1 Estudia si son continuas las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{-3}{2x+3} & \text{si } x>0 \end{cases}$ en $x=0$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-5x+3 & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x} & \text{si } 0<x<1 \\ \ln(2x^2-1) & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$ en $x = 0$ y en $x = 1$

Solución.

2 Calcula el valor de a para que las siguientes funciones sean continuas:

a) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+2a} & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{3a-x}{x+1} & \text{si } x>0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} e^{a(x-1)} & \text{si } x<1 \\ x+2a & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

Solución.

3 Calcula los siguientes límites con funciones irracionales:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4x}}{2x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{1-\sqrt{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{4x+2}}$

d) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

f) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{x^2-4x}$

Solución.

4 Calcula los siguientes límites con funciones racionales:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x^2-1)}{-2x^3+x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-4}{x^2-4x+3}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-8}{x^2-4x+4}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3}{x^4-x}$

d) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+10x+25}$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(2x-1)(3-x^2)}{x(4x^2-x+1)}$

Solución.

5 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}-\dfrac{x^2+2}{x-1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{x^2}-\dfrac{x^3+2}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x-1}{x-3}-\dfrac{x+5}{x^2-4x+3}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

Solución.

6 Calcula los valores de a y de b para que las siguientes funciones sean continuas:

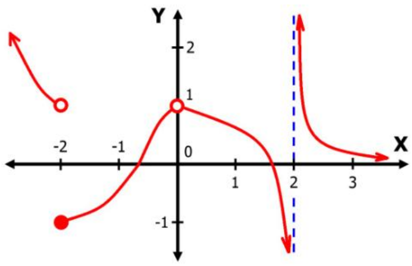
a) $f(x)=\begin{cases} 3x-4 & \text{si } x\le 1 \\ ax-b & \text{si } 1<x<4 \\ \dfrac{ax}{2} & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{-7x}{3}+5 & \text{si } -3<x\le 1 \\ -x^2+ax+4 & \text{si } 1<x\le 3 \\ \dfrac{bx-15}{x-1} & \text{si } 3<x<6 \end{cases}$

Solución.

7 Observa las siguientes gráficas de funciones y responde a las preguntas que se hacen:

a)

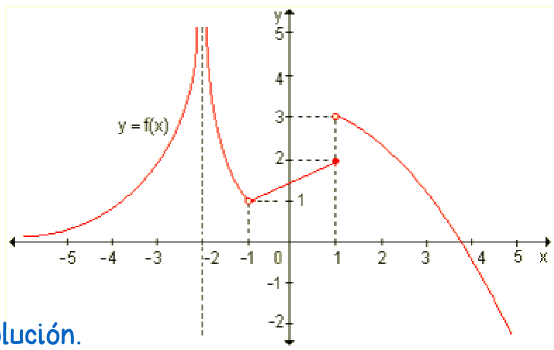


$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=$ $\quad\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=$ $\quad\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=$

b)



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=$ $\quad\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=$ $\quad\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=$

Solución.

8 Representa gráficamente dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ con las siguientes condiciones:

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ $\quad \lim_{x\to-1^-} f(x)=\infty$ $\quad \lim_{x\to-1^+} f(x)=\infty$ $\quad \lim_{x\to 0} f(x)=3$ $\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\infty$ $\quad \lim_{x\to 1^-} g(x)=-\infty$ $\quad \lim_{x\to 1^+} g(x)=3$ $\quad \lim_{x\to 5^-} g(x)=\infty$ $\quad \lim_{x\to 5^+} g(x)=-\infty$ $\quad \lim_{x\to\infty} g(x)=4$

Solución.

9 Averigua si las siguientes funciones tienen asíntota horizontal y, en caso afirmativo, dibuja las ramas asintóticas:

a) $f(x)=\dfrac{-2x}{1-x}$ $\quad$ b) $g(x)=\dfrac{2x^2}{4x+1}$ $\quad$ c) $h(x)=\dfrac{3x^2+1}{x+x^2}$ $\quad$ d) $i(x)=\dfrac{3}{2x^2-1}$

Solución.

10 Averigua si las siguientes funciones tienen asíntotas verticales y, en caso afirmativo, dibuja las ramas asintóticas:

a) $f(x)=\dfrac{-2x}{1-x}$ $\quad$ b) $g(x)=\dfrac{3x}{2x-4}$ $\quad$ c) $h(x)=\dfrac{-5}{x+x^2}$ $\quad$ d) $i(x)=\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$

Solución.

11 Justifica si las siguientes funciones tienen asíntota oblicua o no. En caso de que las tengan, dibuja las ramas asintóticas.

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ $\quad$ b) $g(x)=\dfrac{-5x^2+x}{x^2+1}$ $\quad$ c) $h(x)=\dfrac{x^3-x}{-4+x^2}$ $\quad$ d) $i(x)=\dfrac{x^2+5x-3}{x-2}$

Solución.

12 Averigua las asíntotas que tienen las siguientes funciones y representa gráficamente las ramas asintóticas.

a) $f(x)=\dfrac{-x^2}{x-5}$

b) $g(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^2-x-2}$

c) $h(x)=\dfrac{4x+1}{x^2+1}$

d) $i(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

e) $j(x)=\dfrac{x^2}{4-x}$

Solución.

1 Estudia si son continuas las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{-3}{2x+3} & \text{si } x>0 \end{cases}$ en $x=0$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-5x+3 & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x} & \text{si } 0<x<1 \\ \ln\left(2x^2-1\right) & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$ en $x=0$ y en $x=1$

Solución.

a) $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{-3}{2x+3} & \text{si } x>0 \end{cases}$ en $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(3x-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-3}{2x+3}=-1$$

$$f(0)=3\cdot 0-1=-1$$

$f(x)$ es continua en $x=0$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-5x+3 & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x} & \text{si } 0<x<1 \\ \ln\left(2x^2-1\right) & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

- En $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x^2-5x+3\right)=3$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-2x+1}{x^2-x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$f(0)=0^2-5\cdot 0+3=3$$

$f(x)$ no es continua en $x=0$
Discontinuidad de salto infinito.

