } 0\end{array}\right\}=0i+0j+0k=(0,0,0)$$

c) $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$

d) $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$

9.3. Aplicaciones del producto vectorial

Vector perpendicular a otros dos vectores

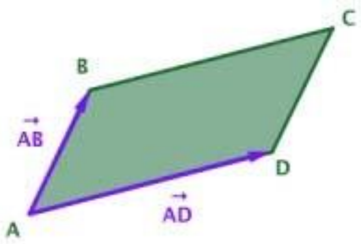
Si deseo hallar un vector perpendicular a otros dos basta con calcular el producto vectorial de ambos.

Área de figuras planas en el espacio

Área de un paralelogramo

El módulo del producto vectorial de dos vectores coincide con el área del paralelogramo que tiene por lados esos vectores.

En el paralelogramo ABCD podemos calcular su área:

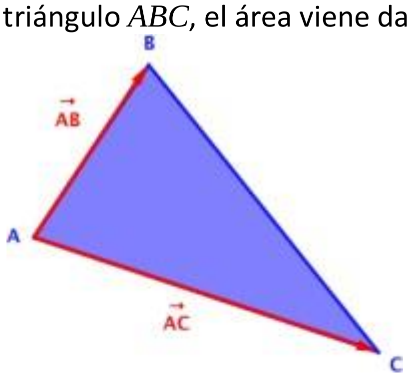


$$\text{Área de } ABCD=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$$

El área no variará de los vectores elegidos (AB, AD, ...). La única condición es que partan de un vértice concreto. $\text{Área de } ABCD=\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}\right|=\left|\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DC}\right|$

Área de un triángulo

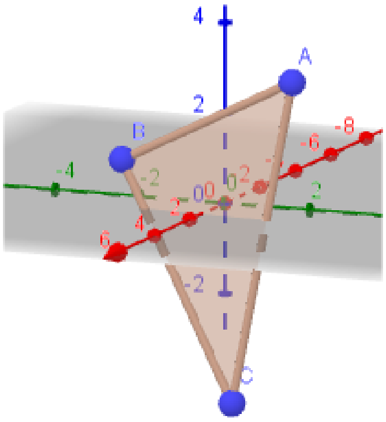
Dado un triángulo ABC, el área viene dada por la siguiente expresión



$$\text{Área de } ABC=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}$$

Ejemplo:

Halla el área del triángulo de vértices $A(1,\ 2,\ 3),\ B(1,-2,\ 1)\ y\ C(2,\ 1,\ -4)$.



Consideramos dos vectores con origen A y extremos B y C respectivamente.

$$\overrightarrow{AB}=(1,-2,\ 1)-(1,\ 2,\ 3)=(0,-4,-2)$$
$$\overrightarrow{AC}=(2,\ 1,\ -4)-(1,\ 2,\ 3)=(1,-1,-7)$$

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de ambos vectores.

Calculamos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & -7 \end{vmatrix}=28i-2j-(-4k+2i)=26i-2j+4k=(26,-2,4)$$

El área del triángulo se obtiene:

$$\acute{A}rea\ de\ ABC=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{26^2+(-2)^2+4^2}}{2}=\frac{\sqrt{756}}{2}=3\sqrt{21}=13,74\,u^2$$

10. Producto mixto de 3 vectores

Dados tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, se llama **producto mixto de** $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, y se denota por $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]$ al **número** que se obtiene al calcular el producto escalar del primer vector por el producto vectorial de los otros dos.

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$$

Ejemplo:

Calcula el producto mixto de los vectores $\vec{u}=(1,3,-2)$, $\vec{v}=(-1,0,4)$ y $\vec{w}=(2,1,-5)$.

Primero calculamos el producto vectorial de $\vec{v}\times\vec{w}$:

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}=8j-k-(5j+4i)=-4i+3j-k=(-4,3,-1)$$

El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}\times\vec{w}$ será el producto mixto pedido:

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)=(1,3,-2)\cdot(-4,3,-1)=-4+9+2=7$$

10.1. Expresión analítica del producto mixto

Consideramos el sistema de referencia canónico en el espacio y tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de componentes $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$.

El producto mixto $\left[\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}\right]$ se puede expresar mediante el siguiente determinante:

$$\left[\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}\right]=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

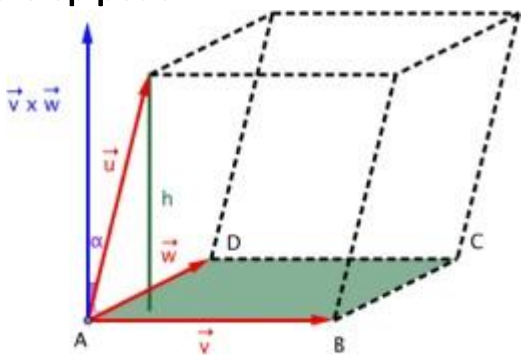
Calcula el producto mixto de los vectores $\vec{u}=(1,3,-2)$, $\vec{v}=(-1,0,4)$ y $\vec{w}=(2,1,-5)$.

Ya sabemos que vale 7, pero tenemos una nueva forma de obtener este valor, usando los determinantes.

$$\left[\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}\right]=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}=24+2-(15+4)=26-19=7$$

10.2. Aplicaciones del producto mixto

Volumen de un paralelepípedo

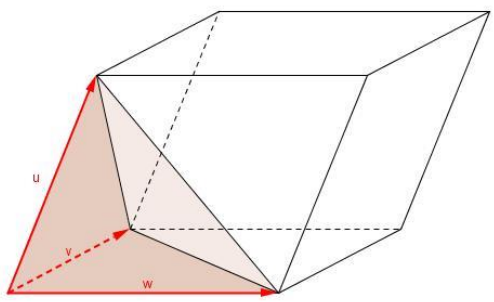


Sea el paralelepípedo definido por los vectores $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, entonces su volumen viene dado por el valor absoluto del producto mixto de los 3 vectores:

$$Volumen\ del\ \ paralelepipedo=\left|\left[\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{AD}\right]\right|$$

Volumen de un tetraedro

El volumen de un tetraedro de vértices A, B, C y D es igual a un sexto del volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$.



$$Volumen\ del\ tetraedro=\frac{\left|\left[\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}\right]\right|}{6}$$

Ejemplos:

1. Calcula el volumen del tetraedro de vértices $A(1,0,-1),\ B(-2,3,1),\ C(0,-3,1)\ y\ D(0,4,-1)$.

   Determinamos el valor de los vectores que conforman las aristas del tetraedro:

   $\overrightarrow{AB}=(-2,3,1)-(1,0,-1)=(-3,3,2)$

   $\overrightarrow{AC}=(0,-3,1)-(1,0,-1)=(-1,-3,2)$

   $\overrightarrow{AD}=(0,4,-1)-(1,0,-1)=(-1,4,0)$

   $$Volumen\ del\ tetraedro=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}=\frac{\begin{vmatrix}-3&3&2\\-1&-3&2\\-1&4&0\end{vmatrix}}{6}=\frac{\left|-6-8-(6-24)\right|}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}u^3$$

2. Calcula el volumen del tetraedro de vértices $A(1,1,1),\ B(3,0,0),\ C(0,2,0)$ y $D(0,0,6)$.

   $\overrightarrow{AB}=(3,0,0)-(1,1,1)=(2,-1,-1)$

   $\overrightarrow{AC}=(0,2,0)-(1,1,1)=(-1,1,-1)$

   $\overrightarrow{AD}=(0,0,6)-(1,1,1)=(-1,-1,5)$

   $$Volumen\ del\ tetraedro=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}=\frac{\begin{vmatrix}2&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&5\end{vmatrix}}{6}=\frac{\left|10-1-1-(1+5+2)\right|}{6}=\frac{0}{6}=0\,u^3$$

   Si el volumen del tetraedro es 0 significa que los puntos que nos dan no forman ninguna figura tridimensional, sino que todos pertenecen al mismo plano (son coplanarios).

Ejercicios

1. Si $\vec{u}(-3,\ 5,\ 1)$, $\vec{v}(7,\ 4,\ -2)$, halla las coordenadas de:
   a) $2\vec{u}$ b) $0\cdot\vec{v}$ c) $-\vec{u}$ d) $2\vec{u}+\vec{v}$ e) $\vec{u}-\vec{v}$ f) $5\vec{u}-3\vec{v}$

2. Dados los vectores de R^3: $\vec{u}(3,3,2), \vec{v}(5,-2,1), \vec{w}(1,-1,0)$.
   a. Halla los vectores $\vec{u}-2\vec{v}+3\vec{w},\quad -2\vec{u}+\vec{v}-4\vec{w}.$
   b. Calcula a y b tales que: $\vec{u}=a\vec{v}+b\vec{w}.$

3. Sean los vectores: $\vec{x}(1,-5,\ 2)$, $\vec{y}(3,\ 4,-1)$, $\vec{z}(6,\ 3,-5)$, $\vec{w}(24,-26,-6)$
   Halla a, b, c para que se cumpla $a\vec{x}+b\vec{y}+c\vec{z}=\vec{w}$.

4. Respecto de una base ortonormal, las coordenadas de tres vectores son $\vec{u}(3,-1,\ 5)$, $\vec{v}\ (4,\ 7,\ 11)$, $\vec{w}(-2,\ k,\ 3)$.
   a) Calcula $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
   b) Halla k para que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares.

5. Dados los vectores $\vec{u}(5,-1,\ 2)$, $\vec{v}(-1,\ 2,-2)$, calcula:
   a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$
   b) $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$
   c) $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
   d) ¿Cuánto tiene que valer x para que el vector (7, 2, x) sea perpendicular a $\vec{u}$?

6. Halla un vector perpendicular a estos dos vectores: $\vec{u}(3,\ 7,-6)$ y $\vec{v}(4,\ 1,-2)$.

7. Halla el área del triángulo determinado por los siguientes vectores $\vec{u}(3,\ 7,-6)$ y $\vec{v}(4,\ 1,-2)$

8. Halla el volumen del paralelepípedo definido por los siguientes vectores:
   $\vec{u}(3,-5,\ 1)$, $\vec{v}\ (7,\ 4,\ 2)$ y $\vec{w}(0,\ 6,\ 1)$

9. Halla el valor de x para que los vectores $\vec{u}(3,-5,\ 1)$, $\vec{v}(7,\ 4,\ 2)$ y $\vec{z}(1,\ 14,\ x)$ sean coplanarios, es decir, que el volumen del paralelepípedo que determinan sea cero.

10. Comprueba si los vectores $\vec{a}(2,-1,\ 0)$ y $\vec{b}(1,-2,-1)$ son ortogonales.
    Halla un vector unitario que sea perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$.

11. Hallar el área del triángulo determinado por los vectores $\vec{a}(2,0,0)$ y $\vec{b}(2,2,0)$.

12. Dados los siguientes vectores: $\vec{a}=\vec{i}+m\vec{j}+\vec{k}$ $\quad \vec{b}=-2\,\vec{i}+4\vec{j}+m\vec{k}$
    Halla m para que los vectores a y b sean…
    a) paralelos.

b) ortogonales.

13. Dados los puntos A(1, 0, –1), B(2, 1, 0), C(0, 0, –1) y D(–1, 1, 1), halla los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CD}$. Comprueba si son linealmente dependientes o no. Da una interpretación geométrica del hecho.

14. ¿Cuáles de los siguientes vectores tienen la misma dirección?
$\vec{a}(1,-3,2)$; $\vec{b}(2,0,1)$; $\vec{c}(-2,6,-4)$; $\vec{d}(5,-15,10)$; $\vec{e}(10,-30,5)$

15. Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:
a) Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.
b) Hallar los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.

16. Halla las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo cuyos vértices son los puntos A(1, –3, 5), B(0, 7, 2) y C(–1, 5, 6).

17. Dados los puntos A=(2,1,3) B=(1,3,4) C=(0,2,-1) y D=(1,2,a), calcular ***a*** para que sean coplanarios.

18. Comprobar que los vectores $\vec{a}=(1,1,3)$, $\vec{b}=(-1,2,0)$ y $\vec{c}=(1,3,5)$ son linealmente dependientes.

19. Encuentra un punto D, para que el polígono ABCD sea un paralelogramo. Siendo A(0, 0, 0) B(2, −1, 3) C(−1, 2, 1).

20. Dados los siguientes vectores: $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{b}=4\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$ y $\vec{c}=-\vec{j}+4\vec{k}$. Determinar:
   a. $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$
   b. $\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$
   c. $\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot 3\vec{c}$
   d. $-\left(4\vec{b}-3\vec{c}\right)\times 2\vec{b}$
   e. El ángulo que forma el vector $\vec{a}$ con cada uno de los ejes coordenados.
   f. El ángulo entre los vectores: $3\vec{b}$ y $-2\vec{c}$

21. Dados $\vec{a}=(5,3,4)$ y $\vec{b}=6\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, calcular su producto escalar y el ángulo que forman.

22. Determinar el valor de *t* para que los puntos $A(1,1,1)$, $B(3,0,2)$, $C(5,-2,2)$ y $D(2,1,t)$ sean coplanarios. Para el valor de *t* calculado anteriormente, obtener el área del polígono *ABCD*.

23. Probar que los puntos $P(2,1,6)$, $Q(3,5,-2)$, $R(-4,6,8)$ y $S(5,7,-1)$ son no coplanarios, y hallar el volumen del tetraedro que forman.

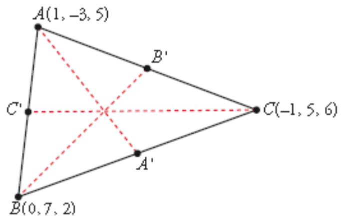
Soluciones:

1. *a) (–6,10,2) b)(0,0,0) c) (3,–5,–1) d) (1,14,0) e) (–10,1,3) f) (–36,13,11)*
2. *a. (–4,4,0) y (–5,–4,–3) b. a = 2 y b = –7*
3. *a = 6; b = –2; c = 4*
4. *a) 60 b)* $k=\frac{-25}{7}$
5. *a) -11 b)* $\left|\vec{u}\right|=5,48$ y $\left|\vec{v}\right|=3$ *c) 132º d)* $x=\frac{-33}{2}$
6. $\vec{u}\times\vec{v}=(3,\ 7,-6)\times(4,\ 1,-2)=(-8,-18,-25)$ *o cualquier vector proporcional a él.*
7. *15,91* u^2
8. *Volumen = 53* u^3
9. *x = 0*
10. *No lo son. El vector perpendicular es* $\vec{c}\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},-\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$
11. *2* u^2
12. *a) m = –2 b) m = 2/5*
13. *Son linealmente independientes y significa que los cuatro puntos no son coplanarios.*
14. *Los vectores a, c y d son paralelos.*
15. *a) a = 4/3 b) a = 10/3 o a = –4/3*
16.

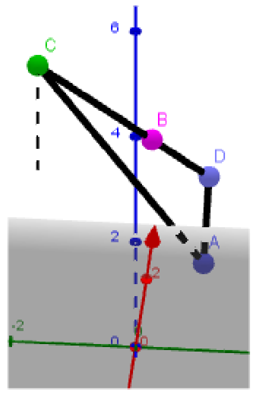
$$C'=\left(\frac{1+0}{2},\frac{-3+7}{2},\frac{5+2}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},2,\frac{7}{2}\right)$$

$$A'=\left(\frac{0-1}{2},\frac{7+5}{2},\frac{2+6}{2}\right)=\left(\frac{-1}{2},6,4\right)$$

$$B'=\left(\frac{1-1}{2},\frac{-3+5}{2},\frac{5+6}{2}\right)=\left(0,1,\frac{11}{2}\right)$$



17. *a = 2*
18. *Si son linealmente dependientes. El rango de la matriz que definen es 2.*
19. *No es única la solución, pues depende del orden en que tomes los vértices del polígono. Considerando* $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ *los lados del polígono y* $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{BD}$ *los otros lados debe ser D = (1, 1, 4)*
20. *a) 8,7 b)* $-14\vec{i}+10\vec{j}$ *c) – 87 d)* $54\vec{i}+96\vec{j}+24\vec{k}$ *e) Con el eje X: 122º; con el eje Y: 36º; con el eje Z: 74º f) 128,6º*
21. *Producto escalar vale 35 y el ángulo es 39º.*
22. *Forzamos a que el determinante formado por los vectores* $\overrightarrow{AB}(2,-1,1)$, $\overrightarrow{AC}(4,-3,1)$ *y* $\overrightarrow{AD}(1,0,t-1)$ *sea 0 y se obtiene t = 2. El área del polígono debemos hallarla dividiendo la figura en 2 triángulos (no sabemos que sea paralelogramo). Así tomamos el triángulo ABD y BDC y obtenemos cada uno. Área=*$\frac{\sqrt{27}}{2}u^2$ *. B, C y D están alineados y la figura es un triángulo de vértices ACD.*



23. *No lo son pues el determinante de los vectores* $\overrightarrow{PQ}(1,4,-8)$, $\overrightarrow{PR}(-6,5,2)$ *y* $\overrightarrow{PS}(3,6,-7)$ *es no nulo y por tanto son linealmente independientes (no están en el mismo plano). Volumen = 217/6* u^3*.*

Una de vectores: ¿"dirección" prohibida o "sentido" prohibido?

A veces, cuando nos expresamos en el lenguaje coloquial, solemos relajarnos y perder el rigor a la hora de hablar, incluso, en ocasiones, podemos generar confusiones y conflictos innecesarios. Estas confusiones suelen aparecer, por ejemplo, cuando nos referimos a los términos: **dirección** y ***sentido***. Habitualmente, solemos decir que vamos en "dirección contraria o dirección prohibida", cuando vemos la siguiente señal de tráfico:

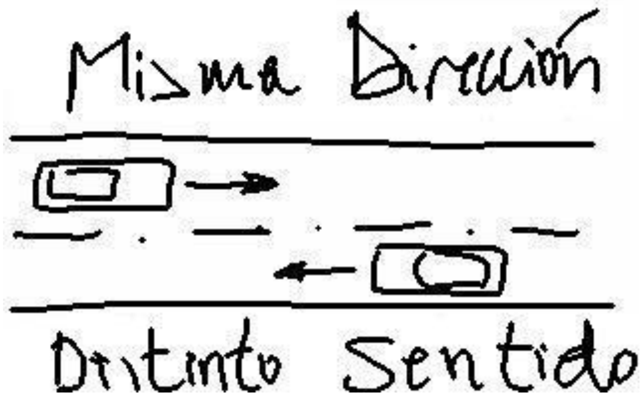
Sentido prohibido

Esta afirmación es incorrecta, esa señal indica "sentido prohibido" no "dirección prohibida". Indica que no se puede continuar hacia adelante, en el sentido de la marcha que llevamos.

No podemos decir que vamos en "dirección contraria" porque simplemente no existen direcciones contrarias. Hay múltiples, infinitas, direcciones. Podemos llevar la misma dirección que otro vehículo, persona, calle o se puede llevar una dirección distinta pero no podemos llevar nunca una dirección contraria a otra. Dos calles paralelas tienen la misma dirección, es decir, la dirección es la recta sobre la que están. Cuando en esa línea colocamos una flecha, entonces estamos definiendo el sentido.

Así, mientras hay infinitas direcciones posibles, sentidos sólo puede haber dos, así que sí se puede hablar de sentido contrario. Por ejemplo, en la siguiente situación:

Dos vehículos que circulan por la autovía, circulan en la misma dirección pero en sentidos contrarios.



Tema 5. Rectas y planos en el espacio.

1. Ecuación de la recta en el espacio

Una recta viene determinada por un punto $P(x_o, y_o, z_o)$ y una dirección. La dirección está marcada por un vector libre $\vec{v}$ llamado vector director de la recta.
A partir de estos datos se determina las coordenadas de cualquier punto de la recta (ecuación de la recta).

