1 Calcula de forma razonada los dominios de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

b) $y = e^{\frac{1}{x^2+2x+3}}$

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4x-5}}$

d) $y = \dfrac{3x-1}{x^2-5x+6}$

e) $y = \sqrt{\dfrac{2-x}{x^2-6x+8}}$

f) $y = \log_2(x^2+3x+4)$

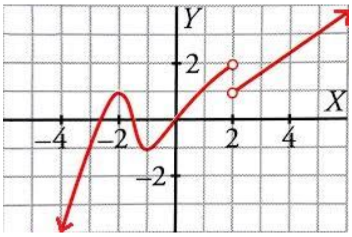
g) $y = \sqrt{-x^2+4x}$

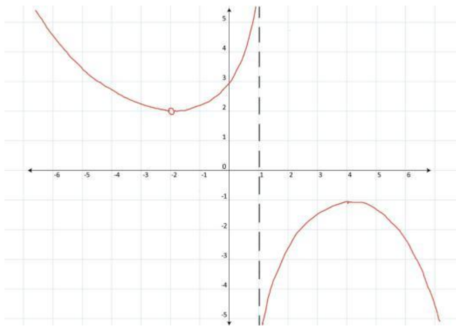
h) $y = \dfrac{-5x}{\sqrt[5]{2x-4x^2}}$

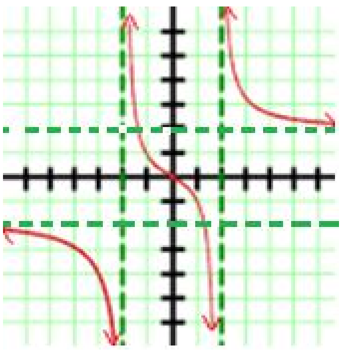
i) $y = Ln(6x^2-x-2)$

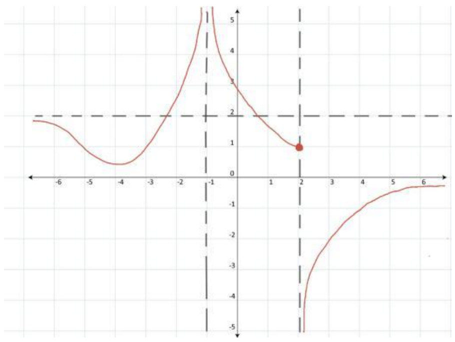
Solución.

2 Observa las siguientes gráficas de funciones y calcula sus dominios y sus rangos:

a) 

c) 

b) 

d) 

Solución.

1 Calcula de forma razonada los dominios de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

b) $y = e^{\frac{1}{x^2+2x+3}}$

c) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4x-5}}$

d) $y = \frac{3x-1}{x^2-5x+6}$

e) $y = \sqrt{\frac{2-x}{x^2-6x+8}}$

f) $y = \log_2(x^2+3x+4)$

g) $y = \sqrt{-x^2+4x}$

h) $y = \frac{-5x}{\sqrt[5]{2x-4x^2}}$

i) $y = Ln(6x^2-x-2)$

Solución.

a) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

El denominador de esta fracción no puede ser 0.

$$(x-2)^2 = 0 \;\rightarrow\; x-2=0 \;\rightarrow\; x=2$$

Por tanto $Dom = IR - \{2\}$

b) $y = e^{\frac{1}{x^2+2x+3}}$

La función tiene una fracción, cuyo denominador no puede ser 0.

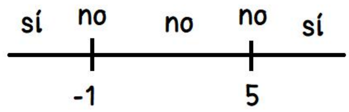
$$x^2+2x+3=0 \;\rightarrow\; x = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot3}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2}$$