- En $x = 1$

0/0 IND

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2x+1}{x^2-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{x\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln\left(2x^2-1\right) = \ln 1 = 0$$

$$f(1) = \ln 1 = 0$$

$f(x)$ es continua en $x = 1$

Volver a los enunciados

2 Calcula el valor de a para que las siguientes funciones sean continuas:

a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+2a} & \text{si } x\le 0\\ \dfrac{3a-x}{x+1} & \text{si } x>0\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}e^{a(x-1)} & \text{si } x<1\\ x+2a & \text{si } x\ge 1\end{cases}$

Solución.

a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+2a} & \text{si } x\le 0\\ \dfrac{3a-x}{x+1} & \text{si } x>0\end{cases}$

Estudiaremos la continuidad en x = 0.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x+2a}=\sqrt{2a}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3a-x}{x+1}=3a\\ f(0)=\sqrt{2a}\end{array}\right\}\ \sqrt{2a}=3a\to\left(\sqrt{2a}\right)^2=(3a)^2\to 2a=9a^2\to 9a^2-2a=0$$

$$\to a(9a-2)=0\to \boxed{a=0}\quad \boxed{a=\frac{2}{9}}$$

b) $f(x)=\begin{cases}e^{a(x-1)} & \text{si } x<1\\ x+2a & \text{si } x\ge 1\end{cases}$

Estudiaremos la continuidad en x = 1.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} e^{a(x-1)}=e^0=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+2a)=1+2a\\ f(1)=1+2a\end{array}\right\}\ 1=1+2a\to 0=2a\to\boxed{a=0}$$

Volver a los enunciados

3 Calcula los siguientes límites con funciones irracionales:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4x}}{2x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{1-\sqrt{x}}$ e) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{4x+2}}$ d) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$ f) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{x^2-4x}$

Solución.

Los grados son iguales

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x}}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2-4x}{(2x+1)^2}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2-4x}{4x^2+4x+1}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

Grado num > Grado den

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{\sqrt{4x+2}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{4x+2}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4-2x^2+1}{4x+2}}=\sqrt{\infty}=\infty$$

0/0 Indet.

c) $$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{1-\sqrt{x}}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)\cdot(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})\cdot(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)\cdot(1+\sqrt{x})}{1^2-(\sqrt{x})^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)\cdot(1+\sqrt{x})}{1-x}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(1+\sqrt{x})}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{-(1-x)\cdot(x+1)\cdot(1+\sqrt{x})}{1-x}=\lim_{x\to1}\left[-(x+1)\cdot(1+\sqrt{x})\right]=-4$$

0/0 Indet.

d) $$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}-2)\cdot(\sqrt{x}+2)}{(x^2-16)\cdot(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{(x^2-16)\cdot(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x^2-16)\cdot(\sqrt{x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x+4)\cdot(x-4)\cdot(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{(x+4)\cdot(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{32}$$

0/0 Indet.

e) $$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{(\sqrt{x+4}-3)\cdot(\sqrt{x+4}+3)}{(x-5)\cdot(\sqrt{x+4}+3)}=\lim_{x\to5}\frac{(\sqrt{x+4})^2-3^2}{(x-5)\cdot(\sqrt{x+4}+3)}=\lim_{x\to5}\frac{x+4-9}{(x-5)\cdot(\sqrt{x+4}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{x-5}{(x-5)\cdot(\sqrt{x+4}+3)}=\lim_{x\to5}\frac{1}{\sqrt{x+4}+3}=\frac{1}{6}$$

0/0 Indet.

f) $\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{x^2-4x}=\lim_{x\to 4}\frac{(2-\sqrt{x})\cdot(2+\sqrt{x})}{(x^2-4x)\cdot(2+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 4}\frac{2^2-(\sqrt{x})^2}{(x^2-4x)\cdot(2+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{(x^2-4x)\cdot(2+\sqrt{x})}=$

$=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{x\cdot(x-4)\cdot(2+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 4}\frac{-(x-4)}{x\cdot(x-4)\cdot(2+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 4}\frac{-1}{x\cdot(2+\sqrt{x})}=\frac{-1}{16}$

Volver a los enunciados

4 Calcula los siguientes límites con funciones racionales:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x^2-1)}{-2x^3+x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^3}{x^4-x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^2-4}{x^2-4x+3}$

d) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x^2+10x+25}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x^2-4x+4}$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{(2x-1)(3-x^2)}{x(4x^2-x+1)}$

Solución.

Los grados son iguales

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x^2-1)}{-2x^3+x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x}{-2x^3+x^2}=\frac{-1}{2}$

0/0 Indet.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^3}{x^4-x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x}\cdot(x^3-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{x^3-1}=\frac{0}{-1}=0$

0/0 Indet.

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^2-4}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{4\cdot(x+1)\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cdot(x-3)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{4\cdot(x+1)}{x-3}=\frac{8}{-2}=-4$

La factorización del numerador y del denominador es la siguiente:

$$4x^2-4=4\cdot(x^2-1)=4\cdot(x+1)\cdot(x-1)$$

$$x^2-4x+3=0\ \rightarrow\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot3\cdot1}}{2}=\frac{4\pm2}{2}=\begin{cases}x=\frac{6}{2}=3\\ x=\frac{2}{2}=1\end{cases}$$

0/0 Indet.

d) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x^2+10x+25}=\lim\limits_{x\to -5}\frac{\cancel{(x+5)}\cdot(x-2)}{(x+5)^{\cancel{2}}}=\lim\limits_{x\to -5}\frac{x-2}{x+5}=\frac{-7}{0}\begin{cases}\lim\limits_{x\to -5^-}\frac{x-2}{x+5}=\frac{-7}{0^-}=\infty\\ \lim\limits_{x\to -5^+}\frac{x-2}{x+5}=\frac{-7}{0^+}=-\infty\end{cases}$

