1 Representa gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3-x}{2} & x<-1 \\ 2x+4 & x\geq -1 \end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases} 2-x^2 & x<2 \\ \dfrac{x}{2}-3 & x\geq 2 \end{cases}$

c) $h(x)=\begin{cases} \log_2 x & 0<x\leq 2 \\ 5 & 2<x<5 \\ \dfrac{x-1}{2} & x>5 \end{cases}$

d) $i(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & x<0 \\ \sqrt{x} & 0\leq x<4 \\ x^2-1 & x\geq 4 \end{cases}$

Solución.

2 Dadas las funciones: $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$, $g(x)=x^2-1$ y $h(x)=\sqrt{1+x}$ realiza las composiciones siguientes:

a) $f\circ g$ **b)** $g\circ h$ **c)** $h\circ f$ **d)** $f\circ f$

A la vista de los resultados obtenidos, ¿puedes encontrar un par de funciones que sean inversas una de la otra?. Justifica tu respuesta.

Solución.

3 Calcula las inversas de las funciones siguientes:

a) $f(x)=2x^2-3$ **b)** $g(x)=\dfrac{3x}{x-1}$ **c)** $h(x)=2^{\frac{x}{3}-1}$ **d)** $i(x)=1+\log_3 x$

Solución.

1 Representa gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{2} & x<-1\\ 2x+4 & x\geq -1\end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases}2-x^2 & x<2\\ \dfrac{x}{2}-3 & x\geq 2\end{cases}$

c) $h(x)=\begin{cases}\log_2 x & 0<x\leq 2\\ 5 & 2<x<5\\ \dfrac{x-1}{2} & x>5\end{cases}$

d) $i(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x<0\\ \sqrt{x} & 0\leq x<4\\ x^2-1 & x\geq 4\end{cases}$

Solución.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{2} & x<-1\\ 2x+4 & x\geq -1\end{cases}$

- Sí $x<-1$

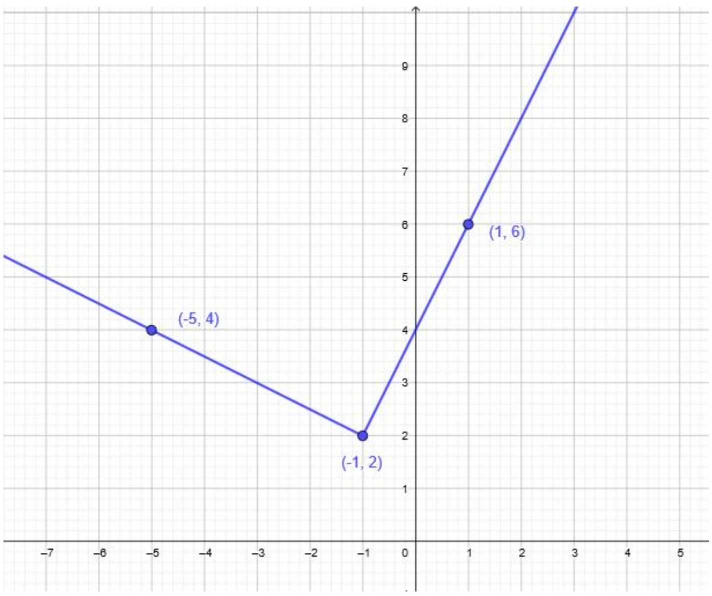
$f(x)=\dfrac{3-x}{2}$ (recta)

x	y
-5	4
-1	2

- Sí $x>-1$

$f(x)=2x+4$ (recta)

x	y
-1	2
1	6



b) $g(x)=\begin{cases}2-x^2 & x<2\\ \dfrac{x}{2}-3 & x\geq 2\end{cases}$

- Sí $x<2$

$g(x)=2-x^2$ (parábola)

$-$ Forma : $a = -1 < 0 \rightarrow$ cóncava

$-$ Vértice $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0 \\ y = 2 - 0^2 = 2 \end{array}\right\}$ $(0,2)$

$-$ Corte con el eje y $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 2 - 0^2 = 2 \end{array}\right\}$ $(0,2)$