Vemos que el denominador no se anula, por tanto $Dom = IR$

c) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4x-5}}$

Para poder calcular la raíz, el radicando tiene que ser mayor o igual que 0. Pero como después tenemos que hacer la división, el radicando no puede ser 0, ya que en ese caso, estaríamos dividiendo entre 0, lo cual no es posible. En conclusión, el radicando debe ser mayor que 0:

$$x^2-4x-5>0 \;\rightarrow\; x^2-4x-5=0 \quad \begin{cases} x=5 \\ x=-1 \end{cases}$$



$$x=-6 \;\rightarrow\; 36+24-5>0 \;\rightarrow\; 55>0 \text{ sí}$$

$$x=0 \;\rightarrow\; 0+0-5>0 \;\rightarrow\; -5>0 \text{ no}$$

$$x=6 \;\rightarrow\; 36-24-5>0 \;\rightarrow\; 7>0 \text{ sí}$$

Por tanto $\text{Dom}=(-\infty,-1)\cup(5,\infty)$

d) $y=\dfrac{3x-1}{x^2-5x+6}$

El denominador de esta fracción no puede ser 0.

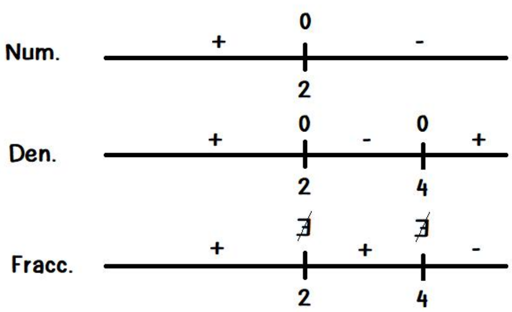
$$x^2-5x+6=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases}$$

Por tanto $\text{Dom}=\mathbb{R}-\{2,3\}$

e) $y=\sqrt{\dfrac{2-x}{x^2-6x+8}}$

Para poder calcular la raíz, el radicando tiene que ser mayor o igual que 0.

$$\frac{2-x}{x^2-6x+8}\geq 0 \quad \begin{cases} \text{Num.} \quad 2-x=0 \;\rightarrow\; x=2 \\ \text{Den.} \quad x^2-6x+8=0 \;\rightarrow\; x=2 \quad x=4 \end{cases}$$



Por tanto $Dom = (-\infty, 2) \cup (2, 4)$

f) $y = \log_2(x^2 + 3x + 4)$

Para poder calcular el logaritmo, el argumento tiene que ser mayor que 0.

$x^2 + 3x + 4 > 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 3x + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad$ no tiene solución real

sí

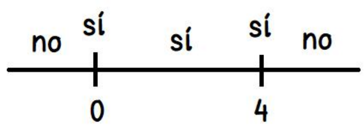
$$x = 0 \quad \rightarrow \quad 0 + 0 + 4 > 0 \quad \rightarrow \quad 4 > 0 \text{ sí}$$

Por tanto $Dom = \mathbb{R}$

g) $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$

Para poder calcular la raíz, el radicando tiene que ser mayor o igual que 0.

$-x^2 + 4x \geq 0 \quad \rightarrow \quad -x^2 + 4x = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$



$x = -1 \quad \rightarrow \quad -1 - 4 \geq 0 \quad \rightarrow \quad -5 \geq 0$ no

$x = 1 \quad \rightarrow \quad -1 + 4 \geq 0 \quad \rightarrow \quad 3 \geq 0$ sí

$x = 5 \quad \rightarrow \quad -25 + 20 \geq 0 \quad \rightarrow \quad -5 \geq 0$ no

Por tanto $Dom = [0, 4]$

h) $y = \dfrac{-5x}{\sqrt[5]{2x - 4x^2}}$

La raíz quinta no presenta ningún problema porque al ser el índice impar siempre se puede calcular. Después tenemos que hacer la división, por lo que el radicando no puede ser 0, ya que en ese caso estaríamos dividiendo entre 0, lo cual no es posible. Veamos entonces cuándo el radicando es 0:

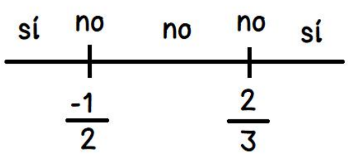
$$2x-4x^2=0 \;\rightarrow\; 2x\cdot(1-2x)=0 \begin{cases} 2x=0 \;\rightarrow\; x=0 \\ 1-2x=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto $\text{Dom}=\mathbb{R}-\left\{0,\dfrac{1}{2}\right\}$

i) $y=\text{Ln}(6x^2-x-2)$

Para poder calcular el logaritmo, el argumento tiene que ser mayor que 0.