La factorización del numerador y del denominador es la siguiente:

$$x^2+3x-10=0\ \rightarrow\ x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot(-10)\cdot1}}{2}=\frac{-3\pm7}{2}=\begin{cases}x=\frac{4}{2}=2\\ x=\frac{-10}{2}=-5\end{cases}$$

$$x^2+10x+25=(x+5)^2$$

0/0 Indet.

e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x^2-4x+4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2(x+2)(x-2)}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2(x+2)}{x-2}=\frac{8}{0}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{2(x+2)}{x-2}=\frac{8}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2(x+2)}{x-2}=\frac{8}{0^+}=\infty\end{cases}$

Los grados son iguales

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{(2x-1)(3-x^2)}{x(4x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-2x^3+x^2+6x-3}{4x^3-x^2+x}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$

Volver a los enunciados

5 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}-\dfrac{x^2+2}{x-1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{x-1}{x-3}-\dfrac{x+5}{x^2-4x+3}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{x^2}-\dfrac{x^3+2}{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

Solución.

∞ - ∞ IND

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}-\dfrac{x^2+2}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{(x^2-1)(x-1)}{x(x-1)}-\dfrac{x(x^2+2)}{x(x-1)}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x(x-1)}-\dfrac{x^3+2x}{x(x-1)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2-3x+1}{x^2-x}=-1$

∞ - ∞ IND

b) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{x-1}{x-3}-\dfrac{x+5}{x^2-4x+3}\right)=\lim\limits_{x\to3}\left[\dfrac{(x-1)^2}{(x-3)(x-1)}-\dfrac{x+5}{(x-3)(x-1)}\right]=\lim\limits_{x\to3}\left[\dfrac{x^2-2x+1}{(x-3)(x-1)}-\dfrac{x+5}{(x-3)(x-1)}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x+3}=\dfrac{-4}{0}\begin{cases}\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x+3}=\dfrac{-4}{0^-}=\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x+3}=\dfrac{-4}{0^+}=-\infty\end{cases}$

∞ - ∞ IND

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{x^2}-\dfrac{x^3+2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^3+1}{x^2}-\dfrac{x(x^3+2)}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{x^2}-\dfrac{x^4+2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^4+x^3-2x+1}{x^2}=-\infty$

∞ - ∞ IND

d) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{x+1}=\dfrac{-1}{2}$

Volver a los enunciados

6 Calcula los valores de a y de b para que las siguientes funciones sean continuas:

a) $f(x)=\begin{cases} 3x-4 & \text{si } x\le 1 \\ ax-b & \text{si } 1<x<4 \\ \dfrac{ax}{2} & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{-7x}{3}+5 & \text{si } -3<x\le 1 \\ -x^2+ax+4 & \text{si } 1<x\le 3 \\ \dfrac{bx-15}{x-1} & \text{si } 3<x<6 \end{cases}$

Solución.

a) Continuidad en x = 1.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3x-4)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax-b)=a-b \\ f(1)=-1 \end{array}\right\}\quad a-b=-1$$

Continuidad en x = 4.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(ax-b)=4a-b \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\left(\dfrac{ax}{2}\right)=\dfrac{4a}{2}=2a \\ f(4)=2a \end{array}\right\}\quad 4a-b=2a \;\rightarrow\; 2a-b=0$$

Tenemos por tanto un sistema que resolveremos por reducción:

$$\begin{array}{lcl} a-b=-1 & \xrightarrow{\cdot(-1)} & -a+b=1 \\ 2a-b=0 & \longrightarrow & \underline{2a-b=0} \\ & & a\quad=1 \quad\rightarrow\quad b=2 \end{array}$$

b) Continuidad en x = 1.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{-7x}{3}+5\right) = \frac{-7}{3}+5 = \frac{8}{3}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(-x^2+ax+4\right) = -1+a+4 = a+3$$

$$f(1) = \frac{8}{3}$$

$$a+3 = \frac{8}{3} \rightarrow a = \frac{-1}{3}$$

Continuidad en x = 3.

a = -1/3

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\left(-x^2+ax+4\right) = -9+3a+4 = 3a-5 = -6$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{bx-15}{x-1}\right) = \frac{3b-15}{2}$$

$$f(3) = -6$$

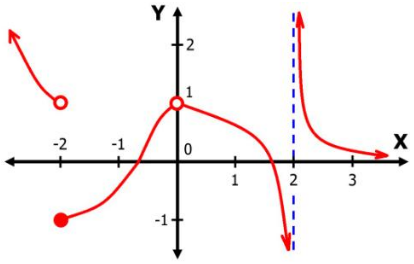
$$\frac{3b-15}{2} = -6 \rightarrow 3b-15 = -12 \rightarrow$$

$$3b = 3 \rightarrow b = 1$$

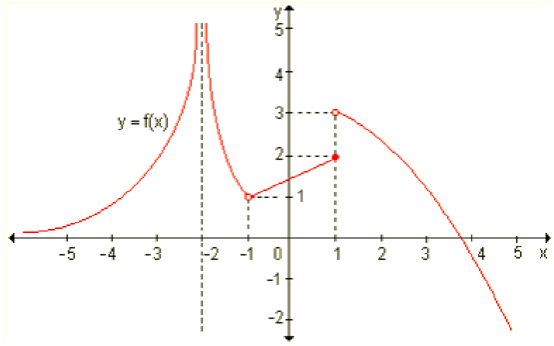
Volver a los enunciados

7 Observa las siguientes gráficas de funciones y responde a las preguntas que se hacen:

a)



b)



Solución.

a)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = \infty$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = 3$$

