

# UNIDAD 4. FUNCIONES.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. 1º BAC  
 PROFESOR: PABLO TRASHORRAS

## U4. FUNCIONES

- 4.1 Definición de función.
- 4.2 Dominio y recorrido.
- 4.3 Funciones lineales.
- 4.4 Funciones cuadráticas.
- 4.5 Función de proporcionalidad inversa.
- 4.6 Función raíz.
- 4.7 Funciones exponenciales.
- 4.8 Funciones logarítmicas.
- 4.9 Funciones trigonométricas.
- 4.10 Funciones definidas a trozos.
- 4.11 Función valor absoluto.
- 4.12 Composición de funciones.
- 4.13 Función inversa o recíproca.

## U4. FUNCIONES.

### 4.2 DOMINIO Y RECORRIDO.

- Dominio de una función.

Supongamos que tenemos la función:  $f(x) = \frac{5x - 1}{x^2 - 3x}$

La imagen del 1 será:  $f(1) = \frac{5 \cdot 1 - 1}{1^2 - 3 \cdot 1} = \frac{4}{-2} = -2$

La imagen del -2 será:  $f(-2) = \frac{5 \cdot (-2) - 1}{(-2)^2 - 3 \cdot (-2)} = \frac{-11}{10}$

La imagen del 0 será:  $f(0) = \frac{5 \cdot 0 - 1}{0^2 - 3 \cdot 0} = \frac{-1}{0}$  **No existe**

Llamamos dominio de una función (Dom) al conjunto de valores de x que tienen imagen.

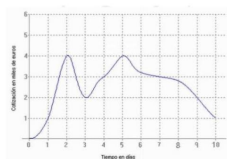
## U4. FUNCIONES

### 4.1 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN.

- Una función es una correspondencia mediante la cual a cada valor de la variable dependiente x se le asocia un único valor f(x).
- Una función puede venir dada de las siguientes formas:
  - Mediante su expresión analítica.

$$f(x) = x^2 - 5x \quad g(x) = \log(3x - 1) \quad y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

- Mediante su gráfica.



## U4. FUNCIONES

Existen tres tipos de funciones que presentan "problemas" a la hora de estudiar su dominio.

- Las fracciones.

$$f(x) = \frac{5x - 1}{x^2 - 3x}$$

Un punto tendrá imagen si el denominador no se anula.

- Las raíces de índice par.

$$g(x) = \sqrt{3x - 5}$$

Un punto tendrá imagen si el radicando es mayor o igual a cero.

- Los logaritmos.

$$h(x) = \log_3(5x^3 - 1)$$

Un punto tendrá imagen si el argumento es mayor que cero.

## U4. FUNCIONES

- 4.1 Definición de función.
- 4.2 Dominio y recorrido.
- 4.3 Funciones lineales.
- 4.4 Funciones cuadráticas.
- 4.5 Función de proporcionalidad inversa.
- 4.6 Función raíz.
- 4.7 Funciones exponenciales.
- 4.8 Funciones logarítmicas.
- 4.9 Funciones trigonométricas.
- 4.10 Funciones definidas a trozos.
- 4.11 Función valor absoluto.
- 4.12 Composición de funciones.
- 4.13 Función inversa o recíproca.

## U4. FUNCIONES

### Ejercicio 2 pág 111

- 2 Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a)  $y = \sqrt{x^2 - 1}$

b)  $y = \sqrt{x - 1}$

c)  $y = \sqrt{1 - x}$

d)  $y = \sqrt{4 - x^2}$

e)  $y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$

f)  $y = 1/\sqrt{x^2 - 1}$

g)  $y = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$

h)  $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x}}$

i)  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4 - x^2}}$

j)  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$

k)  $y = x^3 - 2x + 3$

l)  $y = \frac{1}{x}$

m)  $y = \frac{1}{x^2}$

n)  $y = \frac{1}{x^2 - 4}$

ñ)  $y = \frac{1}{x^2 + 4}$

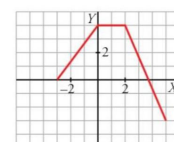
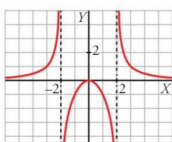
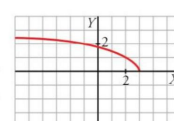
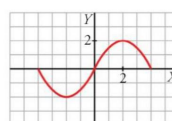
o)  $y = \frac{1}{x^3 + 1}$

- p) El área de un círculo de radio variable, r, es  $A = \pi r^2$ .