Ecuación vectorial:

$$\left.\begin{array}{l} P(x_o, y_o, z_o) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{array}\right\} \Rightarrow (x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + t(v_1, v_2, v_3) \;\; Siendo\; t \in \mathbb{R}$$

Ecuación paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} P(x_o, y_o, z_o) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = x_o + t \cdot v_1 \\ y = y_o + t \cdot v_2 \\ z = z_o + t \cdot v_3 \end{array}\right\} Siendo\; t \in \mathbb{R}$$

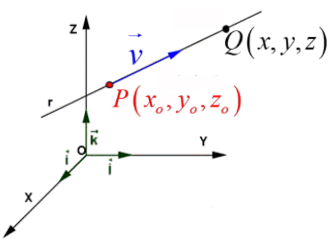
Ecuación continua:

$$\left.\begin{array}{l} P(x_o, y_o, z_o) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_o}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Y por último la **ecuación general o implícita**:

$$\left.\begin{array}{l} P(x_o, y_o, z_o) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}\right\}$$

En la ecuación general se expresa la recta como intersección de dos planos no paralelos (cada ecuación representa un plano). Existen infinitas parejas de planos cuya intersección es la misma recta.



Nota. Una recta también queda definida por 2 puntos P y Q. Basta considerar uno de los puntos $(P\ o\ Q)$ y el vector director como el vector que los une $\vec{v}=\overrightarrow{PQ}$.

Ejemplos:

1. Calcula en todas las formas anteriores la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,2,3)$ y con vector director $\vec{v}=(4,5,6)$.

$$\left.\begin{matrix} P(1,2,3) \\ \vec{v}=(4,5,6) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{(x,y,z)=(1,2,3)+t(4,5,6)}\ \textit{Siendo } t\in\mathbb{R} \qquad (\text{Ecuación vectorial})$$

$$\left.\begin{matrix} P(1,2,3) \\ \vec{v}=(4,5,6) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{matrix} x=1+4t \\ y=2+5t \\ z=3+6t \end{matrix}\right\}} \textit{Siendo } t\in\mathbb{R} \quad (\text{Ecuación paramétrica})$$

$$\left.\begin{matrix} P(1,2,3) \\ \vec{v}=(4,5,6) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{6}} \quad (\text{Ecuación continua})$$

Y por último la ecuación general o implícita la obtenemos a partir de la ecuación continua:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{6} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{5} \\ \dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-3}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x-5=4y-8 \\ 6y-12=5z-15 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} 5x-4y+3=0 \\ 6y-5z+3=0 \end{cases}}$$

2. Calcula en todas las formas anteriores la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(1,2,3)$ y $Q(4,0,-1)$.

Convertimos la información proporcionada de 2 puntos en punto y vector:

$$\left.\begin{matrix} P(1,2,3) \\ Q(4,0,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} P(1,2,3) \\ \vec{v}=\overrightarrow{PQ}=(4,0,-1)-(1,2,3)=(3,-2,-4) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} P(1,2,3) \\ \vec{v}=(3,-2,-4) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{(x,y,z)=(1,2,3)+t(3,-2,-4)}\ \textit{Siendo } t\in\mathbb{R} \qquad (\text{Ecuación vectorial})$$

$$\left.\begin{matrix} P(1,2,3) \\ \vec{v}=(3,-2,-4) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{matrix} x=1+3t \\ y=2-2t \\ z=3-4t \end{matrix}\right\}} \textit{Siendo } t\in\mathbb{R} \quad (\text{Ecuación paramétrica})$$

$$\left.\begin{matrix} P(1,2,3) \\ \vec{v}=(3,-2,-4) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-4}} \quad (\text{Ecuación continua})$$

Y por último la ecuación general o implícita la obtenemos a partir de la ecuación continua:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-4} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-2} \\ \dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{-4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+2=3y-6 \\ -4y+8=-2z+6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x-3y+8=0 \\ -4y+2z+2=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} -2x-3y+8=0 \\ -2y+z+1=0 \end{cases}}$$

Ejercicios

1. Determina la ecuación continua y las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por los puntos $A(2,-3,1)$ y $B(4,5,-1)$.

   Solución: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{8}=\frac{z-1}{-2}$ $\quad \begin{cases} 4x-y-11=0 \\ x+z-3=0 \end{cases}$ *Aunque las ecuaciones implícitas no tienen una expresión única.*

2. Determina la ecuación continua y las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por los puntos $A(1,1,1)$ y $B(2,1,2)$.

   Solución: $(x,y,z)=(1,1,1)+t(1,0,1) \Rightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=1 \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x-z=0 \end{cases}$

3. Obtén 6 puntos de la recta $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{8}=\frac{z-1}{-2}$. Averigua su vector director.

   Solución: *Un punto puede ser $P_1(0,-3,1)$, pero el resto de puntos pedidos pueden ser muchos. Una recta contiene infinitos puntos, las soluciones al ejercicio son infinitas.* $\vec{v}=(2,8,-2)$.

4. Dada la ecuación de la recta $\left.\begin{matrix} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \end{matrix}\right\}$ Averigua dos puntos y su vector director.

   Solución: P(0,1,2) y Q(3,1,-1). $\vec{v}=(1,0,-1)$.

2.Ecuación del plano en el espacio

Un plano π en el espacio viene determinado por un punto $P(x_o,y_o,z_o)$ y 2 vectores $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ no paralelos (llamados vectores directores).

Ecuación vectorial:

$$\left.\begin{matrix} P(x_o,y_o,z_o) \\ \vec{u}=(u_1,u_2,u_3) \\ \vec{v}=(v_1,v_2,v_3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x,y,z)=(x_o,y_o,z_o)+a(u_1,u_2,u_3)+b(v_1,v_2,v_3) \ \textit{Siendo } a,b\in\mathbb{R}$$

Ecuación paramétrica:

$$\left.\begin{matrix} P(x_o,y_o,z_o) \\ \vec{u}=(u_1,u_2,u_3) \\ \vec{v}=(v_1,v_2,v_3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=x_o+a\cdot u_1+b\cdot v_1 \\ y=y_o+a\cdot u_2+b\cdot v_2 \\ z=z_o+a\cdot u_3+b\cdot v_3 \end{matrix}\right\} \textit{Siendo } a,b\in\mathbb{R}$$

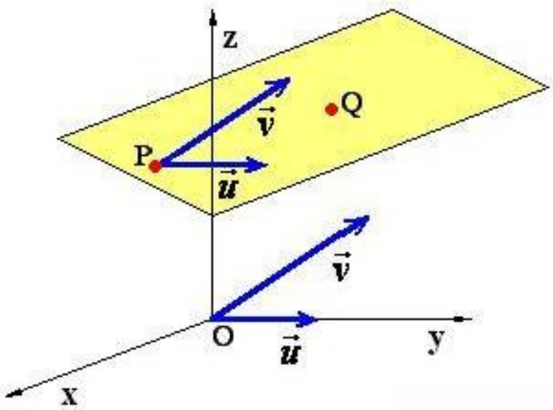
Ecuación general o implícita:

$Ax+By+Cz+D=0$

Se obtiene despejando del anterior sistema y eliminando los parámetros a y b.

Esta ecuación también se puede obtener del determinante siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} P(x_o,y_o,z_o) \\ \vec{u}=(u_1,u_2,u_3) \\ \vec{v}=(v_1,v_2,v_3) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=0$$



Nota. Un plano también queda definido por 3 puntos $P, Q\ y\ R$. Basta considerar uno de los puntos $(P, Q\ o\ R)$ y los 2 vectores directores como los vectores que unen los tres puntos, por ejemplo de P a Q ($\vec{u}=\overrightarrow{PQ}$) y de P a R ($\vec{v}=\overrightarrow{PR}$).

Ejemplos:

1. Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,-2,3)$ y tiene como vectores directores $\vec{u}=(1,2,3)\ y\ \vec{v}=(-5,4,2)$.

   Calculamos directamente la ecuación general del plano pedido:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$4(x-1)-15(y+2)+4(z-3)-\left[-10(z-3)+2(y+2)+12(x-1)\right]=0$$

$$4(x-1)-15(y+2)+4(z-3)+10(z-3)-2(y+2)-12(x-1)=0$$

$$-8(x-1)-17(y+2)+14(z-3)=0$$

$$\boxed{-8x-17y+14z-68=0}$$

2. Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,-2,3)$; $Q(-1,0,2)\ y\ R(0,2,2)$.

   Determinamos los vectores directores del plano y luego su ecuación general:

$$\left.\begin{array}{l} P(1,-2,3) \\ Q(-1,0,2) \\ R(0,2,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P(1,-2,3) \\ \vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(-1,0,2)-(1,-2,3)=(-2,2,-1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{PR}=(0,2,2)-(1,-2,3)=(-1,4,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$-2(x-1)+y+2-8(z-3)-\left[-2(z-3)+2(y+2)-4(x-1)\right]=0$$
$$-2(x-1)+y+2-8(z-3)+2(z-3)-2(y+2)+4(x-1)=0$$
$$-6(z-3)-(y+2)+2(x-1)=0$$
$$\boxed{2x-y-6z+14=0}$$

Ejercicios

1. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A(1,0,0) y es paralelo a las rectas:
$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{3}\ \ y\ \ s:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-1}$$
Solución: $\pi:-5x+7y-3z+5=0$

2. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A(1,0,0) y contiene a la recta
$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{3}$$
Solución: $\pi:2x-y-2=0$

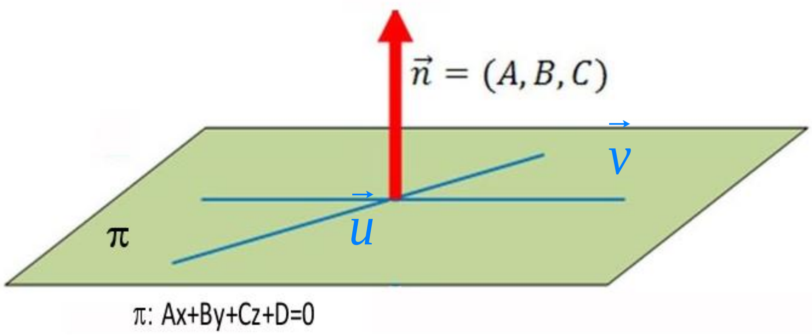
3. Indica si el punto P(-2,1,0) pertenece a alguno de los planos:
$$\pi:3x-5y+7z-8=0\qquad \pi':\begin{cases}x=1-3\alpha+\beta\\ y=\alpha-\beta\\ z=5-\alpha\end{cases}\qquad \pi'':\begin{cases}x=9-3\alpha+\beta\\ y=\alpha-\beta\\ z=5-\alpha\end{cases}$$
Solución: Solo está en el plano π''

4. Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A(1,1,0); B(0,1,1) y C(1,0,1).
Solución: $\pi:-x-y-z+2=0$

2.1 Vector normal del plano

Se llama **vector normal del plano** $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ al vector:
$$\vec{n}=(A,B,C)$$
Este vector es perpendicular al plano. *Como la pata de una mesa respecto del tablero de dicha mesa.*

Nota: *Este vector al ser perpendicular al plano es perpendicular a los vectores directores del plano, por lo que se puede obtener a partir del producto vectorial de ambos. Evidentemente, vectores normales hay infinitos, aunque todos son paralelos, pues indican la misma dirección.*



Ejemplos:

1. Determina el vector normal al plano $\pi: 2x+y-z-2=0$.
   A = 2; B = 1 y C = –1 → $\vec{n}=(2,1,-1)$

2. Calcula el vector normal del plano que pasa por el punto $P(1,-2,3)$ y tiene como vectores directores $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=(-5,4,2)$.
   Para determinar el vector normal calculemos el producto vectorial de los vectores directores (da igual el orden en que se haga dicho producto $\vec{u}\times\vec{v}$ o $\vec{v}\times\vec{u}$):
   $$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix}=4i-15j+4k-(-10k+2j+12i)=-8i-17j+2k$$
   $$\boxed{\vec{n}=(-8,-17,2)}$$

2.2 Ecuación del plano dado su vector normal y un punto

Determinar la ecuación del plano $\pi: Ax+By+Cz+D=0$, a partir de su vector normal $\vec{n}=(A,B,C)$ y un punto *P(a, b, c)* es muy sencillo. Solo falta determinar el valor de *D* y para ello basta sustituir en la ecuación y resolver una sencilla ecuación.

Ejemplo:

Determina la ecuación del plano que contiene al punto P(1,0,2) y tiene como vector normal $\vec{n}=(1,-1,2)$.

Como $\vec{n}=(1,-1,2)$ el plano debe tener la ecuación $x-y+2z+D=0$. Solo falta determinar el valor de D, para ello utilicemos el hecho de que el punto P(1,0,2) está en el plano, sustituyendo sus coordenadas en la ecuación del plano:

$$\left.\begin{array}{l} P(1,0,2) \\ x-y+2z+D=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 1-0+4+D=0\Rightarrow D=-5$$

$\boxed{\textbf{La ecuación del plano pedida es } x-y+2z-5=0}$

Ejercicios

1. Determina la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas O(0,0,0) y tiene como vector normal $\vec{n}=(-1,2,0)$.
   Solución: $\pi: -x+2y=0$

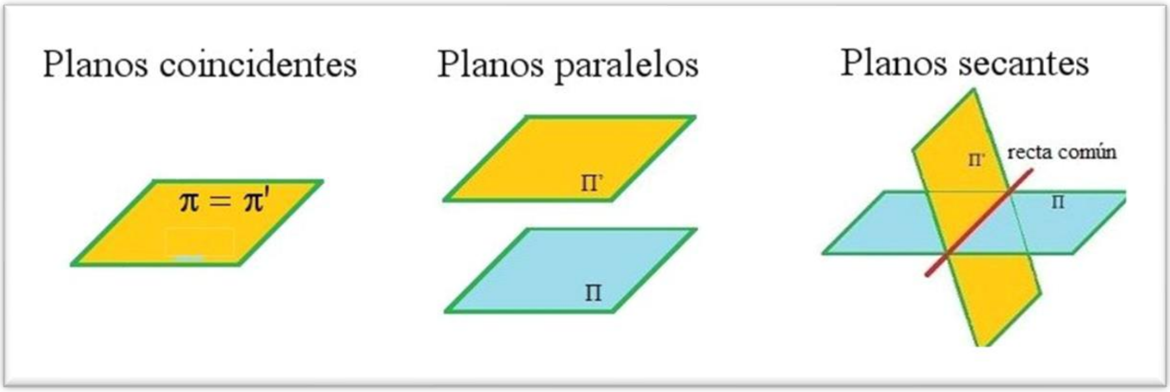
2. Determina la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a la recta $r: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{3}$.
   Solución: $\pi: x+2y+3z=0$

3.Posiciones relativas

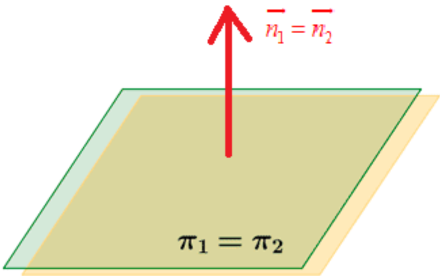
Las posiciones relativas entre puntos, rectas y planos los separamos en varios casos.

3.1 Posiciones relativas de 2 planos

Las posiciones relativas de 2 planos $\pi_1 : Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi_2 : A'x+B'y+C'z+D'=0$ con vectores normales respectivos $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ se reducen a tres:

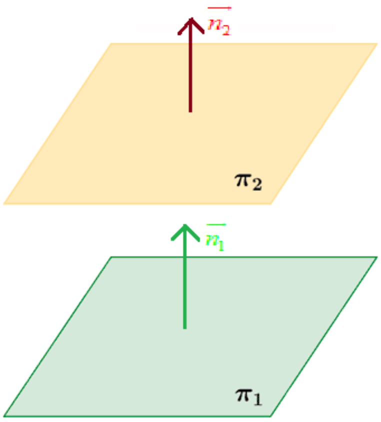


- **Planos coincidentes:**



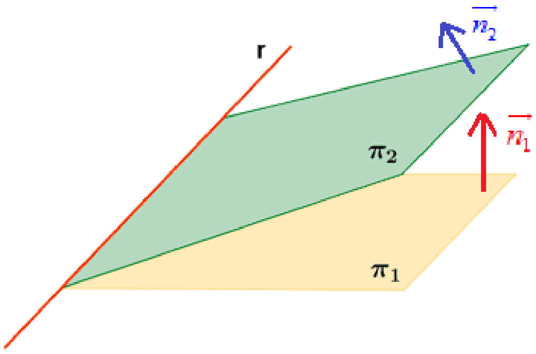
Se cumple que $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$. Las ecuaciones de los 2 planos son idénticas si simplificamos ambas ecuaciones. Los vectores normales son paralelos $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$.

- **Planos paralelos:**



Se cumple que $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$. Las ecuaciones difieren en el termino independiente de la ecuación de ambos planos. Los vectores normales son paralelos $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$.

- **Planos secantes:**



Se cumple que alguna de las igualdades $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$ no es cierta. Los vectores normales no son paralelos.
Se cortan en una serie de puntos que constituyen una recta *r*.

Ejercicios

Estudia la posición relativa de los siguientes pares de planos:

a) $\pi_1: x-3y+z=0$ y $\pi_2: -3x+9y-3z+4=0$

b) $\pi_1: 2x-y+3z-2=0$ y $\pi_2: -3x+y-2z+1=0$

c) $\pi_1: x-5y-z+3=0$ y $\pi_2: -2x+10y+2z-6=0$

Solución: a) Paralelos b)Secantes c) Coincidentes

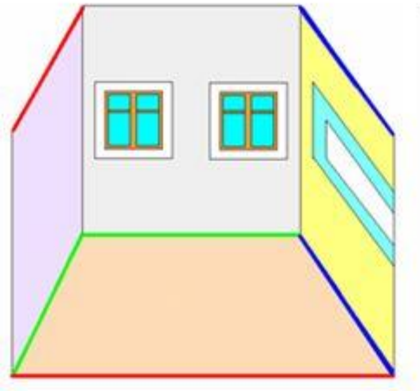
3.2 Posiciones relativas de 2 rectas

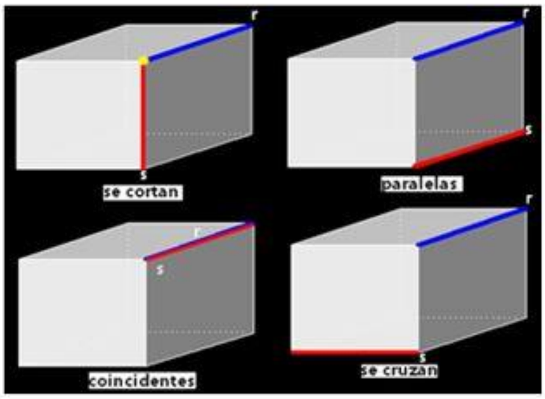
Dadas las rectas:

$r: \frac{x-x_r}{u_1}=\frac{y-y_r}{u_2}=\frac{z-z_r}{u_3}$ que pasa por el punto $A=(x_r,y_r,z_r)$ y vector director $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$

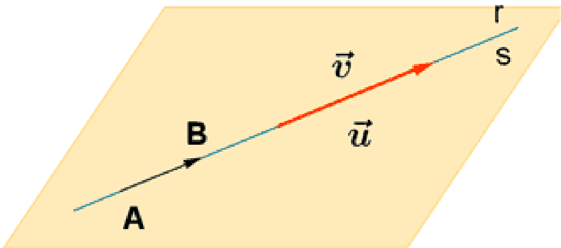
y $s: \frac{x-x_s}{v_1}=\frac{y-y_s}{v_2}=\frac{z-z_s}{v_3}$ que pasa por el punto $B=(x_s,y_s,z_s)$ y vector director $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

para estudiar las posiciones relativas entre ellas vamos a estudiar la relación entre los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$. Las posiciones relativas de las 2 rectas pueden ser:





- **Rectas coincidentes (tienen todos los puntos en común):**



Se cumple que los vectores directores de ambas rectas son paralelos y el punto P_r está en la recta *s*. Se comprueba que los 3 vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ son paralelos.