Volver a los enunciados

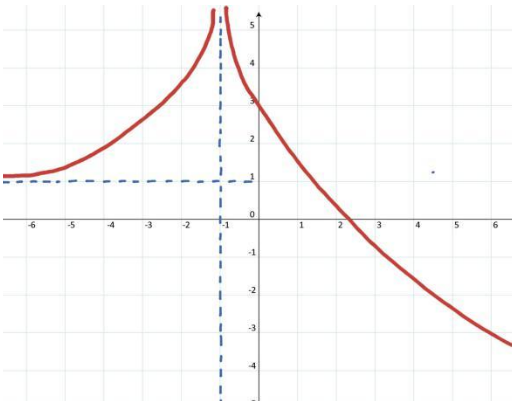
8 Representa gráficamente dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ con las siguientes condiciones:

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1 \quad \lim_{x\to-1^-} f(x)=\infty \quad \lim_{x\to-1^+} f(x)=\infty \quad \lim_{x\to0} f(x)=3 \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

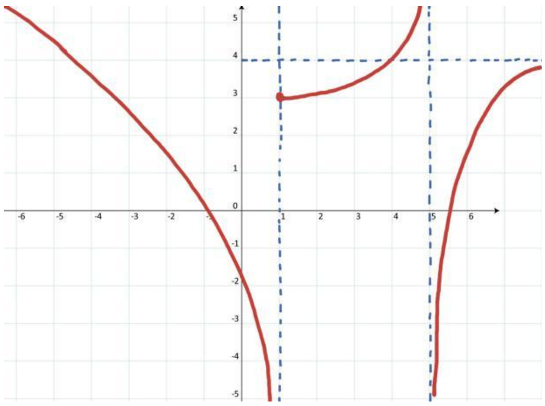
b) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\infty \quad \lim_{x\to1^-} g(x)=-\infty \quad \lim_{x\to1^+} g(x)=3 \quad \lim_{x\to5^-} g(x)=\infty \quad \lim_{x\to5^+} g(x)=-\infty \quad \lim_{x\to\infty} g(x)=4$

Solución.

a)



b)



Las soluciones no son únicas. Lo importante es colocar las ramas bien en relación a las asíntotas.

Por ejemplo, en la gráfica b, el punto (1,3) puede ser lleno o vacío.

Volver a los enunciados

9 Averigua si las siguientes funciones tienen asíntota horizontal y, en caso afirmativo, dibuja las ramas asintóticas:

a) $f(x)=\dfrac{-2x}{1-x}$ b) $g(x)=\dfrac{2x^2}{4x+1}$ c) $h(x)=\dfrac{3x^2+1}{x+x^2}$ d) $i(x)=\dfrac{3}{2x^2-1}$

Solución.

a) $f(x)=\dfrac{-2x}{1-x}$

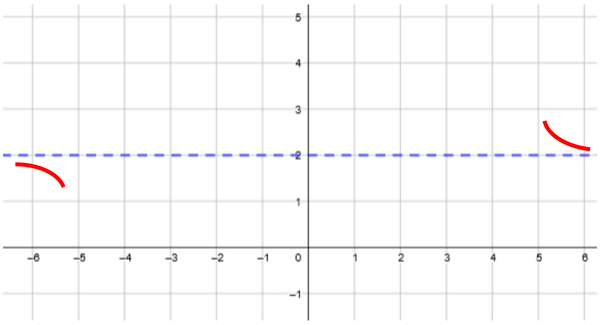
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{1-x}=\dfrac{-2}{-1}=2\\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{1-x}=\dfrac{-2}{-1}=2\end{array}\right\}$$

Asíntota horizontal

$y = 2$

$f(100)=\dfrac{-200}{-99}=2{,}02$ Función por encima de la asíntota

$f(-100)=\dfrac{200}{101}=1{,}98$ Función por debajo de la asíntota



b) $g(x)=\dfrac{2x^2}{4x+1}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{4x+1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{4x+1}=\infty\end{array}\right\}$$

No hay asíntota horizontal

c) $h(x) = \dfrac{3x^2+1}{x+x^2}$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+1}{x+x^2} = \frac{3}{1} = 3$$

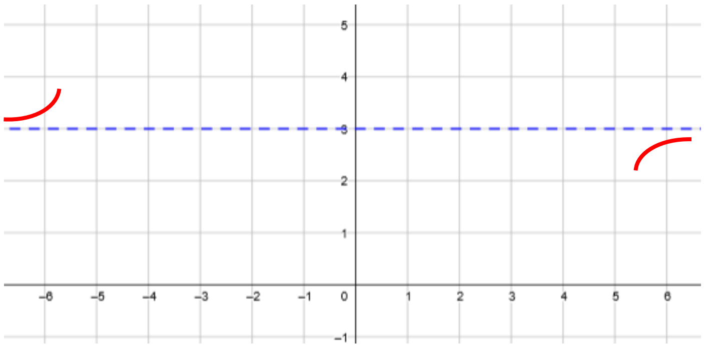
$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x+x^2} = \frac{3}{1} = 3$$

Asíntota horizontal

$y = 3$

$h(100) = \dfrac{30001}{10100} = 2{,}97$ Función por debajo de la asíntota

$h(-100) = \dfrac{30001}{9900} = 3{,}03$ Función por encima de la asíntota



d) $i(x) = \dfrac{3}{2x^2-1}$

$$\lim_{x\to-\infty} i(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{2x^2-1} = 0$$

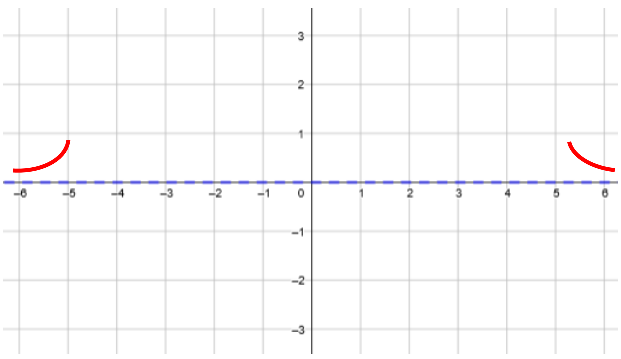
$$\lim_{x\to\infty} i(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2x^2-1} = 0$$