## U4. FUNCIONES

Si tenemos la gráfica de la función, también podemos calcular el dominio.

Ejemplos:



Dom =  $\mathbb{R} - \{2\}$

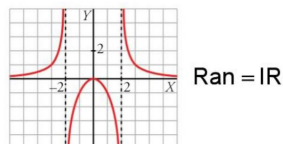
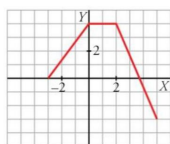
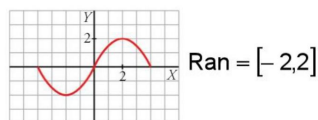
Dom =  $[-2, 3]$

#### U4. FUNCIONES

- Recorrido (o rango) de una función.

Llamamos recorrido o rango de una función (Ran) al conjunto formado por todas las imágenes de la función.

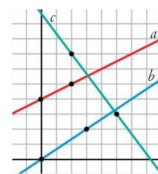
Veremos cómo calcularlo sobre la gráfica de una función.



#### U4. FUNCIONES

##### Ejemplos:

Calcula las ecuaciones de las siguientes rectas:



##### Recta a

$$A = (0, 4) \quad B = (2, 5) \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}} \right\} m = \frac{5-4}{2-0} = \frac{1}{2}$$

$$A = (0, 4) \quad \left. \vphantom{A} \right\} m = \frac{1}{2} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} A \\ m \end{matrix}} \right\} y = 4 + \frac{1}{2}(x-0) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4$$



#### U4. FUNCIONES

- 4.1 Definición de función.
- 4.2 Dominio y recorrido.
- 4.3 Funciones lineales.
- 4.4 Funciones cuadráticas.
- 4.5 Función de proporcionalidad inversa.
- 4.6 Función raíz.
- 4.7 Funciones exponenciales.
- 4.8 Funciones logarítmicas.
- 4.9 Funciones trigonométricas.
- 4.10 Funciones definidas a trozos.
- 4.11 Función valor absoluto.
- 4.12 Composición de funciones.
- 4.13 Función inversa o recíproca.



#### U4. FUNCIONES

- 4.1 Definición de función.
- 4.2 Dominio y recorrido.
- 4.3 Funciones lineales.
- 4.4 Funciones cuadráticas.
- 4.5 Función de proporcionalidad inversa.
- 4.6 Función raíz.
- 4.7 Funciones exponenciales.
- 4.8 Funciones logarítmicas.
- 4.9 Funciones trigonométricas.
- 4.10 Funciones definidas a trozos.
- 4.11 Función valor absoluto.
- 4.12 Composición de funciones.
- 4.13 Función inversa o recíproca.



#### U4. FUNCIONES

##### 4.3 FUNCIONES LINEALES.

Una función lineal será de la forma:

$$f(x) = mx + n \quad m, n \in \mathbb{R}$$

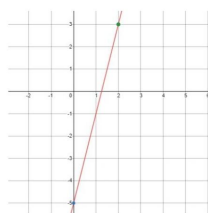
- $m$  → pendiente
- $n$  → ordenada en el origen

Su gráfica es una recta. Para representarla usamos una tabla de valores.