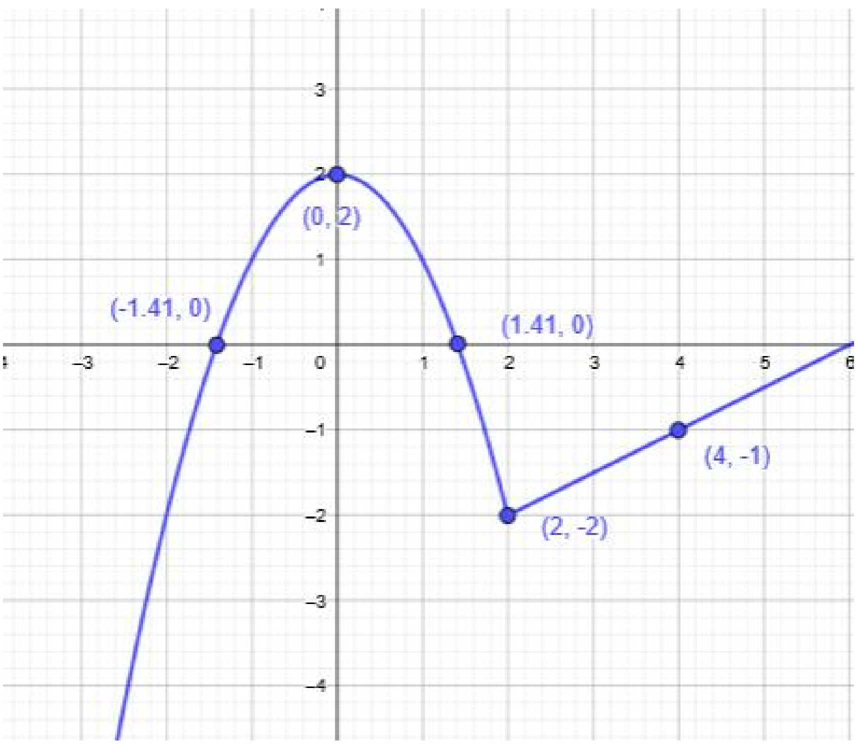
$-$ Cortes con el eje x $\left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ 0 = 2 - x^2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}41 \end{array}\right\}$ $(1{,}41;0)$ $(-1{,}41;0)$

$-$ Si $x = 2 \rightarrow y = 2 - 2^2 = -2 \rightarrow$ la parábola acaba en $(2,-2)$

- Sí $x \geq 2$

$g(x) = \frac{x}{2} - 3$ (recta)

x	y
2	-2
4	-1



c) $h(x)=\begin{cases}\log_2 x & 0<x\le 2\\ 5 & 2<x<5\\ \dfrac{x-1}{2} & x>5\end{cases}$

- Sí $0<x\le 2$

  $h(x)=\log_2 x$ (función logarítmica)