Asíntota horizontal

$y = 0$

$i(100) = \dfrac{3}{19999} = 0{,}00015$ Función por encima de la asíntota

$i(-100) = \dfrac{3}{19999} = 0{,}00015$ Función por encima de la asíntota



Volver a los enunciados

10 Averigua si las siguientes funciones tienen asíntotas verticales y, en caso afirmativo, dibuja las ramas asintóticas:

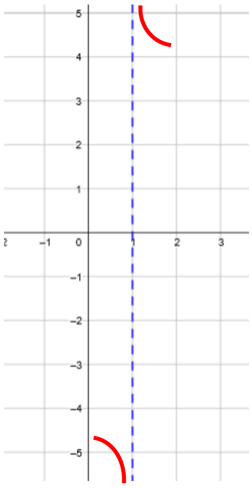
a) $f(x)=\frac{-2x}{1-x}$ b) $g(x)=\frac{3x}{2x-4}$ c) $h(x)=\frac{-5}{x+x^2}$ d) $i(x)=\frac{x-3}{x^2-5x+6}$

Solución.

a) $f(x)=\frac{-2x}{1-x}$ $1-x=0 \rightarrow x=1$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to1^-} f(x) &= \lim_{x\to1^-}\frac{-2x}{1-x}=\frac{-2}{0^+}=-\infty\\ \lim_{x\to1^+} f(x) &= \lim_{x\to1^+}\frac{-2x}{1-x}=\frac{-2}{0^-}=\infty\end{aligned}\right\}$$

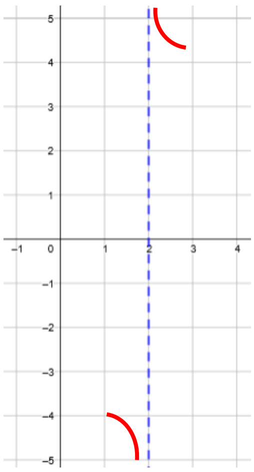
Asíntota vertical
x = 1



b) $g(x)=\frac{3x}{2x-4}$ $2x-4=0 \rightarrow x=2$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to2^-} g(x) &= \lim_{x\to2^-}\frac{3x}{2x-4}=\frac{6}{0^-}=-\infty\\ \lim_{x\to2^+} g(x) &= \lim_{x\to2^+}\frac{3x}{2x-4}=\frac{6}{0^+}=\infty\end{aligned}\right\}$$

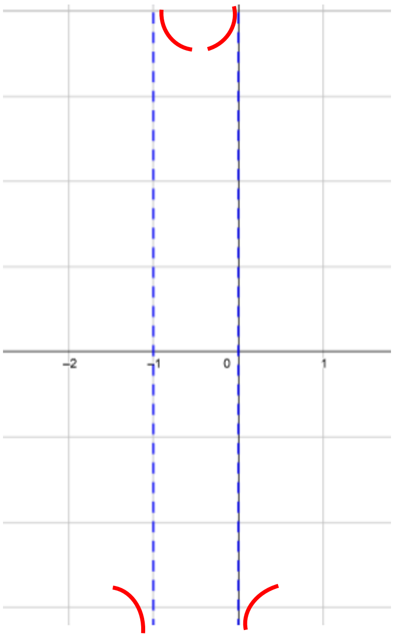
Asíntota vertical
x = 2



c) $h(x)=\frac{-5}{x+x^2}$ $x+x^2=0 \rightarrow x(1+x)=0 \rightarrow x=0 \quad x=-1$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-1^-} h(x) &= \lim_{x\to-1^-}\frac{-5}{x+x^2}=\frac{-5}{0^+}=-\infty\\ \lim_{x\to-1^+} h(x) &= \lim_{x\to-1^+}\frac{-5}{x+x^2}=\frac{-5}{0^-}=\infty\end{aligned}\right\}$$

Asíntota vertical
x = -1



$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-5}{x+x^2} = \frac{-5}{0^-} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-5}{x+x^2} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

Asíntota vertical

x = 0

d) $i(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$ $\qquad x^2-5x+6=0 \ \rightarrow \quad x=2 \quad x=3$

$$\lim_{x\to 2^-} i(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-5x+6} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} i(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x^2-5x+6} = \frac{-1}{0^-} = \infty$$

Asíntota vertical

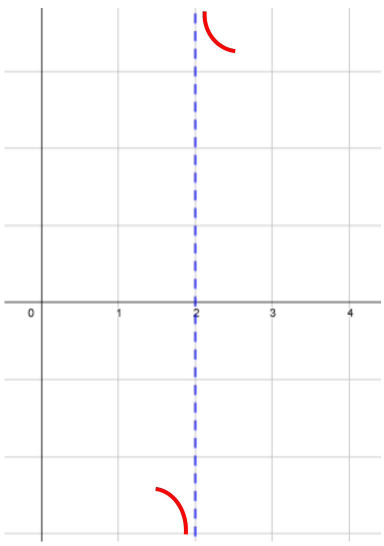
x = 2

0/0 Indet.

$$\lim_{x\to 3^-} i(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x-3}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3^-} \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}\cdot(x-2)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-2} = 1$$

$$\lim_{x\to 3^+} i(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x^2-5x+6} = 1$$

No hay asíntota vertical



Volver a los enunciados

11 Justifica si las siguientes funciones tienen asíntota oblicua o no. En caso de que las tengan, dibuja las ramas asintóticas.