***Ejemplo**:*

Estudia la posición relativa de las rectas:

$$r: \frac{x}{-4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4} \quad \text{y} \quad s: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Para ello obtenemos sus vectores directores respectivos: $\overrightarrow{u_r} = (-4, 2, -4)$ y $\overrightarrow{u_s} = (2, -1, 2)$.

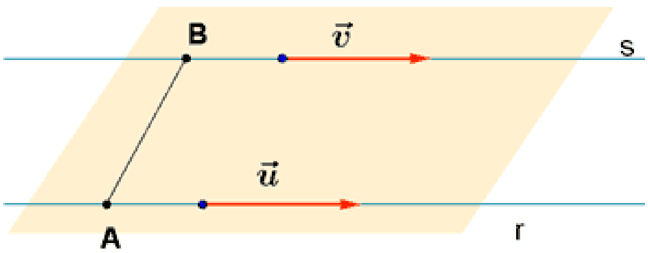
Los vectores directores son paralelos, ya que $\frac{-4}{2} = \frac{2}{-1} = \frac{-4}{2}$.

Luego las rectas son paralelas o coincidentes.

El vector que une un punto de *r* con un punto de *s* es:
$P_r = (0, -1, 3)$ y $P_s = (-2, 0, 1)$, entonces $\overrightarrow{P_rP_s} = (-2, 0, 1) - (0, -1, 3) = (-2, 1, -2)$, que es paralelo a $\overrightarrow{u_s} = (2, -1, 2)$ ya que $\frac{-4}{-4} = \frac{2}{2} = \frac{-4}{2}$. $\overrightarrow{P_rP_s}$ **es paralelo a** $\overrightarrow{u_s}$

Las rectas son **coincidentes**.

- **Rectas paralelas (no tienen puntos en común y sus vectores directores son paralelos):**



Los vectores directores son paralelos, pero $\overrightarrow{AB}$ no es paralelo a ellos. El punto P_r no pertenece a la recta s.

Ejemplo:

Estudia la posición relativa de las rectas:

$$r: \frac{x-2}{-4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-4} \quad \text{y} \quad s: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Para ello obtenemos sus vectores directores respectivos: $\vec{u_r} = (-4, 2, -4)$ y $\vec{u_s} = (2, -1, 2)$.

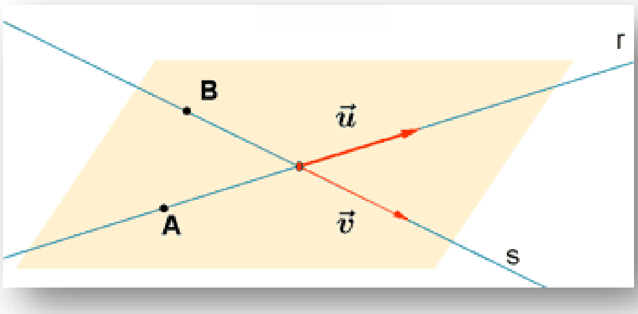
Los vectores directores son paralelos, ya que $\frac{-4}{2} = \frac{2}{-1} = \frac{-4}{2}$.

Luego las rectas son paralelas o coincidentes.

El vector que une 1 punto de r con 1 punto de s es:
$P_r = (2, -2, 4)$ y $P_s = (-2, 0, 1)$, entonces $\overrightarrow{P_rP_s} = (-2, 0, 1) - (2, -2, 4) = (-4, 2, -3)$, que no es paralelo a $\vec{u_s} = (2, -1, 2)$ ya que $\frac{-4}{2} = \frac{2}{-1} \neq \frac{-3}{2}$. $\overrightarrow{P_rP_s}$ **no es paralelo a** $\vec{u_s}$

Las rectas son **paralelas**.

- **<u>Rectas que se cortan</u> (tienen un punto en común y sus vectores directores no son paralelos):**



Se cumple que los vectores directores no son paralelos, pero los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ son linealmente dependientes (están en el mismo plano).

Ejemplos:

1. Estudia la posición relativa de las rectas:

$$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-4}{1} \quad \text{y} \quad s: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Para ello obtenemos sus vectores directores respectivos: $\vec{u_r} = (2, -1, 1)$ y $\vec{u_s} = (2, -1, 2)$. Estos vectores no son paralelos, ya que $\frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{1}{2}$. Entonces **las rectas se cortan o se cruzan**.

El vector que une un punto de *r* con un punto de *s* es:

$$P_r = (2, -2, 4) \text{ y } P_s = (-2, 0, 1), \text{ entonces } \overrightarrow{P_rP_s} = (-2, 0, 1) - (2, -2, 4) = (-4, 2, -3)$$

Calculemos el determinante formado por los 3 vectores:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 6+8+4-(4+6+8)=0$$

Los **3 vectores son linealmente dependientes** y por tanto **las rectas se cortan**.
Para hallar el punto de corte de ambas rectas planteamos el sistema formado por ambas ecuaciones. Transformamos las ecuaciones en paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} r: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-4}{1}=a \\ s: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}=b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x=2+2a \\ y=-2-a \\ z=4+a \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} x=-2+2b \\ y=-b \\ z=1+2b \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2+2a=-2+2b \\ -2-a=-b \\ 4+a=1+2b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a-2b=-4 \\ -a+b=2 \\ a-2b=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-b=-2 \\ -a+b=2 \\ a-2b=-3 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 1^{a}\ y\ 2^{a}\ ecuación \\ son\ iguales \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-b=-2 \\ a-2b=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=b-2 \\ a=2b-3 \end{array}\right\} \Rightarrow b-2=2b-3 \Rightarrow -b=-1 \Rightarrow b=1$$

El punto de corte es $\left.\begin{array}{l} x=-2+2=0 \\ y=-1 \\ z=1+2=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P(0,-1,3)}$

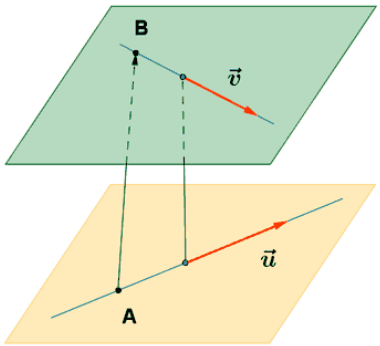
2. Estudia la posición relativa de las dos rectas:

$$r: \frac{x-2}{-2}=y+4=\frac{z-3}{2} \qquad s: \frac{x+1}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z-4}{-1}$$

Los vectores directores de las rectas son $\vec{u}=(-2,1,2); \vec{v}=(-1,3,-1)$ que no son proporcionales, luego las rectas no son paralelas ni coincidentes. Si consideramos un tercer vector definido por un punto de cada recta, por ejemplo $A(2,-4,3)\ y\ B(-1,0,4)$. El vector $\overrightarrow{AB}=(-1,0,4)-(2,-4,3)=(-3,4,1)$.

$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6+3-8-(-18-1+8)=0$ Los tres vectores son coplanarios y por tanto **las rectas se cortan**.

- **<u>Rectas que se cruzan</u> (no tienen puntos en común y sus vectores directores no son paralelos):**



Se cumple que los vectores directores no son paralelos y los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ son linealmente independientes.

Ejemplo:

Estudia la posición relativa de las rectas:

$$r:\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+4}{1} \quad \text{y} \quad s:\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$$

Para ello obtenemos sus vectores directores respectivos: $\overrightarrow{u_r}=(2,-1,1)$ y $\overrightarrow{u_s}=(2,-1,2)$.

Estos vectores no son paralelos, ya que $\frac{2}{2}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{1}{2}$.

Entonces las rectas se cortan o se cruzan.

El vector que une 1 punto de r con 1 punto de s es:

$P_r=(3,0,-4)$ y $P_s=(-2,0,1)$, entonces $\overrightarrow{P_rP_s}=(-2,0,1)-(3,0,-4)=(-5,0,5)$

Calculemos el determinante formado por los 3 vectores:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-10+10+0-(5-10+0)=5\neq 0$$

Los **3 vectores son linealmente independientes** y por tanto **las rectas se cruzan**.

Ejercicios

1. Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $r:\begin{cases} x-3z+2=0 \\ y-2z-1=0 \end{cases} \quad y \quad s:\begin{cases} x-2y-5=0 \\ -y-z-4=0 \end{cases}$

b) $r:\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=1+3\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases} \quad y \quad s:(x,y,z)=(0,1,-1)+\mu(-2,6,2)$

c) $r:(x,y,z)=(4,3,5)+\lambda(3,0,-6) \quad y \quad s:(x,y,z)=(2,3,9)+\mu(1,0,-2)$

d) $r:\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=z \quad y \quad s:\frac{x-3}{2}=y+1=\frac{z+3}{-1}$

e) $r:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases} \quad y \quad s:\mathrm{x}-2=\mathrm{y}=\frac{z-1}{4}$

Solución: a) Se cruzan b) Paralelas c) Coincidentes d)Se cruzan e) Secantes

2. Halla el punto de interseccion de las rectas:

$$r:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases} \quad y \quad s: x-2=y=\frac{z-1}{4}$$

Solución: P(3,1,5)

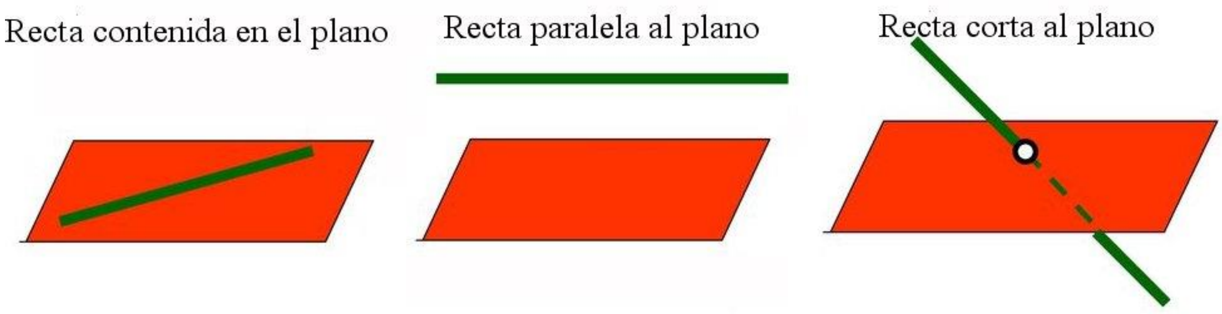
3. Halla el punto de interseccion de las rectas:

$$r:\begin{cases} 2x-z+2=0 \\ x+y+2z-3=0 \end{cases} \quad y \quad s:\begin{cases} x-y+z+1=0 \\ 3x-y+3=0 \end{cases}$$

Solución: $P\left(\frac{-1}{2},\frac{3}{2},1\right)$

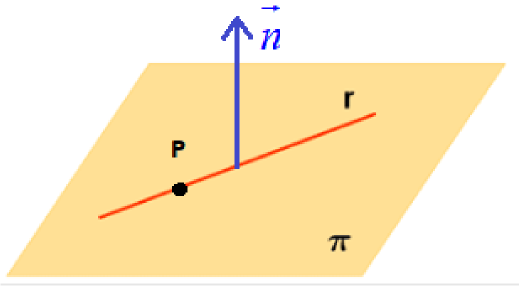
3.3 Posiciones relativas de 1 plano y 1 recta

Las posiciones relativas del plano $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ y la recta $r:\frac{x-a}{v_1}=\frac{y-b}{v_2}=\frac{z-c}{v_3}$ son:



Se puede estudiar la posición relativa de ambos considerando el vector director de la recta y el vector normal del plano o bien resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos.

- **<u>Recta contenida en plano</u> (Tienen en común todos los puntos)**



Se cumple que el vector normal del plano $\vec{n}=(A,B,C)$ es perpendicular al vector director de la recta $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y además el punto $P(a,b,c)$ de la recta pertenece al plano.
También se puede comprobar viendo que hay 2 puntos de la recta que pertenecen al plano.

***Ejemplo**:*

Estudia la posición relativa del plano $\pi: x+2y-3z=0$ y la recta $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{0}$.

Veamos si vector normal al plano $\vec{n}=(1,2,-3)$ y vector director de recta $\vec{v}=(2,-1,0)$ son ortogonales (su producto escalar es 0):

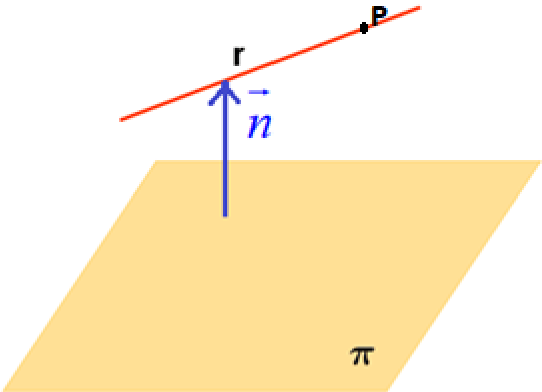
$\vec{n}\cdot\vec{v}=(1,2,-3)\cdot(2,-1,0)=2-2+0=0$

Son perpendiculares, luego son coincidentes o paralelos.

¿Pertenece el punto $P(1,1,1)$ de la recta al plano $\pi : x+2y-3z=0$?

$\left.\begin{array}{l} P(1,1,1) \\ \pi : x+2y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ ¿$1+2-3=0$? Si es cierto. El punto P y **todos los puntos de la recta están en el plano**. **Recta y plano son coincidentes.**

- **<u>Recta paralela al plano</u> (No tienen en común ningún punto)**



Se cumple que el vector normal del plano $\vec{n}=(A,B,C)$ es perpendicular al vector director de la recta $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, pero el punto de la recta $P(a,b,c)$ no pertenece al plano.

Ejemplo:

Estudia la posición relativa del plano $\pi : x+2y-3z=0$ y la recta $r:\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$.

Veamos si vector normal al plano $\vec{n}=(1,2,-3)$ y vector director de recta $\vec{v}=(-1,2,1)$ son ortogonales (veamos si su producto escalar es 0):

$\vec{n}\cdot\vec{v}=(1,2,-3)\cdot(-1,2,1)=-1+4-3=0$

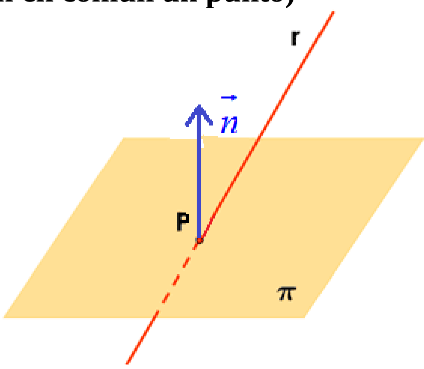
Son perpendiculares, luego son coincidentes o paralelos.

¿Pertenece el punto $P(1,1,-1)$ de la recta al plano $\pi : x+2y-3z=0$?

$\left.\begin{array}{l} P(1,1,-1) \\ \pi : x+2y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ ¿$1+2+3=6\neq 0$? No es cierto.

El punto P no pertenece al plano. **Recta y plano son paralelos.**

- **<u>Recta corta al plano</u> (Tienen en común un punto)**



El vector normal del plano $\vec{n}=(A,B,C)$ no es perpendicular al vector director de la recta $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$. Recta y plano se cortan en un punto.

Ejemplo:

Estudia la posición relativa del plano $\pi: x+2y-3z=0$ y la recta $r:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Veamos si vector normal al plano $\vec{n}=(1,2,-3)$ y vector director de recta $\vec{v}=(-1,2,-1)$ son ortogonales (veamos si su producto escalar es 0):

$\vec{n}\cdot\vec{v}=(1,2,-3)\cdot(-1,2,-1)=-1+4+3=6\neq 0$

No son perpendiculares →La recta y el plano son secantes.

Si deseamos hallar las coordenadas del punto de corte de recta y plano hay que resolver el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+2y-3z=0\\ r:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-1}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}x+2y-3z=0\\ \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}\\ \dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-1}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y-3z=0\\ 2x-2=-y+1\\ -y+1=2z+2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y-3z=0\\ 2x+y\quad\;\;=3\\ -y-2z=1\end{array}\right\}$$

¿Puedo resolverlo por Cramer?

$$\left|\begin{array}{c}\text{Determinante}\\ \text{de los}\\ \text{coeficientes}\end{array}\right|=\begin{vmatrix}1&2&-3\\2&1&0\\0&-1&-2\end{vmatrix}=-2+6-(-8)=12\neq 0$$

Puedo utilizar el método de Cramer para resolver el sistema:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0&2&-3\\3&1&0\\1&-1&-2\end{vmatrix}}{12}=\frac{9+3+12}{12}=\frac{24}{12}=2$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&0&-3\\2&3&0\\0&1&-2\end{vmatrix}}{12}=\frac{-6-6}{12}=\frac{-12}{12}=-1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&2&0\\2&1&3\\0&-1&1\end{vmatrix}}{12}=\frac{1-4+3}{12}=0$$

El punto de corte es $P(2,-1,0)$. Comprobemos que el punto hallado pertenece a recta y al plano:

$$\left.\begin{array}{l}P(2,-1,0)\in\pi\\ \pi: x+2y-3z=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2+2(-1)-0=0 \text{ Es cierto. El punto está en el plano}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(2,-1,0)\in r \\ r: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2-1}{-1}=\frac{-1-1}{2}=\frac{0+1}{-1} \Rightarrow \frac{1}{-1}=\frac{-2}{2}=\frac{1}{-1}$$ Es cierto. El punto está en la recta

Ejercicios

1. Determina la posición relativa de las rectas y los planos siguientes:

   a) $\left.\begin{array}{l} \pi: 2x+y-4z+1=0 \\ r:\begin{cases} x+2y-2z+1=0 \\ y+2=0 \end{cases} \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} \pi: x-3y+z-2=0 \\ r:\begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ x-y+z+2=0 \end{cases} \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} \pi: x+y+z=0 \\ r:\begin{cases} x-3y+2z-5=0 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases} \end{array}\right\}$

   Solución: a) Paralelos b) Secantes c) La recta contenida en el plano

2. Determina la posición relativa de la recta y el plano siguiente:

   $\left.\begin{array}{l} \pi: x-2y+z-4=0 \\ r: \dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y}{2}=z+3 \end{array}\right\}$

   Solución: Secantes

3. Halla el punto de intersección entre la recta $r: x+2=\dfrac{y-1}{-2}=z$ y el plano $\pi: x-2y+z-8=0$

   Solución: *P(0,-3,2)*

4. Determina el punto común a la recta $r: \dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y}{2}=z+3$ y el plano $\pi: x-2y+z-5=0$

   Solución: P(5, –2,–4)

Ejercicios

1. a) Demostrar que las rectas $L_1 \equiv \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases}$ $L_2 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 4-t \end{cases}$ se cortan en un punto. ¿Cuál es ese punto?

   b) Encontrar la ecuación del plano determinado por dichas rectas.

   *PAU 2005. **Sol**: a)* $P(3,0,1)$ *b)* $x+3y+z-4=0$

2. Encuentre el plano que contiene a la recta $L \equiv \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+t \\ z = 3 \end{cases}$ y es paralelo a la recta determinada por los puntos $P(1,1,1)$ y $Q(-1,0,2)$.