$$6x^2-x-2>0 \;\rightarrow\; 6x^2-x-2=0 \;\rightarrow\; x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot6\cdot(-2)}}{12}=\frac{1\pm7}{12}\begin{cases} \dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{-6}{12}=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$$



$$x=-1 \;\rightarrow\; 6+1-2>0 \;\rightarrow\; 5>0 \text{ sí}$$

$$x=0 \;\rightarrow\; 0-0-2>0 \;\rightarrow\; -2>0 \text{ no}$$

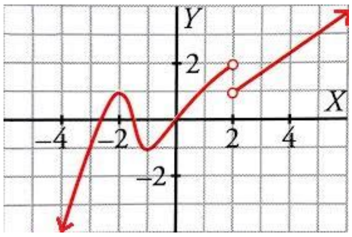
$$x=1 \;\rightarrow\; 6-1-2>0 \;\rightarrow\; 3>0 \text{ sí}$$

Por tanto $\text{Dom}=\left(-\infty,\dfrac{-1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{2}{3},\infty\right)$

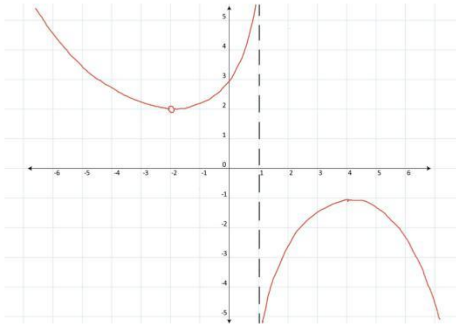
Volver a los enunciados

2 Observa las siguientes gráficas de funciones y calcula sus dominios y sus rangos:

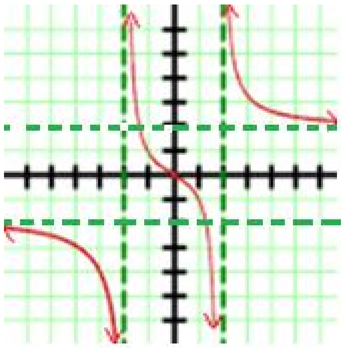
a)



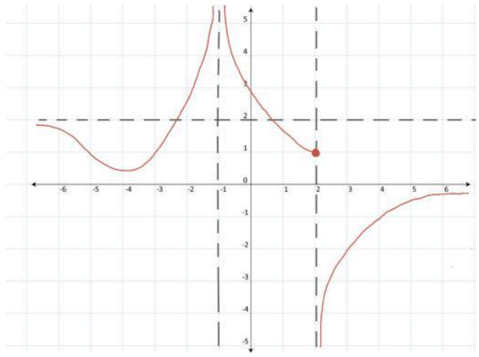
c)



b)



d)



Solución.

a) $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{2\}$ $\qquad$ $\text{Ran} = \mathbb{R}$

b) $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{-2,2\}$ $\qquad$ $\text{Ran} = \mathbb{R}$

c) $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{-2,1\}$ $\qquad$ $\text{Ran} = (-\infty,-1] \cup (2,\infty)$

d) $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{-1\}$ $\qquad$ $\text{Ran} = (-\infty,0) \cup [0.5,\infty)$

Volver a los enunciados

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

x^2+2x+4 no se puede factorizar

$$4-x^2=(2+x)(2-x)$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{4-x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(2-x)(2+x)}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{-\cancel{(x-2)}(2+x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+2x+4)}{-(2+x)}=\frac{12}{-4}=-3$$

z) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3x-1}{x^2+5x}\right)^x=1^\infty$ IND

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x-1}{x^2+5x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x-1}{x^2+5x}-1\right)\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x-1}{x^2+5x}-\frac{x^2+5x}{x^2+5x}\right)\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-8x-1}{x^2+5x}\right)\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-8x^2-x}{x^2+5x}\right)}=e^{-8}$$

Volver a los enunciados