Ejemplo:

$$f(x) = 4x - 5$$

x	y
0	-5
2	3



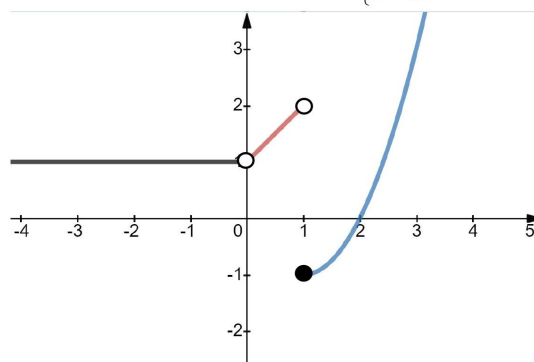
Dom = IR  
Ran = IR



#### U4. FUNCIONES

##### 4.10 FUNCIONES A TROZOS.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

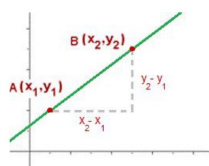


#### U4. FUNCIONES

- Pendiente de una recta conocidos dos puntos por los que pasa.

Dados dos puntos  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$  de una recta, la pendiente se puede calcular:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



- Ecuación de una recta conocido un punto y su pendiente.

Si  $A(x_0, y_0)$  es un punto de una recta y  $m$  es la pendiente de la misma, la ecuación de dicha recta será:

$$y = y_0 + m \cdot (x - x_0)$$



#### U4. FUNCIONES

##### Ejercicios 21 y 22 pág 130

21 Representa.

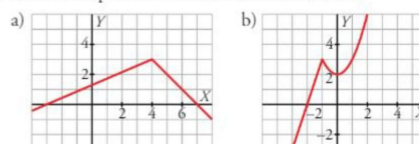
$$a) y = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 2 \\ -x+6 & \text{si } 2 \leq x < 7 \\ 3 & \text{si } x \geq 7 \end{cases} \quad b) y = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x^2-2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

[Solución a](#)

[Solución b](#)

[Solución c](#)

22 Obtén la expresión analítica de estas funciones:



#### U4. FUNCIONES

- 4.1 Definición de función.
- 4.2 Dominio y recorrido.
- 4.3 Funciones lineales.
- 4.4 Funciones cuadráticas.
- 4.5 Función de proporcionalidad inversa.
- 4.6 Función raíz.
- 4.7 Funciones exponenciales.
- 4.8 Funciones logarítmicas.
- 4.9 Funciones trigonométricas.
- 4.10 Funciones definidas a trozos.
- 4.11 Función valor absoluto.
- 4.12 Composición de funciones.
- 4.13 Función inversa o recíproca.



#### U4. FUNCIONES

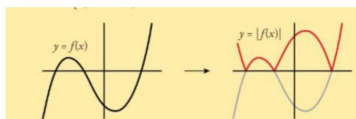
##### 4.11 FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO.

Se llama función valor absoluto a la siguiente:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto de una función sería:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$



#### U4. FUNCIONES

- 4.1 Definición de función.
- 4.2 Dominio y recorrido.
- 4.3 Funciones lineales.
- 4.4 Funciones cuadráticas.
- 4.5 Función de proporcionalidad inversa.
- 4.6 Función raíz.
- 4.7 Funciones exponenciales.
- 4.8 Funciones logarítmicas.
- 4.9 Funciones trigonométricas.
- 4.10 Funciones definidas a trozos.
- 4.11 Función valor absoluto.
- 4.12 Composición de funciones.
- 4.13 Función inversa o recíproca.