   *PAU 2001. **Sol**:* $x+y+3z-12=0$

3. Estudie, según los valores de *a*, la posición relativa de las rectas:

   $$L \equiv \begin{cases} x = 1+at \\ y = -1-at \\ z = 1+t \end{cases} \qquad L' \equiv \begin{cases} x+y+z = 2 \\ 3x-y+az = 5 \end{cases}$$

   *PAU 1999. **Sol**: Si* $a \neq \frac{1}{6}$ *se cruzan, si* $a = \frac{1}{6}$ *se cortan*

4. Encontrar la ecuación del plano que es paralelo al que tiene por ecuación $x+y+z-1=0$ y que pasa por el punto $(1,2,3)$.

   *PAU 1998. **Sol**:* $x+y+z-6=0$

5. Estudie si las rectas: $L_1 \equiv \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = 3+t \end{cases}$ $L_2 \equiv \begin{cases} x-2z = 3 \\ y+z = 0 \end{cases}$ determinan un plano y, en caso afirmativo, encuentre su ecuación..

   *PAU 2002. **Sol**: L_1 y L_2 son paralelas y determinan el plano* $\pi : x+2y-3=0$

6. a) Demuestre que las rectas siguientes se cortan en un punto. ¿Cuál es ese punto?

   $$r_1 : \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 6+\lambda \\ z = 6+\lambda \end{cases}$$

   b) Calcule la ecuación general del plano determinado por ambas rectas.

   *PAU 2006. **Sol**: a) El punto de corte es (0, 5, 5). b)* $-x+3y-2z-5=0$

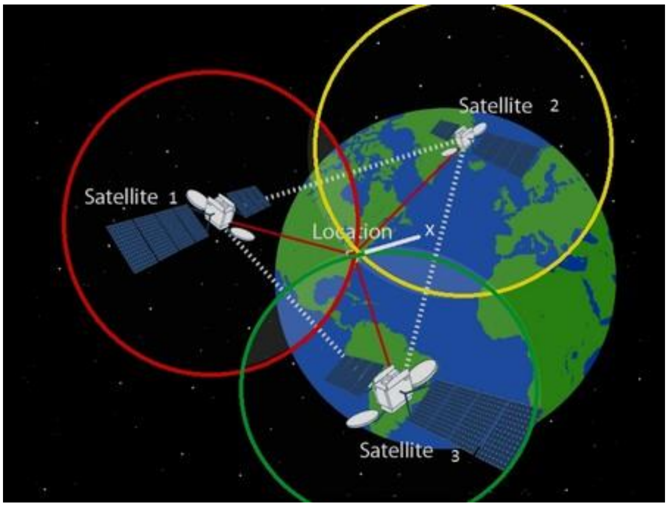
7. a) Estudie si la recta $r \equiv \begin{cases} x+y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x+y+z=4$ son o no paralelos.

   b) Encuentre la ecuación general del plano π' que contiene a *r* y es perpendicular a π.

   *PAU 2000. **Sol**: a) Son paralelos b)* $\pi' \equiv -x-y+2z-2=0$

Tema 6. Geometría métrica en el espacio.

¿Dónde aparecen los vectores independientes o no en el posicionamiento de un dispositivo GPS? ¿Qué relación guarda con el ángulo, área o volumen?



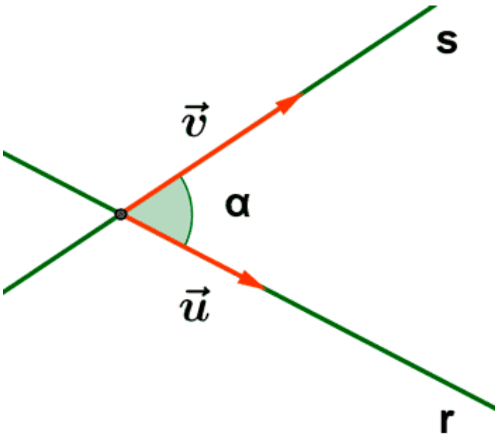
Vamos a calcular ángulos y distancias entre puntos, rectas y planos. También áreas y volúmenes de figuras geométricas sencillas (triángulos, paralelogramos, tetraedros y paralelepípedos).

1. Ángulos

1.1 Ángulo de dos rectas

Dadas las rectas $r:\begin{cases} A(a,b,c) \\ \vec{u}=(u_1,u_2,u_3) \end{cases}$ y $s:\begin{cases} B(d,e,f) \\ \vec{v}=(v_1,v_2,v_3) \end{cases}$, se define el ángulo de r y s como el ángulo agudo que forman sus vectores directores:

$$\acute{A}ngulo(r,s)=\acute{A}ngulo(\vec{u},\vec{v})$$



Nota: Si obtenemos el ángulo obtuso (∝), el ángulo que forman las rectas será 180º – ∝.

Si las rectas son paralelas el ángulo que forman es de 0º.

Ejemplos:

1. Halla el ángulo que forman las rectas:

$$r: \frac{x-2}{-2} = y+4 = \frac{z-3}{2} \qquad s: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{-1}$$

Utilicemos el producto escalar de los vectores directores para hallar el ángulo formado por las rectas:

$$\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{(-2,1,2)\cdot(-1,3,-1)}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{1+9+1}} = \frac{2+3-2}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{11}} = \frac{3}{3\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

$$\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \text{arc}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right) = 72,4^{\circ}$$

El ángulo formado por las rectas es de 72,4º.

2. Halla el ángulo determinado por las rectas:

$$r: \frac{x+3}{5} = y-1 = \frac{z+2}{-1} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = -2+3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

De las ecuaciones obtenemos los vectores directores $\vec{u} = (5,1,-1); \vec{v} = (-1,3,2)$

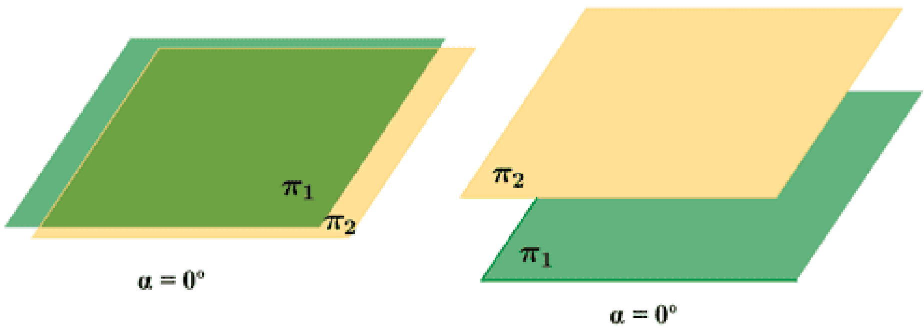
$$\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{25+1+1} = \sqrt{27} \\ |\vec{v}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14} \\ \vec{u}\cdot\vec{v} = (5,1,-1)(-1,3,2) = -5+3-2 = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-4}{\sqrt{27}\cdot\sqrt{14}} = \frac{-4}{\sqrt{378}}$$

$arc\cos\left(\frac{-4}{\sqrt{378}}\right) = 102^{\circ}$ hemos obtenido el ángulo obtuso, entonces

$ángulo(r,s) = 180^{\circ} - 102^{\circ} = 78^{\circ}$

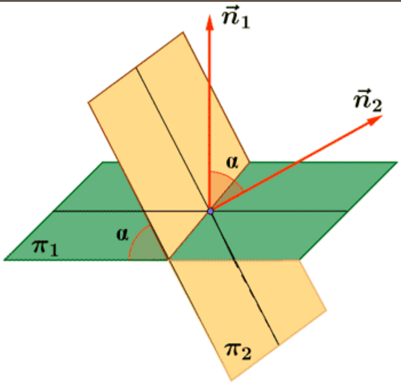
1.2 Ángulo de dos planos

Si los dos planos son **coincidentes** o **paralelos** forman un ángulo de **0º.**



Dados los planos $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ secantes.
El ángulo formado por ambos planos es el ángulo agudo que forman sus vectores normales $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$

$$\text{ángulo}(\pi_1, \pi_2) = \text{ángulo}\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right) = arc\cos\left(\frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right)$$



Ejemplos:

1. Halla el ángulo que forman los planos: $\pi_1 : x - 2y + z - 2 = 0$ ***y*** $\pi_2 : -2x + 3y + z + 1 = 0$
   Necesitamos obtener de la expresión de la ecuación los vectores normales:
   $\overrightarrow{n_1} = (1, -2, 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (-2, 3, 1)$
   $$\frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{(1,-2,1)\cdot(-2,3,1)}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+9+1}} = \frac{-2-6+1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = \frac{-7}{\sqrt{84}}$$
   $$arc\cos\left(\frac{-7}{\sqrt{84}}\right) = 139,8^\circ$$
   $$\text{ángulo}(\pi_1, \pi_2) = 180^\circ - 139,8^\circ = 40,2^\circ$$

2. Halla el ángulo que forman los planos: $\pi_1 : x - 2y + z - 2 = 0$ ***y*** $\pi_2 : -2x + 4y - 2z + 1 = 0$
   Necesitamos obtener de la expresión de la ecuación los vectores normales:
   $\overrightarrow{n_1} = (1, -2, 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (-2, 4, -2)$
   $$\frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{(1,-2,1)\cdot(-2,4,-2)}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+16+4}} = \frac{-2-8-2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}} = \frac{-12}{\sqrt{144}} = -1$$
   $$arc\cos(-1) = 180^\circ$$
   $$\text{ángulo}(\pi_1, \pi_2) = 180^\circ - 180^\circ = 0^\circ$$
   Los planos son paralelos.

3. Halla el ángulo que forman los planos: $\pi_1 : x + 2y + 2z - 2 = 0$ ***y*** $\pi_2 : -2x + 3y - 2z + 1 = 0$
   Necesitamos obtener de la expresión de la ecuación los vectores normales:

$\overrightarrow{n_1}=(1,2,2)$ y $\overrightarrow{n_2}=(-2,3,-2)$

$$\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{(1,2,2)\cdot(-2,3,-2)}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+16+4}}=\frac{-2+6-4}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}}=\frac{0}{\sqrt{144}}=0$$

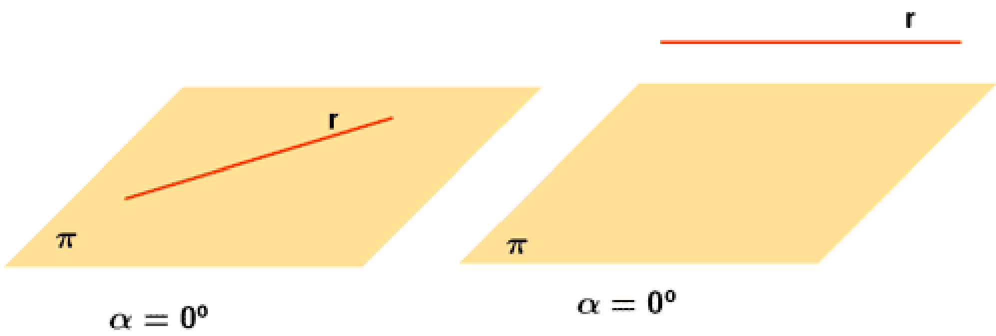
$arc\cos(0)=90^{o}$

$ángulo(\pi_1,\pi_2)=90^{o}$

Los planos son ortogonales.

1.3 Ángulo de recta y plano

- Si la recta está incluida en el plano o ambos son paralelos, recta y plano forman un ángulo de $\alpha=0^{o}$.



- Si la recta y el plano son secantes, el ángulo de la recta
  $r:\begin{cases}A(a,b,c)\\ \vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\end{cases}$ y el plano $\pi: Ax+By+Cz+D=0$
  es igual al ángulo que forma la recta *r* con la recta *r'* que es la proyección de la recta r sobre el plano π.
  De todos los ángulos formados por *r* con las rectas contenidas en π, el ángulo ∝(r,r') es el menor posible, y por eso se le define como el ángulo formado por la recta y el plano.

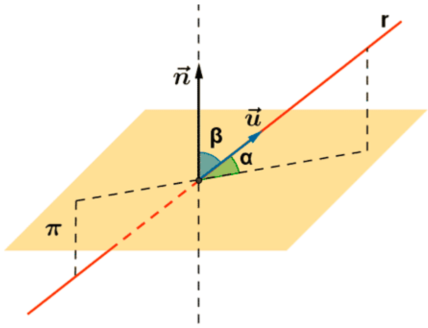
  El ángulo que forman una recta y un plano es igual al complementario del ángulo agudo que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano.

Sea la recta $r:\begin{cases}A(a,b,c)\\ \vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\end{cases}$ y el plano $\pi: Ax+By+Cz+D=0$

El ángulo que forman el vector director de la recta $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y el vector normal del plano $\vec{n}=(A,B,C)$ se obtiene a partir de la fórmula del producto escalar:

$$\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}$$

El ángulo entre recta y plano es $90^{o}-\left(\vec{u},\vec{n}\right)$



Ejemplos:

1. Determina el ángulo que forman la recta $r: \dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{-y-2}{2} = -z-1$ y el plano $\pi: x-y+2z-6=0$.

   La recta tiene como vector director $\vec{u} = (-3,-2,-1)$, aunque lo podemos cambiar por $\vec{u} = (3,2,1)$ y el vector normal del plano es $\vec{n} = (1,-1,2)$, el ángulo entre estos vectores es:

   $$\cos(\vec{u},\vec{n}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{(3,2,1)\cdot(1,-1,2)}{\sqrt{9+4+1}\cdot\sqrt{1+1+4}} = \frac{3-2+2}{\sqrt{84}} = \frac{3}{\sqrt{84}}$$

   $$(\vec{u},\vec{n}) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{84}}\right) = 70,9^o$$

   El ángulo entre recta y plano es de $90^o - 70,9^o = 19,1^o$

2. Halla el ángulo que forma el plano $\pi: 3x-2y+z-2=0$ y la recta $r: \begin{cases} x+y-2z-1=0 \\ -x+3y-z+4=0 \end{cases}$

   La recta tiene como vector director el producto vectorial de los vectores normales de cada uno de los planos que la definen:

   $$\vec{u} = (1,1,-2)\times(-1,3,-1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5i+3j+4k = (5,3,4)$$ y el vector normal del plano π es $\vec{n} = (3,-2,1)$, el ángulo entre estos vectores es:

   $$\cos(\vec{u},\vec{n}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{(5,3,4)\cdot(3,-2,1)}{\sqrt{25+9+16}\cdot\sqrt{9+4+1}} = \frac{15-6+4}{\sqrt{700}} = \frac{13}{\sqrt{700}}$$

   $$(\vec{u},\vec{n}) = \cos^{-1}\left(\frac{13}{\sqrt{700}}\right) = 60,5^o$$

   El ángulo entre recta y plano es de $90^o - 60,5^o = 29,5^o$

Ejercicios

1. Calcular el ángulo que forman las rectas $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$ y $s: \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{-2}$

   Solución: El ángulo es 180º – 122º18’41 = 57º 41’18,5’’

2. Calcular el ángulo que forman plano $\pi: x-y+z=0$ y la recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{3}$

   Solución: 67 º 47' 32,44"

3. Calcular el ángulo que forman los planos $\pi_1: x+y-2z=3$ y $\pi_2: -x+y+2z=2$

   Solución: 48 º 12' 12,9"

2. Distancias

2.1 Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$, definimos la **distancia entre los dos puntos A y B** como el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|$$

Ejemplo:

La distancia entre el punto A(1,2,3) y el punto B(1,4,3) sabemos que es 2. Con la fórmula:
$AB=(1,4,3)-(1,2,3)=(0,2,0)\Rightarrow d(A,B)=\sqrt{0+4+0}=2$

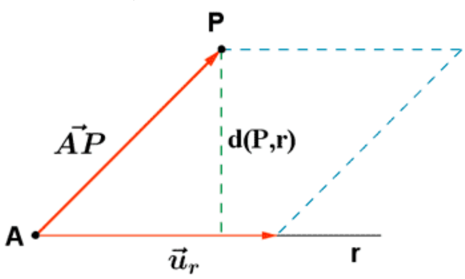
2.2 Distancia de un punto a una recta

Dado un punto $P(a_1, a_2, a_3)$ y una recta $r: \begin{cases} A(a,b,c) \\ \vec{u}=(u_1,u_2,u_3) \end{cases}$ la distancia desde *P* a *r* es el mínimo del conjunto de distancias desde *P* a un punto cualquiera de la recta. Este mínimo es único y corresponde a la perpendicular trazada desde *P* hasta *r*.

Dado un punto $P(a_1, a_2, a_3)$ y una recta $r: \begin{cases} A(a,b,c) \\ \vec{u}=(u_1,u_2,u_3) \end{cases}$ la distancia desde P a r se calcula:

$$d(P,r)=\frac{\left|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

Este cociente es la división entre el área del paralelogramo definido por el vector director de la recta y el que va de A a P y el modulo del vector director (base del paralelogramo), queda como resultado la altura que es la distancia buscada.



Ejemplos:

1. Halla la distancia desde el punto P(-3,1,-1) a la recta $r:\begin{cases} x=-2-3\lambda \\ y=-3+2\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases}$

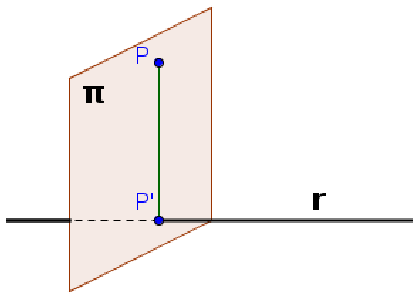
   Un punto de la recta es $A(-2,-3,1)$ y el vector director es $\vec{u}=(-3,2,-1)$.