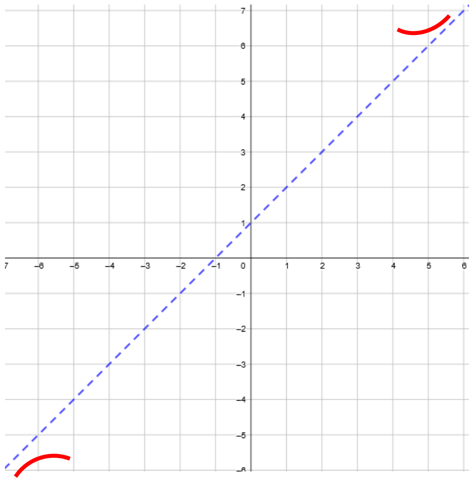
a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ b) $g(x)=\dfrac{-5x^2+x}{x^2+1}$ c) $h(x)=\dfrac{x^3-x}{-4+x^2}$ d) $i(x)=\dfrac{x^2+5x-3}{x-2}$

Solución.

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

Hay asíntota oblicua porque el grado del numerador es uno más que el grado del denominador.

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & & x-1 \\ \hline -x^2+x & & x+1 \\ \hline +x & & \\ -x+1 & & \\ \hline +1 & & \end{array} \longrightarrow \boxed{\text{As. oblícua } \; y=x+1}$$



$$x=100\begin{cases}\text{Función: } f(100)=\dfrac{10000}{99}=101{,}01\\ \text{Asíntota: } y=100+1=101\end{cases}$$

Función encima de asíntota.

$$x=-100\begin{cases}\text{Función: } f(-100)=\dfrac{10000}{-101}=-99{,}01\\ \text{Asíntota: } y=-100+1=-99\end{cases}$$

Función bajo la asíntota.

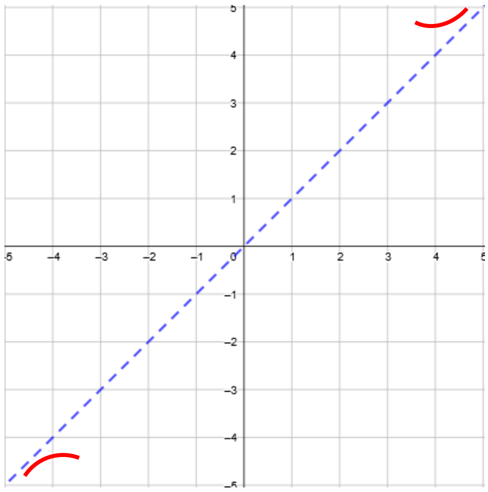
b) $g(x)=\dfrac{-5x^2+x}{x^2+1}$

No hay asíntota oblicua porque los grados del numerador y del denominador son iguales.

c) $h(x)=\dfrac{x^3-x}{-4+x^2}$

Hay asíntota oblicua porque el grado del numerador es uno más que el grado del denominador.

$$\begin{array}{rr|l} x^3 & -x & x^2-4 \\ \cline{3-3} -x^3 & +4x & x \\ \hline & 3x & \end{array} \longrightarrow \text{As. oblícua } \; y=x$$



$$x=100\begin{cases}\text{Función: } \; f(100)=\dfrac{999900}{9996}=100{,}03\\ \text{Asíntota: } \; y=100\end{cases}$$

Función encima de asíntota.

$$x=-100\begin{cases}\text{Función: } \; f(-100)=\dfrac{-999900}{9996}=-100{,}03\\ \text{Asíntota: } \; y=-100\end{cases}$$

Función bajo la asíntota.

d) $i(x)=\dfrac{x^2+5x-3}{x-2}$

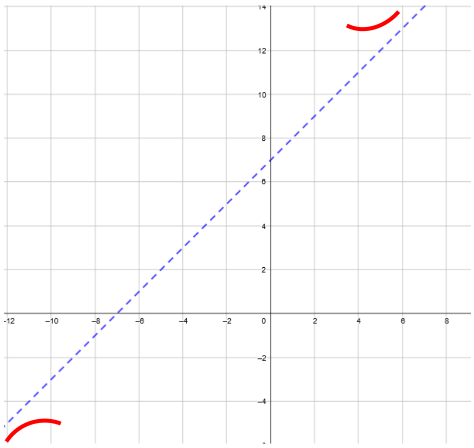
Hay asíntota oblicua porque el grado del numerador es uno más que el grado del denominador.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 5 & -3 \\ 2 & \downarrow & 2 & 14 \\ \hline & 1 & 7 & \boxed{11} \end{array}$$

As. oblícua $y=x+7$

NOTA:

Esta división la podemos hacer por Ruffini o por el método habitual, al igual que el apartado a.



$$x = 100 \begin{cases} \text{Función: } f(100) = \dfrac{10497}{98} = 107{,}11 \\ \text{Asíntota: } y = 100 + 7 = 107 \end{cases}$$

Función encima de la asíntota.

$$x = -100 \begin{cases} \text{Función: } f(-100) = \dfrac{9497}{-102} = -93{,}11 \\ \text{Asíntota: } y = -100 + 7 = -93 \end{cases}$$

Función bajo la asíntota.