x	y
1/2	-1
2	1

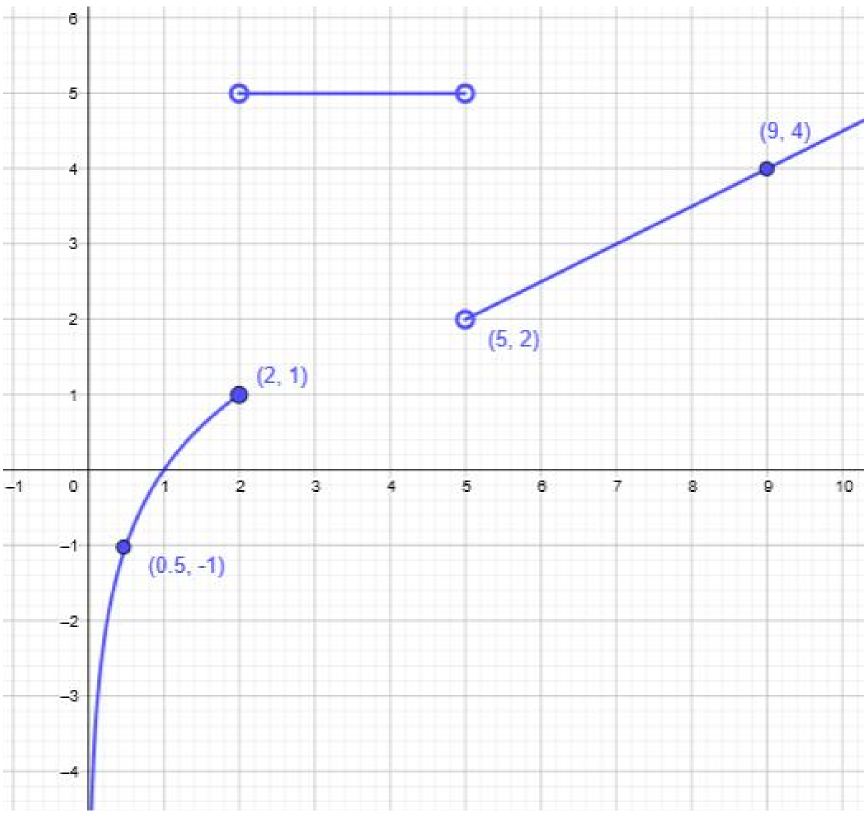
- Sí $2<x<5$

  $h(x)=5$ (función constante)

- Sí $x>5$

  $h(x)=\dfrac{x-1}{2}$ (recta)

x	y
5	2
9	4



d) $i(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x<0\\ \sqrt{x} & 0\le x<4\\ x^2-1 & x\ge 4\end{cases}$

- Sí $x<0$

  $i(x)=\dfrac{1}{x}$ (función de proporcionalidad inversa)

x	y
-1	-1
-1/2	-2

- Sí $0\le x<4$

  $i(x)=\sqrt{x}$ (función raíz cuadrada)

x	y
0	0
4	2

- Sí $x\ge 4$

  $i(x)=x^2-1$ (parábola)

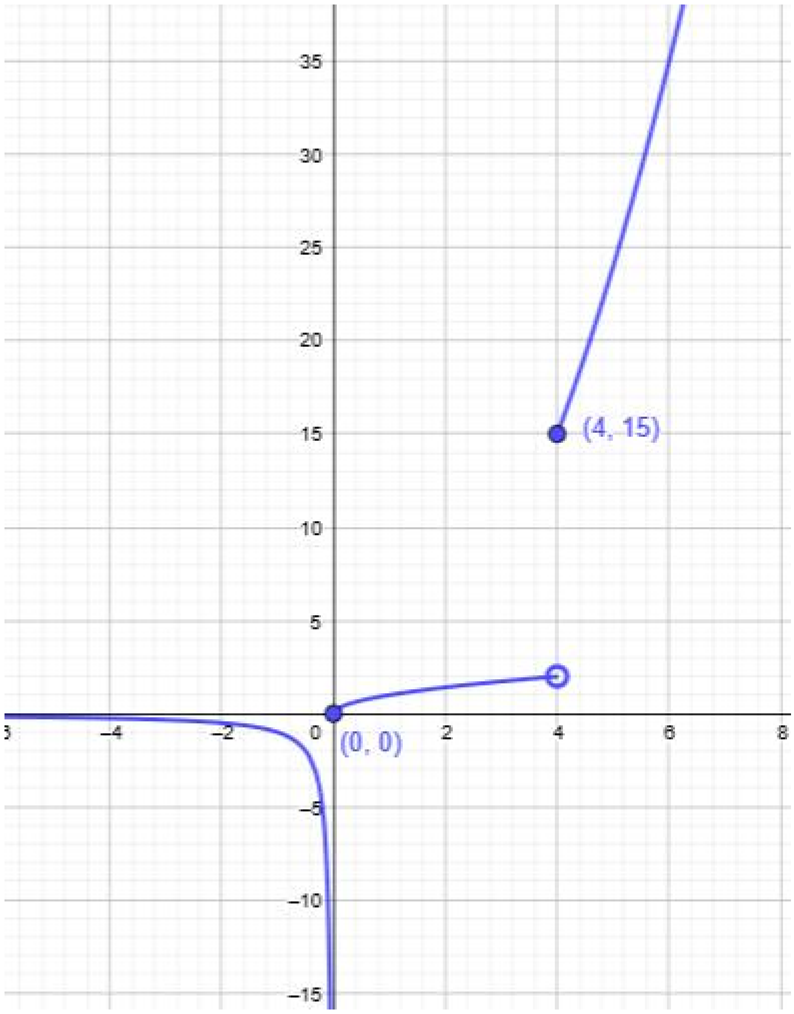
  – Forma : $a=1>0 \rightarrow$ cónvexa

  – Vértice $\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{0}{2}=0\\ y=0^2-1=-1\end{array}\right\}$ $(0,-1)$