   $\overrightarrow{AP}=(-3,1,-1)-(-2,-3,1)=(-1,4,-2)$

   $$\vec{u}\times\overrightarrow{AP}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=-5j-10k=(0,-5,-10)$$

   $$\left.\begin{array}{l} \left|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}\right|=\sqrt{0+25+100}=\sqrt{125} \\ \left|\vec{u}\right|=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14} \end{array}\right\}\Rightarrow d(P,r)=\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{14}}u$$

2. Halla la distancia desde el punto $P(2,-1,0)$ a la recta $r: x-1=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{3}$



   Vamos a hallar la distancia sin fórmula. Vamos a determinar las coordenadas del punto P' de la recta más cercano a P. Con ese punto la distancia de P a r es la distancia de P a P'.
   Para hallar ese punto P', hallamos la ecuación del plano con vector normal = vector director de la recta y que pasa por el punto P. El punto P' será la intersección del plano con la recta.
   El plano tiene la ecuación:

   $$\pi:\begin{cases} P(2,-1,0) \\ \vec{n}=(1,2,3) \end{cases}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} P(2,-1,0)\in\pi \\ \pi: \mathrm{x}+2\mathrm{y}+3\mathrm{z}+\mathrm{D}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 2-2+0+D=0\Rightarrow D=0$$

   El plano π es $\mathrm{x}+2\mathrm{y}+3\mathrm{z}=0$

   El punto de corte de recta r y plano se obtiene del sistema:

   $$\left.\begin{array}{l} \pi: \mathrm{x}+2\mathrm{y}+3\mathrm{z}=0 \\ r: x-1=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{3} \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathrm{x}+2\mathrm{y}+3\mathrm{z}=0 \\ x=1+a \\ y=-1+2a \\ z=1+3a \end{array}\right\}\Rightarrow (1+a)+2(-1+2a)+3(1+3a)=0\Rightarrow$$

   $$\Rightarrow 2+14a=0\Rightarrow a=\frac{-1}{7}\Rightarrow \text{El punto de corte es } \left.\begin{array}{l} x=1+\frac{-1}{7} \\ y=-1+2\cdot\frac{-1}{7} \\ z=1+3\cdot\frac{-1}{7} \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{6}{7} \\ y=\frac{-9}{7} \\ z=\frac{4}{7} \end{array}\right\}\Rightarrow P'\left(\frac{6}{7},\frac{-9}{7},\frac{4}{7}\right)$$

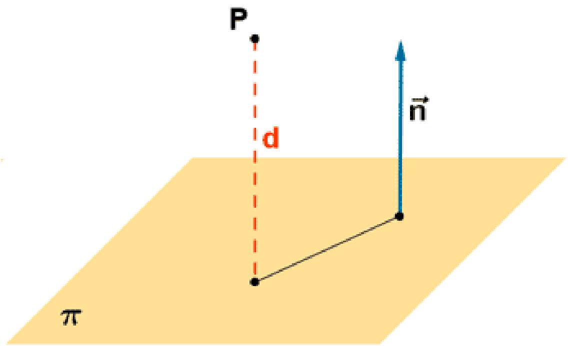
$$\overrightarrow{PP'}=\left(\frac{6}{7},\frac{-9}{7},\frac{4}{7}\right)-(2,-1,0)=\left(\frac{-8}{7},\frac{-2}{7},\frac{4}{7}\right)$$

$$Distancia(P,r)=Distancia(P,P')=\left|\overrightarrow{PP'}\right|=\sqrt{\frac{64}{49}+\frac{4}{49}+\frac{16}{49}}=\sqrt{\frac{84}{49}}=\sqrt{\frac{12}{7}}\ u$$

2.3 Distancia de un punto a un plano

Dados un punto $P(a_1,a_2,a_3)$ y un plano $\pi: Ax+By+Cz+D=0$, la distancia de P a π es la mínima distancia desde P a un punto cualquiera del plano π. Este mínimo coincide con la perpendicular trazada desde P a π. La fórmula para hallar el valor de esta distancia es:

$$d(P,\pi)=\frac{|A\cdot a_1+B\cdot a_2+C\cdot a_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



d(P, π)

Ejemplos:

1. Halla la distancia desde el punto P(1,-2,3) al plano $\pi: 2x+3y-2z+1=0$.

$$d(P,\pi)=\frac{|A\cdot a_1+B\cdot a_2+C\cdot a_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot 1+3\cdot(-2)-2\cdot 3+1|}{\sqrt{4+9+4}}=\frac{9}{\sqrt{17}}\ u$$

2. Halla la distancia desde el punto $P(1,0,2)$ al plano $\pi: 2x+3y-2z+1=0$.

- SIN FÓRMULAS:

1º Determinamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por P:

$$\left.\begin{array}{l} P(1,0,2) \\ \vec{u}=\vec{n}=(2,3,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x=1+2a \\ y=3a \\ z=2-2a \end{array}\right\}$$

2º Determinamos el punto de corte de recta y plano:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x=1+2a \\ r: y=3a \\ z=2-2a \end{array}\right\} \\ \pi: 2x+3y-2z+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(1+2a)+3(3a)-2(2-2a)+1=0 \Rightarrow -1+17a=0$$

$$a=\frac{1}{17}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1+2\frac{1}{17}=\frac{19}{17}\\ y=3\frac{1}{17}=\frac{3}{17}\\ z=2-2\frac{1}{17}=\frac{32}{17}\end{array}\right\}\Rightarrow P'\left(\frac{19}{17},\frac{3}{17},\frac{32}{17}\right)$$

3º La distancia pedida es la distancia de P a P':

$$\overrightarrow{PP'}=\left(\frac{19}{17},\frac{3}{17},\frac{32}{17}\right)-(1,0,2)=\left(\frac{2}{17},\frac{3}{17},\frac{-2}{17}\right)$$

$$d(P,\pi)=d(P,P')=\left|\overrightarrow{PP'}\right|=\left|\left(\frac{2}{17},\frac{3}{17},\frac{-2}{17}\right)\right|\sqrt{\frac{4}{289}+\frac{9}{289}+\frac{4}{289}}=\sqrt{\frac{17}{289}}=\sqrt{\frac{1}{17}}\,u$$

- CON FÓRMULA:

$$d(P,\pi)=\frac{|A\cdot a_1+B\cdot a_2+C\cdot a_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot 1+3\cdot 0-2\cdot 2+1|}{\sqrt{4+9+4}}=\frac{1}{\sqrt{17}}\,u$$

Cada cual que elija el método que prefiere utilizar.

2.4 Distancia entre dos rectas

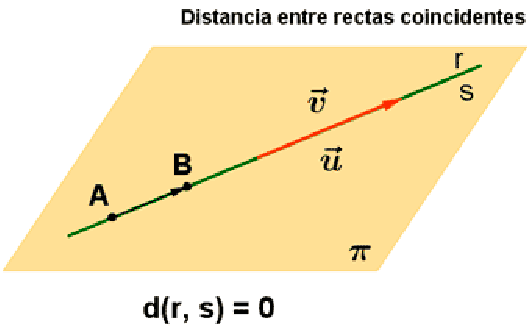
La distancia entre dos rectas r y s, d(r, s) es la mínima distancia de un punto cualquiera de r y un punto cualquiera de s.

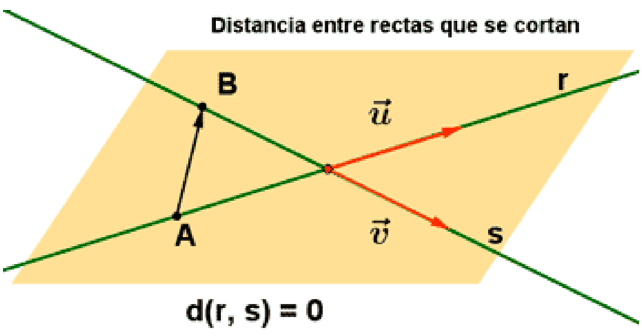
Según sea la posición relativa de las 2 rectas la distancia se calcula de forma distinta.

- **Distancia entre rectas que se cortan o son coincidentes**

Si las rectas **se cortan o son coincidentes**, su distancia es cero.

d(r, s)=0.





Ejemplos:

1. Halla la distancia entre las rectas siguientes:

$$r:\frac{x-1}{-2}=y-2=\frac{z+1}{-5} \quad s:(x,y,z)=(4,1,1)+\lambda(1,0,-3)$$

El punto y vector director de cada recta es $r:\begin{cases}A(1,2,-1)\\ \vec{u}=(-2,1,-5)\end{cases}$ $\quad s:\begin{cases}B(4,1,1)\\ \vec{v}=(1,0,-3)\end{cases}$

En primer lugar estudiamos la posición relativa de las rectas. Para ello vemos si sus vectores directores son proporcionales: $\frac{-2}{1}\neq\frac{1}{0}\neq\frac{-5}{-3}$ No son rectas ni paralelas ni coincidentes.

Estudiemos si se cruzan o cortan:

$$\overrightarrow{AB}=(4,1,1)-(1,2,-1)=(3,-1,2)$$

$$\begin{vmatrix}3&-1&2\\-2&1&-5\\1&0&-3\end{vmatrix}=-9+5-(2-6)=0$$ Las rectas se cortan y la distancia entre ellas es 0.

2. Halla la distancia entre las rectas siguientes:

$$r:\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{2} \quad s:(x,y,z)=(-1,2,1)+\lambda(1,-2,-1)$$

El punto y vector director de cada recta es $r:\begin{cases}A(1,-2,-1)\\ \vec{u}=(-2,4,2)\end{cases}$ $\quad s:\begin{cases}B(-1,2,1)\\ \vec{v}=(1,-2,-1)\end{cases}$

En primer lugar estudiamos la posición relativa de las rectas. Para ello vemos si sus vectores directores son proporcionales: $\frac{-2}{1}=\frac{4}{-2}=\frac{2}{-1}$ Las rectas son paralelas o coincidentes.

¿Paralelas o coincidentes?
Basta ver si A (punto de la recta r) pertenece a la recta s o que el punto B (punto de la recta s) pertenece a la recta r. Parece más fácil ver esto último:

$$\left.\begin{array}{l}B(-1,2,1)\\ r:\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow ¿\frac{-1-1}{-2}=\frac{2+2}{4}=\frac{1+1}{2}?$$

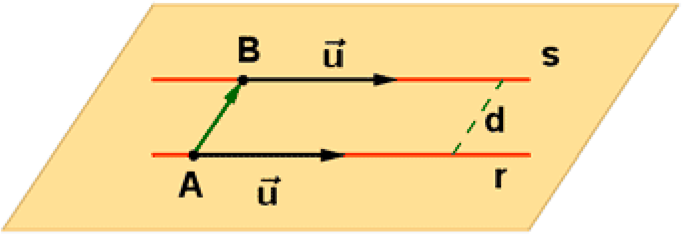
Estas igualdades son ciertas y B está en la recta r. Las rectas son coincidentes y la distancia entre ellas es 0.

- **Distancia entre rectas paralelas**

Sean $r:\begin{cases}A(a,b,c)\\ \vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\end{cases}$ y $s:\begin{cases}B(d,e,f)\\ \vec{v}=(v_1,v_2,v_3)\end{cases}$ dos rectas paralelas.

La distancia de ***r*** a ***s*** es la distancia de un punto cualquiera de ***r*** a ***s***, o la distancia de un punto cualquiera de ***s*** a ***r***.

$$d(r,s) = d(A,s) = d(B,r) = \frac{\left|\vec{u} \times \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$$



d(r,s)=d(A,s)=d(B,r)

Ejemplo:

Halla la distancia entre las rectas siguientes:

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-2}{4} \qquad s: \frac{x+3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{4}$$

El punto y vector director de cada recta es $r: \begin{cases} A(2,-4,2) \\ \vec{u} = (3,2,4) \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} B(-3,0,-1) \\ \vec{v} = (3,2,4) \end{cases}$

En primer lugar estudiamos la posición relativa de las rectas. Para ello vemos si sus vectores directores son proporcionales. En este caso son iguales. Las rectas son paralelas o coincidentes.

¿Paralelas o coincidentes?

Basta ver si B (punto de la recta s) pertenece a la recta r:

$$\left.\begin{array}{l} B(-3,0,-1) \\ r: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-2}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\frac{-3-2}{3} = \frac{0+4}{2} = \frac{-1-2}{4}? \Rightarrow \frac{-5}{3} \neq \frac{4}{2} \neq \frac{-3}{4}$$

Estas igualdades no son ciertas y B no está en la recta r. Las rectas son paralelas y la distancia entre ellas la obtenemos:

$$\overrightarrow{AB} = (-3,0,-1) - (2,-4,2) = (-5,4,-3)$$

$$\vec{v} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 4 \\ -5 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -6i - 20j + 12k - (-10k - 9j + 16i) = -22i - 11j + 22k = (-22,-11,22)$$

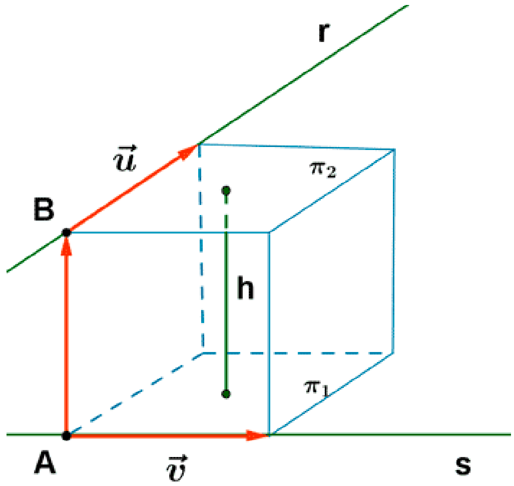
$$d(r,s) = d(A,s) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{\sqrt{1089}}{\sqrt{9+4+16}} = \frac{33}{\sqrt{29}}\,u$$

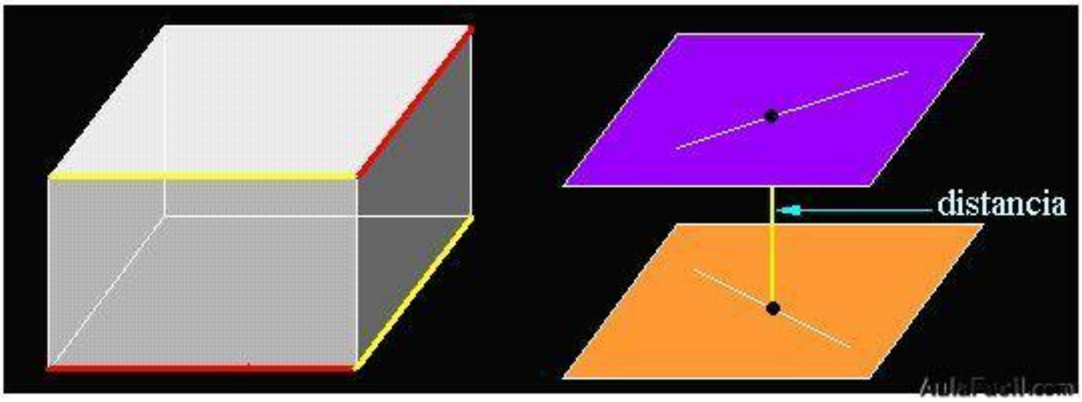
- **Distancia entre rectas que se cruzan**

Sean $r: \begin{cases} A(a,b,c) \\ \vec{u} = (u_1,u_2,u_3) \end{cases}$ $y\ s: \begin{cases} B(d,e,f) \\ \vec{v} = (v_1,v_2,v_3) \end{cases}$ dos rectas que se cruzan.

La distancia entre las rectas se obtiene del cociente entre el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ y el área de la base (definida por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$).

$$d(r,s) = Altura\ del\ paralelepípedo = \frac{Volumen}{Área\ de\ base} = \frac{\left|\left[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}$$





***Ejemplo**:*

Halla la distancia entre las rectas siguientes:

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{4} \qquad s: \begin{cases} x = 1-2\lambda \\ y = -2+3\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases}$$

El punto y vector director de cada recta es $r: \begin{cases} A(2,-1,0) \\ \vec{u} = (3,2,4) \end{cases} \quad s: \begin{cases} B(1,-2,3) \\ \vec{v} = (-2,3,1) \end{cases}$

En primer lugar estudiamos la posición relativa de las rectas. Para ello vemos si sus vectores directores son proporcionales: $\frac{3}{-2} \neq \frac{2}{3} \neq \frac{4}{1}$ Las rectas no son paralelas ni coincidentes.

Estudiemos si se cruzan o cortan:

$$\overrightarrow{AB} = (1,-2,3)-(2,-1,0) = (-1,-1,3)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2+8+27-(-12-3-12) = 33+27 = 60 \neq 0$$ Estos vectores son linealmente independientes y las rectas se cruzan.

Utilicemos la fórmula para calcular la distancia entre ellas:

$$\left[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}\right] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2+8+27-(-12-3-12) = 33+27 = 60$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2i-8j+9k-(-4k+3j+12i) = -10i-11j+13k = (-10,-11,13)$$

$$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \left|(-10,-11,13)\right| = \sqrt{100+121+169} = \sqrt{390}$$

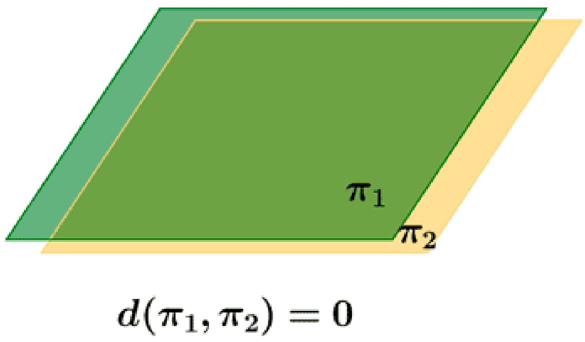
$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|} = \frac{60}{\sqrt{390}}\,u$$

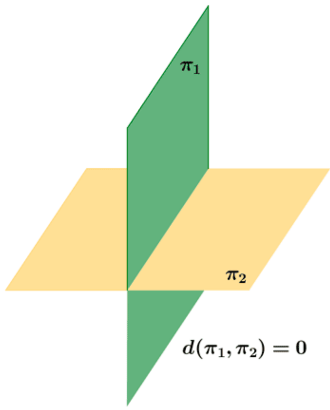
2.5 Distancia entre dos planos

- **Distancia entre dos planos que se cortan o son coincidentes.**

La distancia entre dos planos que **se cortan o son coincidentes** es cero.

d $(\pi_1,\pi_2)=0$





Ejemplos:

1. Halla la distancia entre los siguientes planos $\pi_1 = x-y-z+3=0$ y $\pi_2 = -2x+2y+2z-6=0$

En primer lugar estudiamos la posición relativa de ambos planos. Para ello relacionamos los coeficientes de las ecuaciones:

$\frac{1}{-2}=\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2}=\frac{3}{-6}$ → Los planos son coincidentes → $d(\pi_1,\pi_2)=0$

2. Halla la distancia entre los siguientes planos $\pi_1 = x+3y-z=0$ y $\pi_2 = -2x+y-4z-2=0$

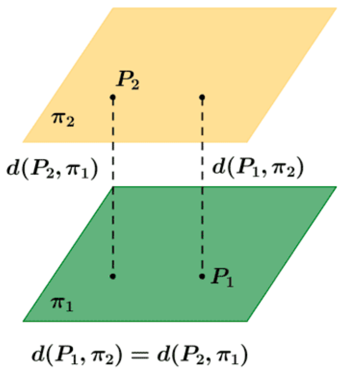
En primer lugar estudiamos la posición relativa de ambos planos. Para ello relacionamos los coeficientes de las ecuaciones:

$\frac{1}{-2}\neq\frac{3}{1}$ → Los planos se cortan → $d(\pi_1,\pi_2)=0$

- **Distancia entre dos planos paralelos.**

Sea el plano $\pi_1 : Ax+By+Cz+D=0$ y el plano $\pi_2 : Ax+By+Cz+D'=0$ paralelo a π_1.
La distancia entre dichos planos es la distancia de un punto del plano π_1 al plano π_2.

$$d(\pi_1,\pi_2)=d(P_1,\pi_2)=d(P_2,\pi_1)=\frac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



Ejemplo:

Halla la distancia entre $\pi_1 : 3x-y+2z+3=0$ y $\pi_2 : 6x-2y+4z+1=0$.

En primer lugar estudiamos la posición relativa de ambos planos. Para ello relacionamos los coeficientes de las ecuaciones:

$\frac{3}{6}=\frac{-1}{-2}=\frac{2}{4}\neq\frac{3}{1}$ →Los planos son paralelos

Determinamos un punto de π_1, por ejemplo le damos a y = 0, z = 0 y nos queda 3x + 3 = 0 → x = –1. El punto $P_1(-1,0,0)$.