Volver a los enunciados

12 Averigua las asíntotas que tienen las siguientes funciones y representa gráficamente las ramas asintóticas.

a) $f(x)=\dfrac{-x^2}{x-5}$

b) $g(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^2-x-2}$

c) $h(x)=\dfrac{4x+1}{x^2+1}$

d) $i(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

e) $j(x)=\dfrac{x^2}{4-x}$

Solución.

a) $f(x)=\dfrac{-x^2}{x-5}$

- <u>Asíntotas verticales:</u>

$x-5=0 \;\rightarrow\; x=5$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to5^-}\dfrac{-x^2}{x-5}=\dfrac{-25}{0^-}=\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{-x^2}{x-5}=\dfrac{-25}{0^+}=-\infty\end{array}\right\}$$

Asíntota vertical

x = 5

- <u>Asíntota oblícua:</u>

Tiene asíntota oblícua pues el grado del numerador es uno más que el del denominador.

$$\begin{array}{c|ccc} & -1 & 0 & 0\\ 5 & \downarrow & -5 & -25\\ \hline & -1 & -5 & \boxed{-25}\end{array}$$

As. oblícua $y=-x-5$

NOTA:

Esta división la podemos hacer por Ruffini o por el método habitual.

$$x=100\begin{cases}\text{Función: } f(100)=\dfrac{-10000}{95}=-105{,}26\\ \text{Asíntota: } y=-100-5=-105\end{cases}$$

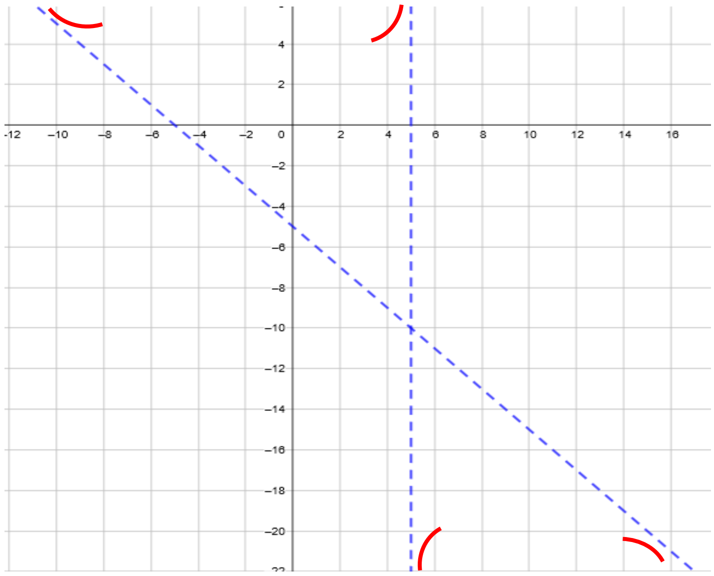
Función bajo la asíntota.

$$x=-100\begin{cases}\text{Función: } f(-100)=\dfrac{-10000}{-105}=95{,}24\\ \text{Asíntota: } y=100-5=95\end{cases}$$

Función por encima de la asíntota.

- Asíntota horizontal:

No tiene puesto que tiene asíntota oblicua.



b) $g(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^2-x-2}$

- Asíntotas verticales:

$x^2-x-2=0 \quad \rightarrow \quad x=-1 \quad x=2$

$$\lim_{x\to -1^-} g(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{3x^2+1}{x^2-x-2}=\frac{4}{0^+}=\infty$$
$$\lim_{x\to -1^+} g(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{3x^2+1}{x^2-x-2}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

Asíntota vertical

x = -1

$$\lim_{x\to 2^-} g(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{3x^2+1}{x^2-x-2}=\frac{13}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} g(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{3x^2+1}{x^2-x-2}=\frac{13}{0^+}=\infty$$

Asíntota vertical

x = 2

- Asíntota oblicua:

No tiene asíntota oblicua pues el grado del numerador es igual al del denominador.

- Asíntota horizontal:

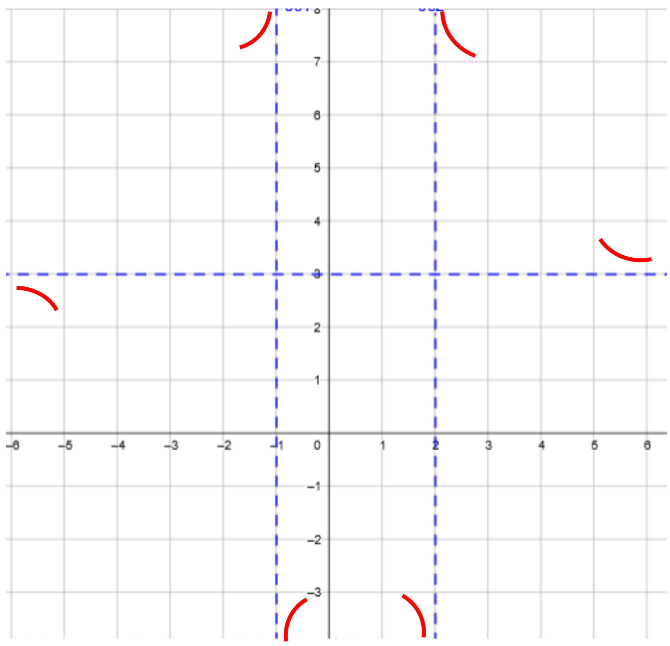
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-x-2} = \frac{3}{1} = 3$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-x-2} = \frac{3}{1} = 3$$

Asíntota horizontal

$y = 3$

$g(100) = \frac{30001}{9898} = 3{,}03$ Función por encima de la asíntota

$g(-100) = \frac{30001}{10098} = 2{,}97$ Función por debajo de la asíntota



c) $h(x) = \dfrac{4x+1}{x^2+1}$

- Asíntotas verticales:

$x^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1} \quad \rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

- Asíntota oblicua:

No tiene asíntota oblicua pues el grado del numerador es menor que el denominador.