  – Corte con el eje y $\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=0^2-1=-1\end{array}\right\}$ $(0,-1)$

  – Cortes con el eje x $\left\{\begin{array}{l} y=0\\ 0=x^2-1 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1\end{array}\right\}$ $(1,0)$ $(-1,0)$

  – Si $x=4 \rightarrow y=4^2-1=15 \rightarrow$ la parábola empieza en $(4,15)$



Volver a los enunciados

2 Dadas las funciones: $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$, $g(x)=x^2-1$ y $h(x)=\sqrt{1+x}$ realiza las composiciones siguientes:

a) $f\circ g$ **b)** $g\circ h$ **c)** $h\circ f$ **d)** $f\circ f$

A la vista de los resultados obtenidos, ¿puedes encontrar un par de funciones que sean inversas una de la otra?. Justifica tu respuesta.

Solución.

a) $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f[x^2-1]=\dfrac{x^2-1}{2(x^2-1)+1}=\dfrac{x^2-1}{2x^2-2+1}=\dfrac{x^2-1}{2x^2-1}$

b) $(g\circ h)(x)=g[h(x)]=g\left[\sqrt{1+x}\right]=\left(\cancel{\sqrt{\ }}1+x\right)^{\cancel{2}}-1=1+x-1=x$

c) $(h\circ f)(x)=h[f(x)]=h\left[\dfrac{x}{2x+1}\right]=\sqrt{1+\dfrac{x}{2x+1}}=\sqrt{\dfrac{2x+1}{2x+1}+\dfrac{x}{2x+1}}=\sqrt{\dfrac{3x+1}{2x+1}}$

d) $(f\circ f)(x)=f[f(x)]=f\left[\dfrac{x}{2x+1}\right]=\dfrac{\dfrac{x}{2x+1}}{2\cdot\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)+1}=\dfrac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{2x}{2x+1}+1}=\dfrac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{2x}{2x+1}+\dfrac{2x+1}{2x+1}}=$

$$=\dfrac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{4x+1}{2x+1}}=\dfrac{x\cancel{(2x+1)}}{\cancel{(2x+1)}(4x+1)}=\dfrac{x}{4x+1}$$

Vemos en el apartado b que al componer las funciones h y g resulta la función $(g\circ h)(x)=x$ lo cual significa que son inversas.

Volver a los enunciados

3 Calcula las inversas de las funciones siguientes:

a) $f(x)=2x^2-3$ **b)** $g(x)=\dfrac{3x}{x-1}$ **c)** $h(x)=2^{\frac{x}{3}-1}$ **d)** $i(x)=1+\log_3 x$

Solución.

En cada una de ellas sustituimos el "nombre" de la función por y. Posteriormente despejamos x.

a) $f(x)=2x^2-3$

$$y=2x^2-3 \rightarrow y+3=2x^2 \rightarrow \frac{y+3}{2}=x^2 \rightarrow \sqrt{\frac{y+3}{2}}=x$$

Por tanto $f^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$

b) $g(x)=\dfrac{3x}{x-1}$

$$y=\frac{3x}{x-1} \rightarrow y\cdot(x-1)=3x \rightarrow yx-y=3x \rightarrow yx-3x=y \rightarrow (y-3)x=y \rightarrow x=\frac{y}{y-3}$$

Por tanto $g^{-1}(x)=\dfrac{x}{x-3}$

c) $h(x)=2^{\frac{x}{3}-1}$

$$y=2^{\frac{x}{3}-1} \rightarrow \log y=\log 2^{\frac{x}{3}-1} \rightarrow \log y=\left(\frac{x}{3}-1\right)\log 2 \rightarrow \frac{\log y}{\log 2}=\frac{x}{3}-1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\log y}{\log 2}+1=\frac{x}{3} \rightarrow 3\cdot\left(\frac{\log y}{\log 2}+1\right)=x$$

Por tanto $h^{-1}(x)=3\left(\dfrac{\log x}{\log 2}+1\right)$

d) $i(x)=1+\log_3 x$

$$y=1+\log_3 x \rightarrow y-1=\log_3 x \rightarrow 3^{y-1}=x$$

Por tanto $i^{-1}(x)=3^{x-1}$

Volver a los enunciados