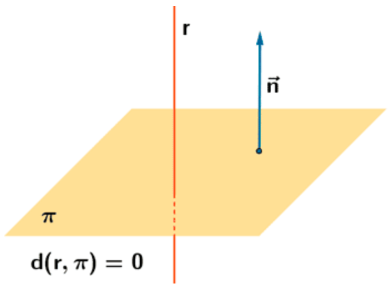
$$d(\pi_1,\pi_2)=d(P_1,\pi_2)=\frac{|6(-1)-2\cdot 0+4\cdot 0+1|}{\sqrt{36+4+16}}=\frac{5}{\sqrt{56}}\,u$$

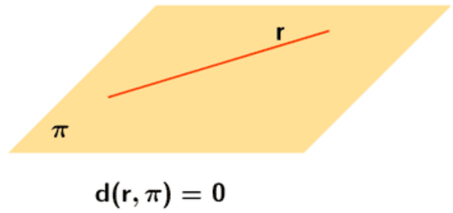
2.6 Distancia entre recta y plano

- **La recta y el plano se cortan o son coincidentes.**

Si la recta está incluida en el plano o si la recta **corta** al plano en algún punto, su distancia es cero.

d (r, π)=0





Ejemplos:

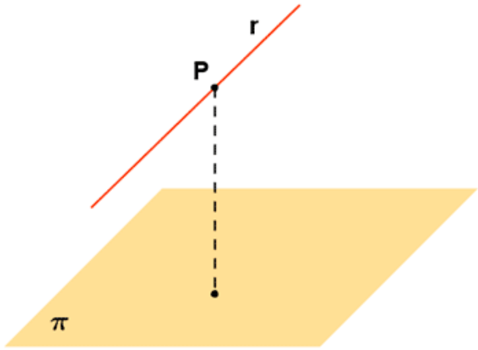
1. Calcula la distancia entre el plano $\pi: x-2y+z-1=0$ y la recta de ecuación $r: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-1}=z$
   Primero debemos estudiar la posición relativa de ambos elementos. Para ello consideremos el vector director de la recta $\vec{u}=(3,-1,1)$ y el vector normal del plano $\vec{n}=(1,-2,1)$. Su producto escalar es $\vec{u}\cdot\vec{n}=(3,-1,1)\cdot(1,-2,1)=3+2+1=6\neq 0$ La recta y el plano se cortan → $d(\pi,r)=0$

2. Calcula la distancia entre el plano $\pi: x+2y-z+4=0$ y la recta de ecuación $r: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$
   Primero debemos estudiar la posición relativa de ambos elementos. Para ello consideremos el vector director de la recta $\vec{u}=(2,-1,0)$ y el vector normal del plano $\vec{n}=(1,2,-1)$. Su producto escalar es $\vec{u}\cdot\vec{n}=(2,-1,0)\cdot(1,2,-1)=2-2+0=0$ →Recta y plano son paralelos o coincidentes.
   Averigüemos si el punto $P(-2,0,2)$ de la recta está en el plano:
   $$\left.\begin{array}{l} P(-2,0,2) \\ \pi: x+2y-z+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿-2+2\cdot 0-2+4=0?$$ Si es cierta la igualdad y la recta está contenida en el plano, por lo que $d(\pi,r)=0$

- **La recta y el plano son paralelos.**

Si la recta y el plano son paralelos, la distancia se calcula tomando un punto **P** cualquiera de la recta y hallando su distancia al plano.

d (r, π) = d (P, π)



$$d(r,\pi) = d(P,\pi)$$

Ejemplo:

Calcula la distancia entre el plano $\pi: -2x+y-3z+2=0$ y la recta de ecuación $r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{-1} = z$.

Primero debemos estudiar la posición relativa de ambos elementos. Para ello consideremos el vector director de la recta $\vec{u} = (-2,-1,1)$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (-2,1,-3)$. Su producto escalar es $\vec{u}\cdot\vec{n} = (-2,-1,1)\cdot(-2,1,-3) = 4-1-3=0$ La recta y el plano son paralelos o coincidentes.

Averigüemos si el punto $P(-1,3,0)$ de la recta está en el plano:

$\left.\begin{array}{l} P(-1,3,0) \\ \pi: -2x+y-3z+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿-2(-1)+3-3\cdot 0+2=0? \Rightarrow 7 \neq 0$ Es falsa la igualdad y la recta es paralela al plano. La distancia de recta a plano será la distancia de un punto de la recta, por ejemplo $P(-1,3,0)$ al plano:

$$d(r,\pi) = d(P,\pi) = d\left(P(-1,3,0), \pi: -2x+y-3z+2=0\right) = \frac{|-2(-1)+3-3\cdot 0+2|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{7}{\sqrt{14}}\, u$$

Ejercicios:

1. Calcular la distancia entre el punto P(-2,4,3) y la recta $r: \begin{cases} x = 2z + \frac{1}{2} \\ y = 4 - \frac{2z}{3} \end{cases}$

   Solución: $d(P,r) = 3{,}81\, u$

2. Hallar la ecuación del plano paralelo a $\pi: 3x+2y-6z+3=0$ y que dista 4 unidades de la recta $r: \begin{cases} x = 2-3t \\ y = -t \\ z = -3 \end{cases}$

   Solución: Si estudiamos la posición relativa del plano y la recta, veamos que se cortan, luego cualquier otro plano paralelo cortará también a la recta dada, y por lo tanto, no puede distar 4 unidades de la misma. Es imposible encontrar el plano pedido.

3. Hallar la distancia del punto A(1,2,3) a cada uno de los ejes coordenados
   Solución: $d\left(A, Eje\ X\right)=\sqrt{13}\ u$; $d\left(A, Eje\ Y\right)=\sqrt{10}\ u$; $d\left(A, Eje\ Z\right)=\sqrt{5}\ u$

4. Hallar la distancia entre las rectas $r: \frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2}$ y $s: \begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y+2z=1 \end{cases}$

   Solución: $d\left(r,s\right)=1{,}09\ u$

5. Hallar la distancia entre la recta que pasan por los puntos A(1,0,0) y B(0,1,1) y el eje OY
   Solución: $d(r,OY)=0{,}7071\,u$

6. Calcular la distancia entre el punto P(1,-1,3) y la recta $r: \begin{cases} x-z=0 \\ y+4=0 \end{cases}$

   Solución: $d\left(P,r\right)=\sqrt{11}\ u$

7. Hallar la distancia entre las rectas $r: \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=1+2t \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x-z=0 \\ y+4=0 \end{cases}$

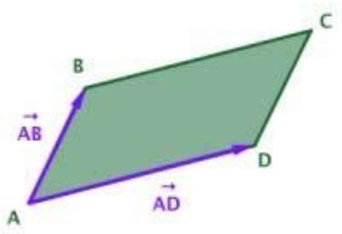
   Solución: Las rectas se cruzan $\rightarrow d\left(r,s\right)=\frac{6}{\sqrt{3}}=3{,}46\,u$

8. Calcular la distancia entre el plano $\pi:\ 2x+3y-z+3=0$ y $\pi':\ -4x-6y+2z+6=0$

   Solución: Los dos planos son paralelos $\rightarrow d\left(\pi,\pi'\right)=\frac{3\sqrt{14}}{7}\ u$

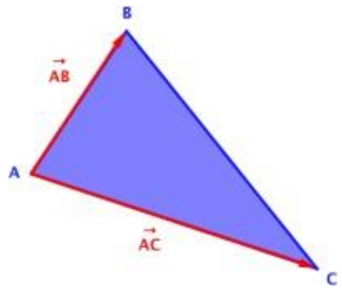
3. Áreas y volúmenes

3.1 Cálculo de áreas de triángulo y rectángulo



En el **paralelogramo** ABCD podemos calcular su área:

$$\text{Área de } ABCD=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$$

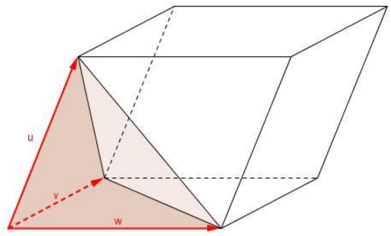


Dado un **triángulo** *ABC*, el área viene dada por la expresión:

$$\text{Área de } ABC=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}$$

3.2 Cálculo de volúmenes de tetraedros y paralelepípedos

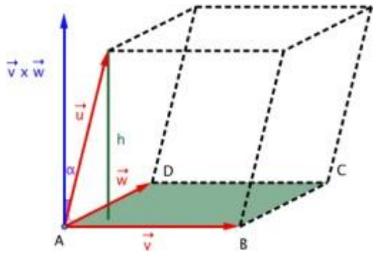
El volumen de un **tetraedro** de vértices *A*, *B*, *C* y *D* es igual a un sexto del producto mixto de los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, en valor absoluto.



$$Volumen\ del\ tetraedro = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}$$

Sea el **paralelepípedo** definido por los vectores $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\ y\ \overrightarrow{AD}$, entonces su volumen viene dado por el valor absoluto del producto mixto de los 3 vectores:

$$Volumen\ del\ \ paralelepipedo = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$$



4. Proyecciones

Las proyecciones de un punto *P* sobre en un plano o una recta son los puntos situados en éstos y que distan la menor distancia de *P*. Para proyectar una recta se proyectan dos puntos de la misma.

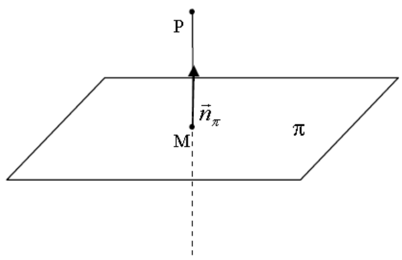
4.1 Proyección ortogonal de un punto sobre un plano

La proyección de un punto P sobre un plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, es el punto M situado en el plano a la menor distancia de P. Calculando este punto podremos determinar la distancia entre el plano y el punto como la distancia entre P y su proyección M.
El punto M es tal que la recta que pasa por P y M es perpendicular al plano. Así obtendremos M, como intersección del plano π con la recta normal a π que pasa por P.

Pasos para obtener M:
1. Calculamos la recta perpendicular a $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ y que pasa por P.

$$\text{vector director } \vec{v} = \vec{n} = (A, B, C)$$

2. La proyección es el punto intersección del plano π con esta recta.



4.2 Proyección ortogonal de un punto sobre una recta

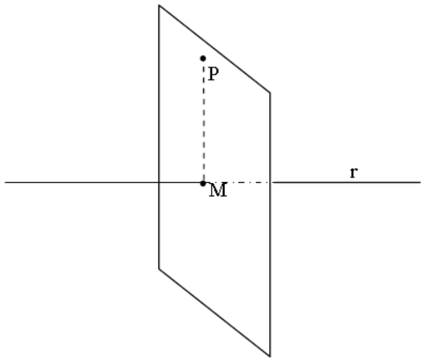
La proyección de un punto P sobre una recta, es el punto M situado en la recta a la menor distancia de P. Calculando este punto podremos conocer la distancia entre la recta y el punto como la distancia entre P y su proyección M.

Pasos para obtener M:

1. Calculamos el plano perpendicular a r y que pasa por P

$$\text{vector normal } \vec{n} = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

2. La proyección es el punto intersección del plano π con esta recta.



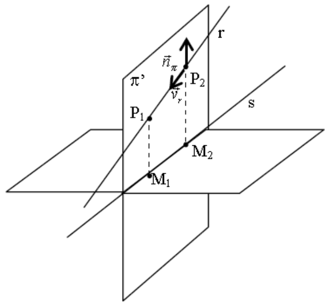
4.3 Proyección ortogonal de una recta sobre un plano

La proyección de una recta r (vector director $\vec{v}$ y punto P) sobre un plano π (vector normal $\vec{n}$ y punto Q), es otra recta s situada en el plano y tal que la proyección de cualquier punto de r sobre π se encuentra en s.

Dos formas de obtener la proyección:

a) Dos pasos:
1. Obtenemos la proyección de dos puntos de r, P_1 y P_2, sobre π (M_1 y M_2)
2. Calculamos la recta que pasa por M_1 y M_2.

b) Dos pasos:
1. Hallamos el plano π’ que pasa por r y es perpendicular a π.
Dos vectores directores del plano son $\vec{v}$ y el vector normal $\vec{n}$ del plano. Un punto del plano es el punto P de la recta.
2. La proyección s es la recta intersección entre los dos plano π y π’



***Ejemplos*:**

1. Calcula la proyección del punto P(4,-2,1) en el plano $\pi:\ 3x-2y-2z=-2$

Paso 1: Calculemos la recta r que pasa por P y perpendicular a π:

$$\left.\begin{array}{l} P(4,-2,1) \\ \vec{u}=(3,-2,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=4+3t \\ y=-2-2t \\ z=1-2t \end{array}\right.$$

Paso 2: Intersección de la recta r y el plano π:

$$\left.\begin{array}{l} r:\left\{\begin{array}{l} x=4+3t \\ y=-2-2t \\ z=1-2t \end{array}\right. \\ \pi:\ 3x-2y-2z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3(4+3t)-2(-2-2t)-2(1-2t)=-2 \Rightarrow 17t=-16$$

$$t=\frac{-16}{17} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=4+3\cdot\frac{-16}{17}=\frac{68-48}{17}=\frac{20}{17} \\ y=-2-2\cdot\frac{-16}{17}=\frac{-2}{17} \\ z=1-2\cdot\frac{-16}{17}=\frac{49}{17} \end{array}\right. \Rightarrow M\left(\frac{20}{17},\frac{-2}{17},\frac{49}{17}\right)$$

2. Calcula la proyección del punto P(4,-2,1) sobre a la recta $r:\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-7}{-1}$

Paso 1: Calculemos el plano π que pasa por P y perpendicular a r: $\pi:3x+5y-z+D=0$.
Pasa por P(4,-2,1) → $12-10-1+D=0\ \Rightarrow D=-1$.
Luego $\pi:3x+5y-z-1=0$

Paso 2: intersección de recta y plano:

$$\left.\begin{array}{l} r:\left\{\begin{array}{l} x=1+3t \\ y=1+5t \\ z=7-t \end{array}\right. \\ \pi:3x+5y-z-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3(1+3t)+5(1+5t)-(7-t)-1=0 \Rightarrow 9t+25t+t=-3-3+7+1$$

$$35t=2 \Rightarrow t=\frac{2}{35}$$

El punto intersección es:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x=1+3t \\ y=1+5t \\ z=7-t \end{array}\right\} \\ \pi:3x+5y-z-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3(1+3t)+5(1+5t)-(7-t)-1=0 \Rightarrow 9t+25t+t=-3-5+7+1$$

$$35t=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=1 \\ y=1 \\ z=7 \end{array}\right\} \Rightarrow M(1,1,7)$$

3. Calcula la proyección de la recta $r: \dfrac{x-2}{3}=y=\dfrac{z+1}{-1}$ en el plano $\pi: x+2y+z=1$

Lo haremos por el segundo método:

Paso 1: Calculamos el plano que contiene a r, es decir pasa por P(2,0,-1) y vectores directores: el normal al plano y el director de la recta r:

$$\left.\begin{array}{l} P(2,0,-1) \\ \vec{v}=(1,2,1) \\ u=(3,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x+4+3y+z+1-(6z+6-y+x-2)=0 \Rightarrow$$

$$\pi': -3x+4y-5z+1=0$$

Paso 2: La recta s es la intersección de π y π':

$$s: \begin{cases} -3x+4y-5z+1=0 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$$

Ejercicios.

1. Considera el plano π de ecuación $2x+y-z+2=0$ y la recta de ecuación $\dfrac{x-5}{-2}=y=\dfrac{z-6}{m}$.

(a) Halla la posición relativa de r y π según los valores del parámetro m.
(b) Para m = –3, halla el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.
(c) Para m = –3, halla el plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π.

<u>Solución</u>

(a) La recta r en paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x=5-2\alpha \\ y=\alpha \\ z=6+m\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \Re$. *La posición relativa de r y π, se determinará mediante el estudio de la ecuación:* $2\cdot(5-2\alpha)+\alpha-(6+m\alpha)+2=0$

$$2\cdot(5-2\alpha)+\alpha-(6+m\alpha)+2=0 \Rightarrow 10-4\alpha+\alpha-6-m\alpha+2=0 \Rightarrow 6-\alpha(3+m)=0 \Rightarrow \alpha=\frac{6}{3+m}$$

Si $m\neq -3$ recta y plano se cortan en un punto cuyas coordenadas se determinarían sustituyendo el valor de α correspondiente.
Si m = –3, la ecuación no tiene solución por lo que recta y plano serían paralelos.

(b) Como vectores direccionales del plano podemos utilizar el director del plano π, (2, 1, -1), y por contener a la recta r, el direccional de la recta r: (-2, 1, -3). El punto P(5, 0, 6) es un punto del plano pedido. Su ecuación implícita:

$$\begin{vmatrix} x-5 & y & z-6 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -2(x-5)+8y+4(z-6)=0 \Rightarrow -2x+8y+4z-14=0 \Rightarrow x-4y-2z+7=0$$

(c) El plano que se pide en este apartado es paralelo a π, su ecuación será: $2x+y-z+D=0$.
Puesto que debe contener a la recta r, debe verificarse la ecuación del plano para cualquier punto de r, en particular para P(5, 0, 6):

$$2x+y-z+D=0 \Rightarrow 2\cdot5+0-6+D=0 \Rightarrow D=-4.$$

La ecuación del plano es: $2x+y-z-4=0$

2. Considera el punto *P(3, 2, 0)* y la recta *r* de ecuaciones $\begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x+2z+1=0 \end{cases}$

(a) Halla la ecuación del plano que contiene al punto *P* y a la recta *r*.
(b) Determina las coordenadas del punto *Q* simétrico de *P* respecto de la recta *r*.

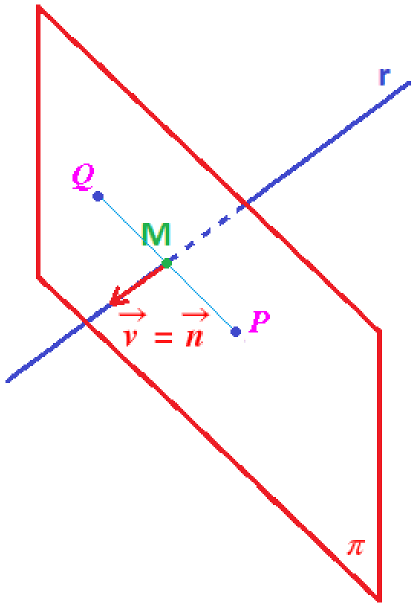
<u>Solución</u>

(a) Expresamos r *en paramétricas:* $\begin{cases} x=-1-2\alpha \\ y=4+3\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \quad \alpha\in\Re$

La ecuación del plano pedido la construimos considerando como vectores direccionales del mismo $\overrightarrow{u_r}=(-2,3,1) \quad \overrightarrow{\mathrm{PP_r}}=(-4,2,0)$. *Pudiendo considerar vectores de componentes proporcionales que tendrán la misma dirección:*

Ecuación del plano: $\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x+2y-4z-7=0$

*(b) **<u>UNA FORMA DE HACERLO</u>**. Buscamos un punto Q tal que cumpla lo que aparece en la imagen.*



Determinamos el plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto P.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\overrightarrow{u_r}=(-2,3,1)\\ P(3,\ 2,\ 0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi:-2x+3y+z+D=0\\ P(3,\ 2,\ 0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow -2\cdot 3+3\cdot 2+0+D=0\Rightarrow D=0$$

$$\pi:-2x+3y+z=0$$

El punto M es el punto de corte de la recta y el plano hallado.

$$\left.\begin{array}{l}\pi:-2x+3y+z=0\\ \begin{cases}x=-1-2\alpha\\ y=4+3\alpha \qquad \alpha\in\Re\\ z=\alpha\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow -2(-1-2\alpha)+3(4+3\alpha)+\alpha=0\Rightarrow 2+4\alpha+12+9\alpha+\alpha=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14\alpha=-14\Rightarrow\alpha=-1\Rightarrow\begin{cases}x=-1-2(-1)=1\\ y=4+3(-1)=1\\ z=-1\end{cases}\Rightarrow M(1,1,-1)$$

El punto Q(a, b, c) es el punto medio del segmento PQ.

$$\frac{(3,2,0)+(a,b,c)}{2}=(1,1,-1)\Rightarrow\left(\frac{3+a}{2},\frac{2+b}{2},\frac{c}{2}\right)=(1,1,-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{3+a}{2}=1\\ \dfrac{2+b}{2}=1\\ \dfrac{c}{2}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3+a=2\\ 2+b=2\\ c=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=0\\ c=-2\end{cases}\Rightarrow\boxed{Q(-1,0,-2)}$$

***<u>OTRA FORMA DE HACERLO</u>**. Sea M el punto medio del segmento PQ, M es un punto de la recta que verifica la siguiente condición:* $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{u_r}=0$*. Desarrollando la condición del producto escalar nulo* *obtenemos:*

$$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{u_r}=0\Rightarrow(-4-2\alpha,2+3\alpha,\alpha)\cdot(-2,3,1)=0\Rightarrow 8+4\alpha+6+9\alpha+\alpha=0\Rightarrow\alpha=-1$$

Sustituyendo este valor en las ecuaciones paramétricas de r obtenemos el punto M:

$M=(1,1,-1)$. *Puesto que M es el punto medio del segmento PQ, se tiene:*

$$\frac{3+q_1}{2}=1\Rightarrow q_1=-1$$

$$\frac{2+q_2}{2}=1\Rightarrow q_2=0 \qquad Q(-1,0,-2)$$

$$\frac{q_3}{2}=-1\Rightarrow q_3=-2$$

3. Determina los puntos de la recta *r* de ecuaciones $\begin{cases} x=0 \\ y-1=\dfrac{z-3}{2}\end{cases}$ que equidistan del plano π de ecuación x + z = 1 y del plano π' de ecuación y – z = 3.