- Asíntota horizontal:

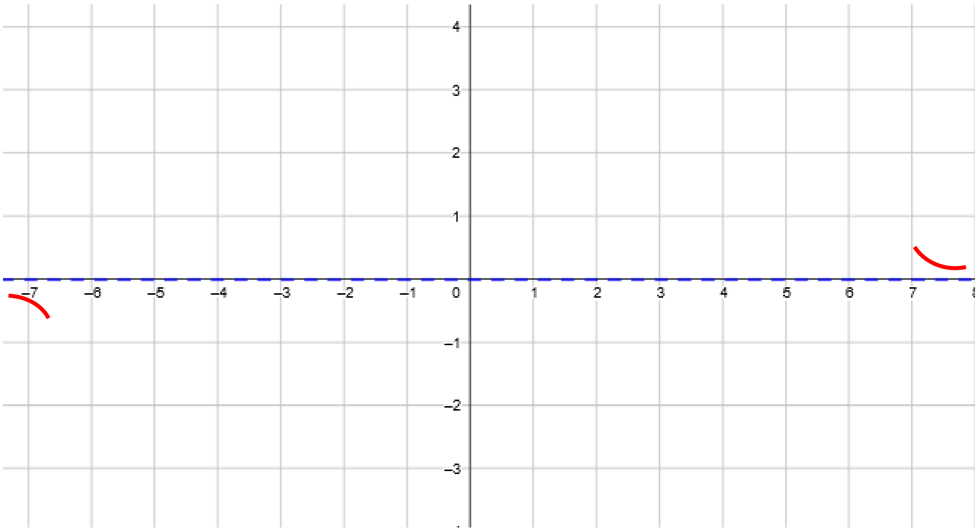
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x+1}{x^2+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x+1}{x^2+1} = 0 \end{array}\right\}$$

Asíntota horizontal

$y = 0$

$h(100) = \dfrac{401}{10001} = 0{,}04$ Función por encima de la asíntota

$h(-100) = \dfrac{-399}{10001} = -0{,}04$ Función por debajo de la asíntota



d) $i(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

- Asíntotas verticales:

$x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} i(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{1}{0^+} = \infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} i(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \end{array}\right\}$$

Asíntota vertical

x = -2

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} i(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} i(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{1}{0^+} = \infty \end{array}\right\}$$

Asíntota vertical

x = 2

- Asíntota oblicua:

No tiene asíntota oblicua pues el grado del numerador es menor que el del denominador.

- Asíntota horizontal:

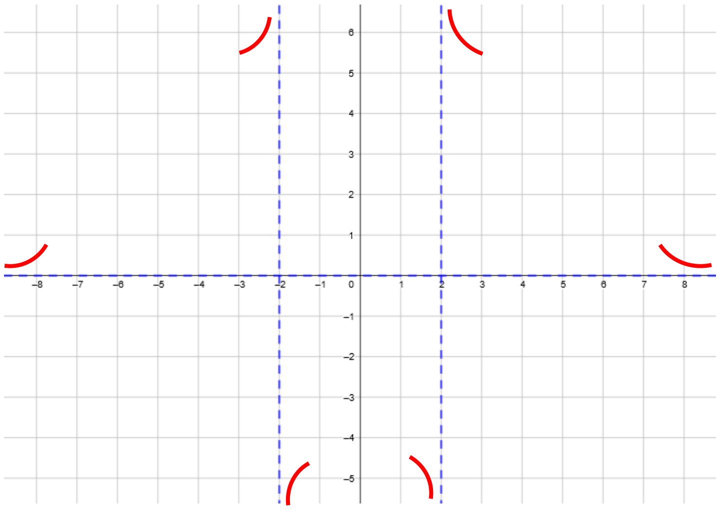
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} i(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^2-4} = 0 \\ \lim\limits_{x\to \infty} i(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{x^2-4} = 0 \end{array}\right\}$$

Asíntota horizontal

y = 0

$i(100) = \dfrac{1}{9996} = 0{,}0001$ Función por encima de la asíntota

$i(-100) = \dfrac{1}{9996} = 0{,}0001$ Función por encima de la asíntota



e) $j(x)=\dfrac{x^2}{4-x}$

- Asíntotas verticales:

$$4-x=0 \quad \rightarrow \quad x=4$$

$$\lim_{x\to 4^-} j(x)=\lim_{x\to 4^-}\frac{x^2}{4-x}=\frac{16}{0^+}=\infty$$
$$\lim_{x\to 4^+} i(x)=\lim_{x\to 4^+}\frac{x^2}{4-x}=\frac{16}{0^-}=-\infty$$

Asíntota vertical

$x = 4$

- Asíntota oblicua:

$$\begin{array}{rl} x^2 & \underline{\lvert -x+4} \\ -x^2+4x & -x-4 \\ \hline +4x & \\ -4x+16 & \\ \hline +16 & \end{array}$$

$\rightarrow$ As. oblícua $y=-x-4$

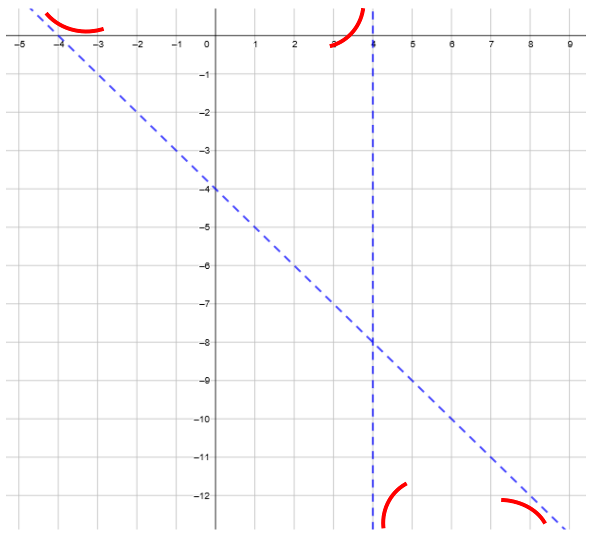
$$x=100\begin{cases}\text{Función: } f(100)=\dfrac{10000}{-96}=-104{,}17\\ \text{Asíntota: } y=-100-4=-104\end{cases}$$

Función bajo la asíntota.

$$x=-100\begin{cases}\text{Función: } f(-100)=\dfrac{10000}{104}=96{,}15\\ \text{Asíntota: } y=100-4=96\end{cases}$$

Función por encima de la asíntota.

- Asíntota horizontal: No hay puesto que hay asíntota oblícua.



Volver a los enunciados