#### U4. FUNCIONES

##### 4.12 COMPOSICIÓN DE FUNCIONES.

Supongamos que tenemos dos funciones:

$$f(x) = x^2 - 5x$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$x \xrightarrow{f(x)} x^2 - 5x \xrightarrow{g(x)} \sqrt{x^2 - 5x}$$

La función que resulta después de aplicar las dos funciones anteriores se llama función compuesta de f y g. Se representa:  $g \circ f$

$$\text{En nuestro caso: } (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$$



#### U4. FUNCIONES

##### Ejemplos:

Dadas las funciones f y g:  $f(x) = x^2 - x$   $g(x) = \frac{4}{x+1}$  Calcula:

- a)  $g \circ f$     b)  $f \circ g$     c)  $f \circ f$     d)  $g \circ g$

$$\text{a) } (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x^2 - x] = \frac{4}{x^2 - x + 1}$$

$$\text{b) } (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\frac{4}{x+1}\right] = \left(\frac{4}{x+1}\right)^2 - \frac{4}{x+1} = \frac{12 - 4x}{(x+1)^2}$$

$$\text{c) } (f \circ f)(x) = f[f(x)] = f[x^2 - x] = (x^2 - x)^2 - (x^2 - x) = x^4 - 2x^3 + x$$

$$\text{d) } (g \circ g)(x) = g[g(x)] = g\left[\frac{4}{x+1}\right] = \frac{4}{\frac{4}{x+1} + 1} = \frac{4x+4}{x+5}$$



#### U4. FUNCIONES

##### Ejercicios 1 y 2 pág 136

1 Si  $f(x) = x^2 - 5x + 3$  y  $g(x) = x^2$ , obtén las expresiones de  $f[g(x)]$  y  $g[f(x)]$ .

Halla  $f[g(4)]$  y  $g[f(4)]$ .

2 Si  $f(x) = \sqrt{x}$  y  $g(x) = x + 4$ , obtén las expresiones de  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $f \circ f$  y  $g \circ g$ .

Halla el valor de estas funciones en  $x = 0$  y  $x = 5$ .



#### U4. FUNCIONES

- 4.1 Definición de función.
- 4.2 Dominio y recorrido.
- 4.3 Funciones lineales.
- 4.4 Funciones cuadráticas.
- 4.5 Función de proporcionalidad inversa.
- 4.6 Función raíz.
- 4.7 Funciones exponenciales.
- 4.8 Funciones logarítmicas.
- 4.9 Funciones trigonométricas.
- 4.10 Funciones definidas a trozos.
- 4.11 Función valor absoluto.
- 4.12 Composición de funciones.
- 4.13 Función inversa o recíproca.



#### U4. FUNCIONES

##### 4.13 FUNCIÓN INVERSA O RECÍPROCA.

Observa qué ocurre cuando componemos estas dos funciones:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad g(x) = \frac{1+x}{x}$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\frac{1+x}{x}\right] = \frac{1}{\frac{1+x}{x} - 1} = \frac{1}{\frac{1+x-x}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left[\frac{1}{x-1}\right] = \frac{1 + \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{\frac{x-1+1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{x}{\frac{1}{x-1}} = \frac{x-1}{1} = x$$



En este caso diremos que la función  $g(x)$  es la inversa (o recíproca) de  $f(x)$  y la representamos por  $f^{-1}(x)$

- ¿Cómo calcular la inversa de  $f(x)$ ?

$$f(x) = 3x - 1 \rightarrow y = 3x - 1$$

Despejamos  $x$ :

$$y = 3x - 1 \rightarrow y + 1 = 3x \rightarrow \frac{y + 1}{3} = x$$

La función inversa de  $f(x)$  será:

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{3}$$



### Ejercicios 10 y 12 pág 150

- 10** Halla la función inversa de las siguientes funciones:

a)  $y = 3x - 2$

b)  $y = \frac{x + 3}{2}$

c)  $y = \sqrt{2x + 1}$

d)  $y = 1 + 2^x$

e)  $y = 2 + \log_3 x$

f)  $y = 4 - x^2$

- 12** Comprueba si cada par de funciones son una inversa de la otra. Para ello calcula  $f \circ f^{-1}$  o bien  $f^{-1} \circ f$ :

a)  $f(x) = \frac{1}{x + 2}$ ;  $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 2$

b)  $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ ;  $f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 2}{3}$

c)  $f(x) = 1 + \log_2 \frac{x}{3}$ ;  $f^{-1}(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$