<u>Solución</u>

Sea P un punto de r: $P(0,\alpha,2\alpha+1)$

$$\left.\begin{array}{l} d(P,\pi)=\dfrac{|2\alpha+1-1|}{\sqrt{2}} \\ d(P,\pi')=\dfrac{|\alpha-2\alpha-1-3|}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}|2\alpha|=|-\alpha-4|\Rightarrow\begin{cases} 2\alpha=-\alpha-4\Rightarrow 3\alpha=-4\Rightarrow\alpha=\dfrac{-4}{3};\ \boxed{P_1\left(0,\dfrac{-4}{3},\dfrac{-5}{3}\right)} \\ -2\alpha=-\alpha-4\Rightarrow\alpha=4\Rightarrow\alpha=4;\ \boxed{P_2(0,4,9)}\end{cases}$$

4. Encontrar la distancia del punto $P(1,1,1)$ a la recta $L\equiv\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1-t\end{cases}$ *PAU 2005. <u>Sol</u>:* $\dfrac{\sqrt{6}}{3}\,u$

5. Encuentre la distancia del punto $P(1,0,1)$ a la recta determinada por los planos π_1, que pasa por los puntos $A(1,1,1),\ B(0,1,1)\ y\ C(-1,0,0)$ y π_2 de ecuación $x+y=2$.

PAU 2003. <u>Sol</u>: $\sqrt{6}/3\ u$

6. Determine el punto de la recta $r:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+5}{3}=\dfrac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto $A=(3,2,1)$. *PAU 2011. <u>Sol</u>:* $P=(1,1,2)$

7. a) Demostrar que las rectas $L_1\equiv\begin{cases} x=1+t \\ y=3+3t \\ z=3+t\end{cases}$ $L_2\equiv\begin{cases} 3x-y+4=0 \\ x-z+4=0\end{cases}$ son paralelas.

b) Encontrar la ecuación del plano paralelo al determinado por dichas rectas y que diste de él $\sqrt{6}\,u$.

PAU 2005. <u>Sol</u>: b) Hay dos planos: $\pi_1: x-y+2z+2=0 \quad \pi_2: x-y+2z-10=0$

8. a) Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que es intersección de los planos $\pi_1: x+y-z-1=0$ y $\pi_2: 2x-y+z=0$.

b) Encontrar la distancia del punto $(1,0,1)$ a dicha recta.

PAU 2004. <u>Sol</u>: a) $x=1/3 \quad y=2/3+t \quad z=t$ *b) Distancia =* $\sqrt{66}/6\ u$

9. a) Demostrar que las rectas. $l_1 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2+t \end{cases}$ $l_2 \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y+1=0 \end{cases}$ se cruzan en el espacio.

   b) Encontrar la distancia entre dichas rectas. *PAU 2004. Sol: b) Distancia =* $\sqrt{14}/14\ u$

10. a) Estudiar si las rectas $L_1 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2+t \end{cases}$ $L_2 \equiv \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y+3=0 \end{cases}$ se cruzan.

    b) Encuentre la distancia entre dichas rectas.

    PAU 2005. Sol: a) Sí se cruzan b) Distancia = $3\sqrt{14}/7$

11. a) Estudie si las rectas $L_1 \equiv \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1-t \\ z = 2 \end{cases}$ $L_2 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1+t \\ z = 2-t \end{cases}$ se cruzan en el espacio.

    b) Encuentre la distancia entre dichas rectas.

    PAU 2003. Sol: a) Sí se cruzan b) Distancia = $\sqrt{2}/2\ u$

12. Encuentre la distancia del punto $P(0,6,1)$ al plano determinado por el punto $A(0,1,3)$ y la recta L que pasa por los puntos $B(1,0,1)\ y\ C(0,0,2)$. *PAU 2003. Sol:* $7\sqrt{3}/3\ u$

13. a) Encuentre la distancia del punto $P(1,1,1)$ a la recta $L \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t \\ z = 3+2t \end{cases}$

    b) Compruebe si los puntos $A(1,-1,3)\ y\ B(0,-2,1)$ pertenecen a la recta L y determine el área del triángulo PAB. *PAU 2002. Sol: a) Distancia =* $\sqrt{66}/3\ u$ *b) Sí pertenecen. Área =* $\sqrt{11}\ u^2$

14. Encuentre la distancia del punto $P(1,1,1)$ al plano π determinado por las rectas

    $L_1 \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = t \end{cases}$ $L_2 \equiv \left\{ \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-3}{1} \right.$

    PAU 2002. Sol: $\pi: -x-5y-4z+11=0$ *Distancia =* $\sqrt{42}/42\ u$

15. Encuentre la distancia del punto $P(1,1,1)$ a la recta de ecuación: $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

    PAU 2001. Sol: $\sqrt{29/6}\ u$

16. a) Determine la distancia del punto $A(12,-1,1)$ a la recta r que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y tiene como vector dirección al vector $\vec{v} = (3,4,0)$.

    b) Encuentre qué punto (o puntos) de la recta r determina (o determinan) junto con A y P un triángulo de área igual a 50 unidades cuadradas.

    PAU 2000. Sol: a) $10\ u$ *b)* $Q(7,9,1)\ y\ Q'(-5,-7,1)$

17. Determinar el valor de t para que los puntos $A(1,1,1), B(3,0,2), C(5,-2,2)$ y $D(2,1,t)$ sean coplanarios. *Solución: t = 2*

18. Probar que los puntos $P(2,1,6), Q(3,5,-2), R(-4,6,8)$ y $S(5,7,-1)$ son no coplanarios, y hallar el volumen del tetraedro que forman.
Solución: Averiguando las coordenadas de los vectores PQ, PR y PS calculamos el determinante con sus coordenadas y sale distinto de 0, por lo que no son coplanarios. El volumen del tetraedro que forman es 217/6 u^3.

19. Calcular el ángulo entre las rectas r y s:
$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 \end{cases}$$
Solución: 71,56º

20. Calcular el ángulo entre los planos $\pi_1 : x + y + z = 3$; $\pi_2 : x + y = -1$ *Solución*: 35,26º

21. Calcular el ángulo entre el plano $\pi : \ x + 3y + 2z - 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$
Solución: 49,1º

Geometría en el espacio en pruebas EBAU de Murcia

Resueltos con todo detalle en www.ebaumatematicas.com

VECTORES → ← Planos / Rectas 2010 ⟷ 2021

EXTRAORDINARIA 2021

5: Considere las rectas de ecuaciones

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=1 \end{cases}.$$

a) **[0,75 p.]** Compruebe que las rectas se cortan en un punto y calcule su punto de corte.

b) **[1 p.]** Determine el ángulo que forman las dos rectas.

c) **[0,75 p.]** Calcule la ecuación del plano que contiene a las dos rectas.

Solución: a) El punto de corte de las rectas es $C(3,2,-1)$ *b) Las rectas forman un ángulo de 19º. c)* $\pi \equiv y+z-1=0$

6: Los puntos $A=(2,0,0)$ y $B=(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C se encuentra en la recta *r* dada por

$$r: \begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del tercer vértice C sabiendo que la recta *r* es perpendicular a la recta que pasa por A y C.

b) **[1 p.]** Determine si el triángulo ABC tiene un ángulo recto en A y calcule su área.

Solución: a) El punto C tiene coordenadas $C(6,0,3)$ *b)* $\acute{A}rea = 32.5\,u^2$

ORDINARIA 2021

5: Considere los planos de ecuaciones $\pi_1 : x-y+z=0$ *y* $\pi_2 : x+y-z=2$.

a) **[1 p.]** Compruebe que los planos se cortan y calcule la ecuación de la recta *r* determinada por la intersección de ambos planos.

b) **[1,5 p.]** Compruebe que el punto A = (3, 2, 1) no está en π_1 ni en π_2 y calcule la ecuación del plano π_3 que contiene a la recta *r* y pasa por el punto *A*.

Solución: a) $r: \begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$ *b)* $\pi_3 : y-z-1=0$

6: En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes.

Considere los puntos *A = (a, 4, 3), B = (0, 0, 5)* y *C = (0, 3, –1).*

a) **[1 p.]** Calcule los valores de *a* para los cuales el triángulo ABC tiene un ángulo recto en el vértice *A*.
b) **[1,5 p.]** Tomando el valor de *a* = *3*, determine la ecuación del plano que pasa por los puntos *A* y *B* y es paralelo a la recta dada por $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$.

Solución: a) $a=\pm 2$ b) $\pi:-16x+7y-10z+50=0$

EXTRAORDINARIA 2020

5: Considere los puntos $P=(5,6,1)$ y $Q(-3,-2,5)$, y la recta

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{4}\ .$$

a) **[1,5 p.]** Determine el punto *R* de la recta *r* para el cual el área del triángulo PQR es $18\sqrt{2}$ unidades cuadradas.
Observación: hay dos puntos R que son solución del apartado a); basta con encontrar uno de ellos.
b) **[1 p.]** Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos *P* y *Q* y compruebe que dicha recta corta perpendicularmente a la recta *r*.

Solución: a) $R_1(0,1,-1)$ ***y*** $R_2(2,3,7)$ *b)* $s:\begin{cases} x=5+2t \\ y=6+2t \\ z=1-t \end{cases}$ *Las dos rectas se cortan en el punto A(1,2,3) y el producto escalar de sus vectores directores es cero:* $\vec{v_s}\cdot\vec{v_r}=0$

6: Considere las rectas *r* y *s* dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r:\begin{cases} 5x+3y=19 \\ y-5z=3 \end{cases} \qquad s:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{0}$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.
b) **[1,25 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que las rectas se crucen, determine el plano que contiene a la recta *r* y es paralelo a la recta *s*.
Solución: a) Las rectas se cruzan. b) $\pi:-x-y+2z+5=0$

ORDINARIA 2020

5: Se llama **mediana** de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. .
a) **[1,5 p.]** Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo de vértices $A(-1,2,3)$, $B(3,-4,1)$ *y* $C(1,-4,5)$.
b) **[1 p.]** Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Solución: a) Por A → $r:\left.\begin{matrix} x=-1+\alpha \\ y=2-2\alpha \\ z=3 \end{matrix}\right\}$ *Por B* → $s:\left.\begin{matrix} x=3-\beta \\ y=-4+\beta \\ z=1+\beta \end{matrix}\right\}$ *Por C* → $s':\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=-4+t \\ z=5-t \end{matrix}\right\}$

b) Las tres medianas se cortan en el punto $M(1,-2,3)$.

6: Considere la recta *r* y el plano π dados por las siguientes ecuaciones:

$$r:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{0} \qquad \pi: x-2y-z=4$$

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de la recta y el plano.

b) **[0,5 p.]** En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso contrario, calcule la distancia entre la recta y el plano.

c) **[1 p.]** Determine el plano que contiene a la recta *r* y es perpendicular al plano π.

Solución: a) Recta y el plano son paralelos b) $d(r,\pi)=4.08\,u$ *c)* $\pi' \equiv -x+2y-5z=0$

SEPTIEMBRE 2019

A.3: Considere la recta $r:\frac{x+1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ y el plano $\pi: x-2y-z=-1$.

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de la recta *r* y el plano π.

b) **[1,5 p.]** En el caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que la recta no corte al plano, calcule la distancia entre ambos.

Solución: a) Recta y plano se cortan perpendicularmente. b) El punto de corte es $P(-2,-1,1)$. *El ángulo que forman recta y plano es de 90º.*

B.3: Los puntos $A=(0,-1,1)$ y $B=(1,1,1)$ son dos de los vértices de un triángulo. El tercer vértice *C* está contenido en la recta *r* que pasa por el punto *B* y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+z=1$

a) **[1 p.]** Calcule la ecuación de la recta *r* que pasa por el punto *B* y es perpendicular al plano π.

b) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice *C* sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

Solución: a) $r:\left.\begin{array}{l} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{array}\right\}$ *b) El punto C puede tener las coordenadas C(13, –5, 7) o bien C(–11, 7, –5).*

JUNIO 2019

A.3: Los puntos $A=(3,0,0)$, $B=(0,3,0)$ $y\ C=(0,0,3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice *D* está contenido en la recta ***r*** que pasa por el punto $P=(1,1,1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.

a) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación del plano π que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.

b) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P=(1,1,1)$ y es perpendicular al plano π.

c) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice *D* sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

Solución: a) $\pi: x+y+z-3=0$ *b)* $r:\left.\begin{array}{l} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{array}\right\}$ *c)* $D(5,5,5)$ *o* $D(-3,-3,-3)$

B.3: Considere las siguientes rectas:

$$r:\frac{x-5}{1}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+1}{1} \qquad s:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$$

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1,5 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

Solución: a) Las rectas se cruzan. b) $t:\left.\begin{matrix}-x-y+2z+13=0\\ x+y+2z+1=0\end{matrix}\right\}$ *o en paramétricas* $t:\left.\begin{matrix}x=3{,}5-t\\ y=2{,}5+t\\ z=-3{,}5\end{matrix}\right\}$

SEPTIEMBRE 2018

CUESTIÓN A.4:

Considere las rectas r y s dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r:\begin{cases}2x-y+3z=3\\ x+3y+5z=1\end{cases} \text{ y } s:\frac{x-5}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$$

a) [1,25 p.] Compruebe que ambas rectas son paralelas.

b) [1,25 p.] Determine la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que contiene a ambas rectas.

Solución: a) El vector director de las rectas son proporcionales y el punto $P_s(5,0,0)$ *que pertenece a la recta s no pertenece a la recta r. b)* $\left.\begin{matrix}x=5+2\lambda-\frac{25}{7}\alpha\\ y=0+\lambda-\frac{1}{7}\alpha\\ z=0-\lambda\end{matrix}\right\}$

CUESTIÓN B.4:

Considere los puntos $P=(1,\ 1,\ 3)$ y $Q=(1,\ 5,\ 0)$ y la recta r dada por la ecuación:

$$r:\begin{cases}2x-y-2z=-3\\ -x+y\qquad =4\end{cases}$$

a) [0,5 p.] Compruebe que el punto P no está en la recta r y que el punto Q si lo está.

b) [1,25 p.] Determine el punto R de la recta r tal que el triángulo PQR sea un triángulo rectángulo en P (es decir, con ángulo recto en el vértice P).

c) [0,75 p.] Calcule el área de dicho triángulo PQR.

Solución: a) Muy sencillo *b)* $R=(-9,-5,-5)$ *c)* $\acute{A}rea=25\sqrt{2}\ u^2$

JUNIO 2018

CUESTIÓN A.4:

Considere el plano π dado por la ecuación $3x-2y+z=3$.

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta ***r*** dada por

$$r:\begin{cases}x+3y+3z=0\\ y+2z=1\end{cases}$$

b) **[1,25 p.]** En caso de que la recta ***r*** sea paralela al plano, calcule la distancia entre ambos. En caso de que la recta ***r*** corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo de corte entre ambos.

Solución: a) La recta es perpendicular al plano. b) Forman 90º ya que son iguales el vector normal del plano y el director de la recta. El punto de corte es A(0, -1, 1)

CUESTIÓN B.4:
Considere el punto $P=(0,\ 1,\ 2)$ y la recta ***r*** dada por la ecuación:

$$r:\begin{cases}2x+y-z=-1\\ x-y+z=3\end{cases}$$

a) **[1,25 p.]** Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que es perpendicular a la recta ***r*** y pasa por el punto ***P***.
b) **[1,25 p.]** Calcule la distancia del punto ***P*** al plano $x+y+z=5$.

Solución: a) $y+z-3=0$ *b)* $\text{Distancia}(P,\text{Plano})=1{,}15\,u^2$

SEPTIEMBRE 2017

CUESTIÓN A.2: Considere la recta *r* que pasa por los puntos A = (1, 1, 1) y B = (3, 3, 4) y la recta *s* cuyo vector director es $\vec{v}=(-1,3,1)$ y pasa por el punto C = (4, 0, 3).

a) **[1 punto]** Determine las ecuaciones continuas de las rectas *r* y *s*.
b) **[1,5 puntos]** Estudie la posición relativa de *r* y *s*.

Solución: a) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$ *y* $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-0}{3}=\frac{z-3}{1}$ *b) Las rectas se cortan.*

CUESTIÓN B.2: Considere los puntos A = (1, 1, 1), B = (1, –1, 0) y C = (0, –2, 1).

a) **[1,25 puntos]** Calcule el área del triángulo *ABC*.
b) **[1,25 puntos]** Calcule la ecuación de la recta (en cualquiera de sus formas) contenida en el plano que forman *A*, *B* y *C* que, pasando por *A*, es perpendicular al lado *BC*.

Solución: a) $\acute{A}rea=\frac{\sqrt{14}}{2}u^2$ *b)* $r:\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-1}{4}$

JUNIO 2017

CUESTIÓN A.2: Considere el plano π que pasa por el punto P(1, 2, 3) y tiene como vectores directores a $\vec{u}=(1,-1,0)$ *y* $\vec{v}=(1,0,2)$. Considere la recta ***r*** que pasa por los puntos A(1,0,4) y B(3,2,2).

a) **[0’75 puntos]** Determine la ecuación de π.
b) **[0,75 puntos]** Determine la ecuación de ***r***.
c) **[1 punto]** Estudie la posición relativa de π y ***r***.

Solución: a) $\pi:-2x-2y+z+3=0$ *b)* $\frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-4}{-1}$ *c) Son secantes.*

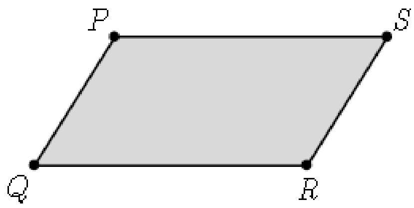
CUESTIÓN B.2: Los vértices del triángulo ABC son A = (–a, 1, 1), B = (2, –1, 2) y C = (1, –2a, 3).

a) **[1,5 puntos]** ¿Cuánto ha de valer *a* para el triángulo sea rectángulo en B?
b) **[1 punto]** Calcula el área del triángulo ABC para el caso a = –1.

Solución: a) a = 1 *b)* *Área triángulo ABC* $=\frac{\sqrt{30}}{2}u^2$

SEPTIEMBRE 2016

CUESTIÓN A.2: Los puntos P = (1, 1, 1), Q = (2, 2, 2) y R = (1, 3, 3) son tres vértices consecutivos del siguiente paralelogramo:



a) **[1,25 puntos]** Calcule el área del paralelogramo.
b) **[1,25 puntos]** Determine el cuarto vértice del paralelogramo.

Solución: a) $\text{Área} = \sqrt{8}\, u^2$ *b) S=(0,2,2)*

CUESTIÓN B.2: Considere el plano π que pasa por el punto P = (2, 0, 1) y tiene como vectores directores los vectores $\vec{v} = (1,0,2)$ y $\vec{w} = (0,1,-2)$. Considere la recta ***r*** dada por

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$$

a) **[1,25 puntos]** Estudie la posición relativa de π y *r*.
b) **[1,25 puntos]** Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto Q=(−1, 0, −2), es paralela a π y perpendicular a ***r***.

Solución: a) Secantes b) $s: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+2}{10}$

JUNIO 2016

CUESTIÓN A.2: Considere los puntos P = (2, 7, 3), Q = (1, 2, 5) y R = (−1, −2, 5).
a) **[1 punto]** Calcule el área del triángulo PQR.
b) **[0,5 puntos]** Determine la ecuación general (o implícita) del plano que contiene al triángulo PQR.
c) **[1 punto]** Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) de la recta que pasa por P, está contenida en el plano que contiene al triángulo PQR y es perpendicular al lado QR.

Solución: a) $\text{Área} = \sqrt{29}\, u^2$ *b)* $\pi\!: 8x - 4y - 6z + 30 = 0$ *c)* $r: \begin{cases} x = 2+6\lambda \\ y = 7-3\lambda \\ z = 3+10\lambda \end{cases}$

CUESTIÓN B.2: Considere los puntos P = (1, 0, 0), Q = (0, 2, 0) y R = (0, 0, 1).
a) **[1,25 puntos]** Estudie si el triángulo PQR es o no rectángulo en el vértice P.
b) **[1,25 puntos]** Dado el punto S = (1, 2, 3), calcule el volumen del tetraedro de vértices P, Q, R y S .

Solución: a) No es rectángulo en P b) $\text{Volumen} = \frac{4}{3} u^3$

SEPTIEMBRE 2015

CUESTIÓN A.2: Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por el vértice de un triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.
a) **[0,25 puntos]** Calcule los puntos medios de los tres lados del triángulo de vértices A=(5,3,6), B = (−1, −1, 2) y C = (5, 7, 4).
b) **[1 punto]** Calcule las ecuaciones de las tres medianas de dicho triángulo.
c) **[1,25 puntos]** Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Solución: a) $PM_{AB} = (2,1,4); PM_{AC} = (5,5,5); PM_{BC} = (2,3,3)$

b) Mediana del vertice A $\begin{cases} x = 5+\lambda \\ y = 3 \\ z = 6+\lambda \end{cases}$; Mediana del vertice B $\begin{cases} x = -1+2\alpha \\ y = -1+2\alpha \\ z = 2+\alpha \end{cases}$;

Mediana del vertice C $\begin{cases} x = 5+\beta \\ y = 7+2\beta \\ z = 4 \end{cases}$ *c) M (3,3,4)*

CUESTIÓN B.2: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Considere la recta r y el plano π dados por las ecuaciones siguientes

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{5} \quad y \quad \pi: x-2y+z=-3$$

a) **[1,25 puntos]** Compruebe que la recta r es paralela al plano π y calcule la distancia entre ellos.

b) **[1,25 puntos]** Determine la recta que pasa por el punto P = (1, 0, 2) y es perpendicular al plano π. Calcule la intersección de dicha recta con el plano π.

Solución: a) el vector $\vec{n} = (1, -2,\ 1)$ *es ortogonal al vector director de la recta y el punto (1,0,2) de la recta no está en el plano. Distancia=* $\sqrt{6}$. *b)* El punto de intersección es Q=$(0,2,1)$

JUNIO 2015

CUESTIÓN A.2: Tres de los cuatro vértices de un tetraedro son los puntos A=(2,1,0), B=(3,4,0) y C=(5,1,0). El cuarto vértice D está en la recta r que pasa por el punto (1, 2, 3) y tiene como vector director el vector (−1, 1, 1).

a) **[0,75 puntos]** Determine las ecuaciones paramétricas de la recta r.

b) **[1,75 puntos]** Calcule las coordenadas del vértice D para que el volumen del tetraedro sea 9.

Observación: Hay dos soluciones distintas; basta con calcular una de ellas.

Solución: a) $\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases}$ *b)* $D_1 = (-2,5,6)$ *y* $D_2 = (10,-7,-6)$

CUESTIÓN B.2: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Considere la recta r y el plano π dados por las ecuaciones siguientes

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2} \quad y \quad \pi: 2x+y+z=-7$$

a) **[1,25 puntos]** Compruebe que la recta r corta al plano π y calcule el ángulo que forman.

b) **[1,25 puntos]** Determine el plano que pasa por el punto P = (2,−3,3), es paralelo a la recta r y es perpendicular al plano π.

Solución: a) El ángulo formado por el plano y la recta es de 30º *b)* $x-y-z-2=0$

SEPTIEMBRE 2014

CUESTIÓN A.2:

a) **[1,5 puntos]** Estudie la posición relativa de las rectas r y s en función del parámetro **a**:

$$r: \begin{cases} x+3y=8 \\ 4y+z=10 \end{cases} \qquad s: \frac{x}{7} = \frac{y}{a-4} = \frac{z+6}{5a-6}.$$

b) **[1 punto]** Para el valor del parámetro a = 4 determine, si es posible, el punto de corte de ambas rectas.

Solución: a) Si $a \neq 4$ se cruzan. Si a=4 se cortan. *b) El punto de corte es (8, 0, 10)*

CUESTIÓN B.2: Considere la recta r y el plano π dados por las ecuaciones siguientes

$r:\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-4}=\frac{z+1}{0}$ y π : 7x−y = 8

a) **[1,5 puntos]** Compruebe que la recta r corta al plano π y calcule el ángulo que forman.

b) **[1 punto]** Determine el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Solución: a) Se cortan en (0,8, -2,4, -1) en un ángulo de 45° *b) z+1=0*

JUNIO 2014

CUESTIÓN A.2:

a) **[1,25 puntos]** Determine para qué valor del parámetro a la recta $r:\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \end{cases}$ es perpendicular al plano $\pi: -6x+ay+2z=0$.

b) **[1,25 puntos]** Demuestre que si a = −8 la recta r corta al plano p en un punto y calcule dicho punto de corte.

Solución: a) a=4 *b) El punto de corte es P(-1, 1, 1)*

CUESTIÓN B.2: Dos de los tres vértices de un triángulo son los puntos A = (1,1,1) y B = (1,1,3). El tercer vértice C está en la recta r que pasa por los puntos P = (−1,0,2) y Q = (0,0,2).

a) **[0,75 puntos]** Determine la ecuación de la recta r.

b) **[1,75 puntos]** Calcule las coordenadas del vértice C para que el área del triángulo sea $\sqrt{15}$ unidades cuadradas.

Observación: Hay dos soluciones distintas; basta con calcular una de ellas.

Solución: a) $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$ *b) C_1=($1+\sqrt{14}$, 0, 2) o C_2=($1-\sqrt{14}$, 0, 2)*

SEPTIEMBRE 2013

CUESTIÓN A.2: Tres de los cuatro vértices de un tetraedro son los puntos A = (3, 4, 0), B = (2, 1, 0) y C = (5, 1, 0). El cuarto vértice D está en la recta r que pasa por los puntos (1, 2, 3) y (−1, 4, 5).

a) **[0,75 puntos]** Determine la ecuación de la recta r.

b) **[1,75 puntos]** Calcule las coordenadas del vértice D para que el volumen del tetraedro sea 6 unidades cúbicas.

Observación: Hay dos soluciones distintas; basta con calcular una de ellas.

Solución: a) $r:\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}$ *b) D(0,3,4) para λ= 1 y D(8,−5,−4) para λ= −7.*

CUESTIÓN B.2:

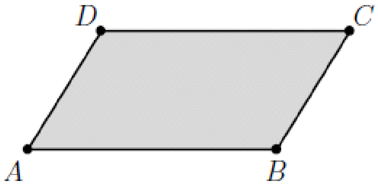
a) **[1 punto]** Determine la ecuación de la recta ***r*** que pasa por los puntos A=(2,3,0) y B= (−1, 8, 1).

b) **[1,5 puntos]** Determine la ecuación del plano que pasa por el punto (1, 2, 3) y es perpendicular a la recta ***r***.

Solución: a) $r:\frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{5}=\frac{z}{1}$ *b)* $-3x+5y+z-10=0$

JUNIO 2013

CUESTIÓN A.2: Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son A = (1, 3, −4), B=(2, 6, 7) y C = (5, −1, 2).



a) **[1,25 puntos]** Calcule el área del paralelogramo.
b) **[1,25 puntos]** Determine el cuarto vértice, D.
Solución: a) $Area = \sqrt{5544}\ u^2$ *b)* $D = (4, -4, -9)$

CUESTIÓN B.2:
a) **[0,75 puntos]** Determine la ecuación del plano π que contiene a los puntos A = (3, 2, 0), B = (5, 1, 1) y C = (2, 0, −1).
b) **[0,75 puntos]** Determine la ecuación de la recta ***r*** que pasa por los puntos D = (1,2,1) y E = (2,−6, 0).
c) **[1 punto]** Estudie la posición relativa de ***r*** y π.
Solución: a) $3x + y - 5z - 11 = 0$ *b)* $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z-1}{-1}$ *c) Son paralelos*

SEPTIEMBRE 2012

CUESTIÓN A.2: [2,5 puntos] Determine la ecuación implícita (o general) del plano que contiene al punto A = (0,1,2) y es perpendicular a la recta

$$r: \begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

Solución: $\pi \equiv y + z - 3 = 0$

CUESTIÓN B.2: Considere las rectas r y s dadas por las ecuaciones

$$r: \frac{x}{7} = \frac{y}{a-4} = \frac{z+6}{5a-6} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-5}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-6}{4}\ .$$

a) **[2 puntos]** Estudie la posición relativa de r y s en función del parámetro a.
b) **[0,5 puntos]** Calcule el punto de corte de r y s en los casos en que se corten.

Solución: a) Si $a \neq 4$ *se cruzan. Si a=4 se cortan b) (8, 0, 10).*

JUNIO 2012

CUESTIÓN A.2: Considere la recta r y el plano π dados por las ecuaciones

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1} \quad \text{y} \quad \pi: x - 2y - z = 4$$

a) **[1 punto]** Calcule el ángulo que forman la recta r y el plano π.
b) **[1,5 puntos]** Determine el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.
Solución: a) 60º b) $x + y - z + 2 = 0$

CUESTIÓN B.2:

a) **[1,25 puntos]** Halle la ecuación implícita (o general) del siguiente plano

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda - \mu \\ y = -3 + \lambda \\ z = 2 + 3\mu \end{cases}$$

b) **[1,25 puntos]** Determine la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto (−1, 2, 3).

Solución: a) $3x - 6y + z - 23 = 0$ *b)* $\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 - 6\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

SEPTIEMBRE 2011

CUESTIÓN A.2: Determine el punto de la recta $r: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto A = (3, 2, 1). **[2.5 puntos]**

Solución: $P(1,1,2)$

CUESTIÓN B.2: Considérense los puntos A = (2, 0, 1) y B = (2, 0, 3), y la recta

$$r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{0} .$$

Determine los puntos C de la recta r para los cuales el área del triángulo ABC es 2.
(Indicación: hay 2 puntos C que son solución del problema). **[2.5 puntos]**

Solución: $C(4,0,2)$ *y* $C'(0,0,2)$

JUNIO 2011

CUESTIÓN A.2: Determine el plano que contiene a la recta $\left.\begin{matrix} 3x + 2y - 5z = -2 \\ 4x - 3y - 2z = -1 \end{matrix}\right\}$ y es paralelo a la recta $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-17}{-1}$

Solución: $\pi \equiv 2x + 7y - 8z + 3 = 0$

CUESTIÓN B.2: Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por el vértice de un triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

a) Calcule las tres medianas del triángulo de vértices A = (5, −1, 4), B = (−1, 7, 6) y C = (5, 3, 2). **[1.25 puntos]**

b) Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto (llamado baricentro) y calcule las coordenadas de dicho punto. **[1.25 puntos]**

Solución: a) Mediana del vértice A es $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 \end{cases}$ *; Mediana del vértice B es* $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 7 + 2t \\ z = 6 + t \end{cases}$ *;*

Mediana del vértice C es $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3 \\ z = 2 + t \end{cases}$ *b)* $G(3,3,4)$

SEPTIEMBRE 2010

CUESTIÓN A.2: Calcular el punto más cercano al punto P=(1,0,-1) de entre todos los puntos del plano determinado por los puntos Q=(2,2,1), R=(0,1,2) y S=(0,0,1). Calcular la distancia de punto P al plano. **[2.5 puntos]**

Solución: $T = \left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$ *y la distancia es* $\frac{1}{\sqrt{3}}$

CUESTIÓN B.2: Estudiar la posición relativa de las rectas

$$r : x+1 = y = 1-z \quad \text{y} \quad s : \left.\begin{matrix} x = \lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 2-\lambda \end{matrix}\right\}$$

y calcular la distancia entre ellas. **[2.5 puntos]**

Solución: Son paralelas y la distancia es $\sqrt{\frac{8}{3}}$

JUNIO 2010

CUESTIÓN A.2: Calcular el punto más cercano al punto P = (1, 3, 0) de entre todos los puntos de la recta determinada por el punto Q = (-2, 2, 1) y el vector v = (1, 1, 1). Calcular la distancia del punto P a la recta. **[2.5 puntos]**

Solución: $R = (-1,3,2)$ y la distancia es $\sqrt{8}$

CUESTIÓN B.2: Comprobar que las rectas

$$r : x+1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3} \quad y \quad s : \left.\begin{matrix} x = \lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 2-\lambda \end{matrix}\right\}$$

no se cortan y no son paralelas. Calcular la distancia entre ellas. **[2.5 puntos]**

Solución: Los vectores $\vec{v_r} = (1,2,3)$, $\vec{v_s} = (1,1,-1)$ *y* $\overrightarrow{P_rP_s} = (1,3,1)$ *son linealmente independientes, por lo que las rectas no son paralelas, ni se cortan, sino que se cruzan. La distancia entre ellas es* $\frac{6}{\sqrt{42}}$

Orientaciones EBAU. Bloque de Geometría.

Cuestión 4. Bloque de Geometría (2,5 puntos)

a) Determinación de ecuaciones de rectas y planos en el espacio a partir de datos geométricos.

- Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal.
- Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas.
- Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente.
- Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.

b) Estudio de la distancia, de la posición relativa, de la perpendicularidad y/o del paralelismo de puntos, rectas y planos. En su caso, determinación de los puntos de corte, del ángulo que forman o de la distancia entre ellos.

- Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos.
- Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

Ejemplo.

Considere la recta r y el plano π dados por las ecuaciones siguientes

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{5} \quad \text{y} \quad \pi: x-2y+z=-3$$

a) Compruebe que la recta r es paralela al plano π y calcule la distancia entre ellos.

b) Determine la recta que pasa por el punto P = (1, 0, 2) y es perpendicular al plano π. Calcule la intersección de dicha recta con el plano π.

c) Resolución de problemas métricos referidos al área de figuras planas sencillas, como triángulos, cuadrados, rectángulos o paralelogramos, o al volumen de figuras sólidas sencillas, como tetraedros o paralelepípedos.

- Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.
- Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.
- Conoce el producto mixto de tres vectores, su significado geométrico, su expresión analítica y propiedades.
- Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

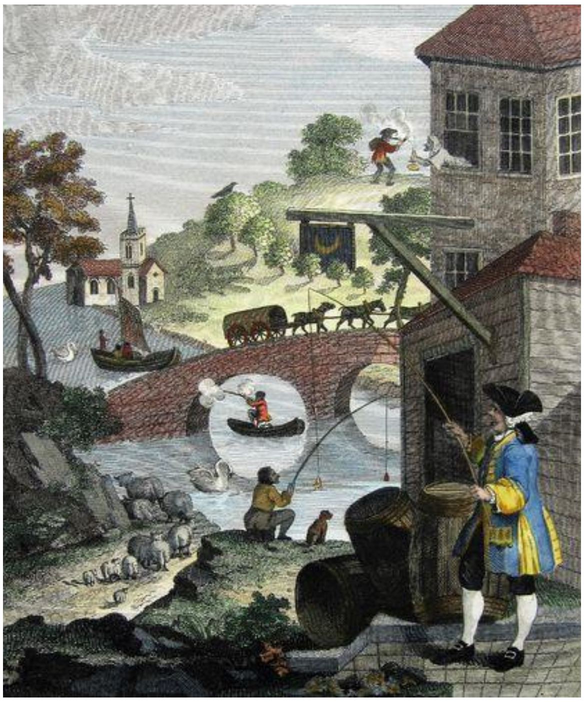
Ejemplo.

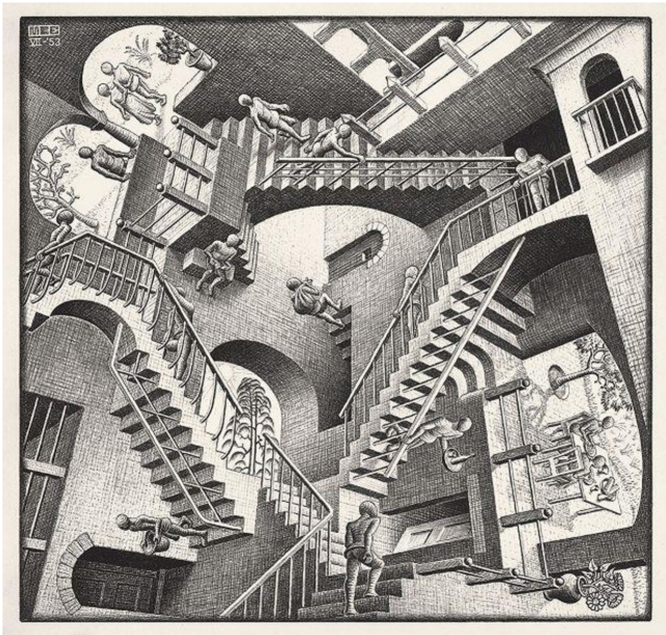
Considere los puntos P = (1, 1, 3) y Q = (1, 5, 0) y la recta *r* dada por la ecuación:

$$r:\begin{cases}2x-y-2z=-3\\-x+y=4\end{cases}$$

a) Compruebe que el punto *P* no está en la recta *r* y que el punto *Q* sí lo está.
b) Determine el punto *R* de la recta *r* tal que el triángulo *PQR* sea un triángulo rectángulo en P (es decir, con ángulo recto en el vértice *P*).
c) Calcule el área de dicho triángulo *PQR*.

Curiosidades:





Perspectiva absurda. Año 1754 Autor: William Hogarth Escher. Año 1955

Un comentario anónimo:

¿Alguna vez os habéis planteado porque se fabrican mesas con cuatro patas y no con tres? Nosotros tampoco lo habíamos hecho hasta que conversamos con una diseñadora. Ella nos dijo que las mesas de tres patas nunca cojeaban y que esto se debía a un principio de geometría euclidiana (parece complejo pero no lo es). Basta con 3 puntos para posicionar un objeto en un plano.

Seguro que alguna vez os habréis encontrado en una terraza con una mesa que cojea intentando calzar una pequeña pieza de madera para evitar que se tambalee. Esto ocurre porque hay un desnivel en el suelo o un problema con las patas de la mesa. Este problema estaría solucionado si la mesa tuviera solamente 3 patas debidamente dispuestas.

¿Por qué las cámaras utilizan un trípode?
Es más estable con 3 patas, es innecesario y haría más difícil su manejo con una 4ª pata.