UNIDAD 4. FUNCIONES.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. 1º BAC

PROFESOR: PABLO TRASHORRAS

4.1 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN.

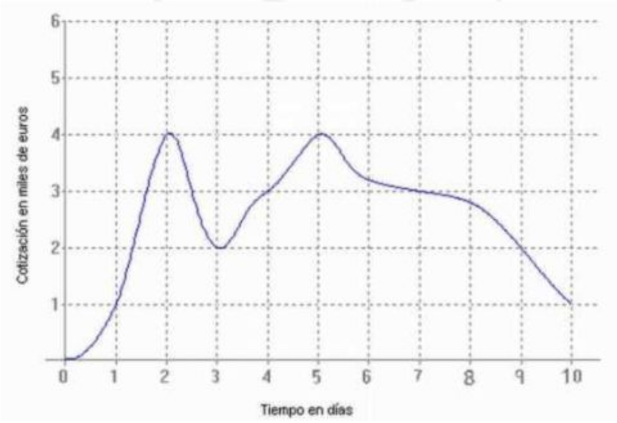
- Una función es una correspondencia mediante la cual a cada valor de la variable dependiente x se le asocia un único valor f(x).

- Una función puede venir dada de las siguientes formas:

  - Mediante su expresión analítica.

$$f(x) = x^2 - 5x \qquad g(x) = \log(3x-1) \qquad y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

  - Mediante su gráfica.



4.2 DOMINIO Y RECORRIDO.

- Dominio de una función.

Supongamos que tenemos la función: $f(x)=\dfrac{5x-1}{x^2-3x}$

La imagen del 1 será: $f(1)=\dfrac{5\cdot 1-1}{1^2-3\cdot 1}=\dfrac{4}{-2}=-2$

La imagen del -2 será: $f(-2)=\dfrac{5\cdot(-2)-1}{(-2)^2-3\cdot(-2)}=\dfrac{-11}{10}$

La imagen del 0 será: $f(0)=\dfrac{5\cdot 0-1}{0^2-3\cdot 0}=\dfrac{-1}{0}$ No existe

Llamamos dominio de una función (Dom) al conjunto de valores de x que tienen imagen.

Existen tres tipos de funciones que presentan "problemas" a la hora de estudiar su dominio.

- Las fracciones.

$$f(x)=\frac{5x-1}{x^2-3x}$$

Un punto tendrá imagen si el denominador no se anula.

- Las raíces de índice par.

$$g(x)=\sqrt{3x-5}$$

Un punto tendrá imagen si el radicando es mayor o igual a cero.

- Los logaritmos.

$$h(x)=\log_3\left(5x^3-1\right)$$

Un punto tendrá imagen si el argumento es mayor que cero.

Ejercicio 2 pág 111

2 Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

b) $y = \sqrt{x - 1}$

c) $y = \sqrt{1 - x}$

d) $y = \sqrt{4 - x^2}$

e) $y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$

f) $y = 1/\sqrt{x^2 - 1}$

g) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$

h) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$

i) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4 - x^2}}$

j) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$

k) $y = x^3 - 2x + 3$

l) $y = \dfrac{1}{x}$

m) $y = \dfrac{1}{x^2}$

n) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

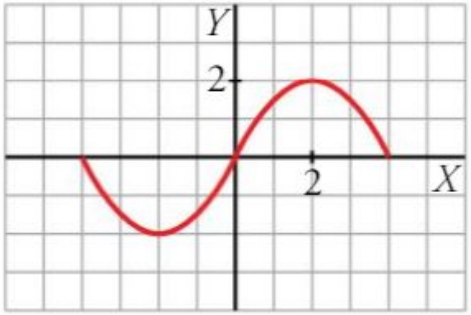
ñ) $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$

o) $y = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

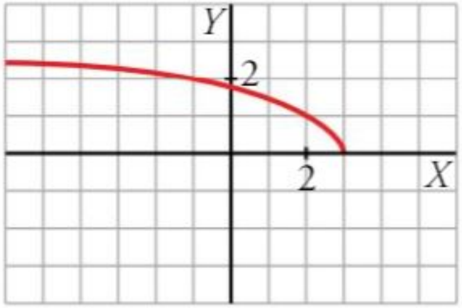
p) El área de un círculo de radio variable, r, es $A = \pi r^2$.

Si tenemos la gráfica de la función, también podemos calcular el dominio.

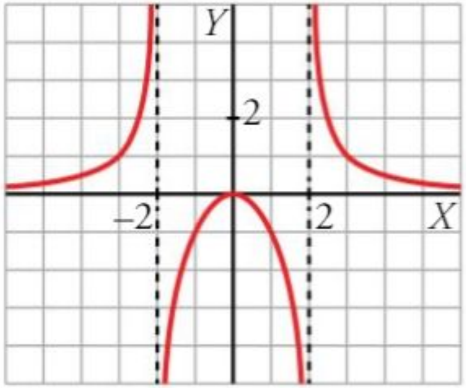
Ejemplos:



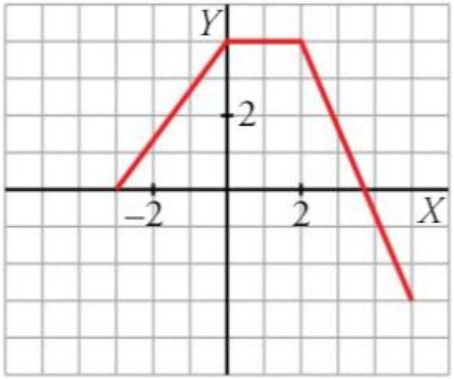
$\text{Dom} = [-4,4]$



$\text{Dom} = (-\infty,3]$



$\text{Dom} = \mathbb{R} - \{-2,2\}$

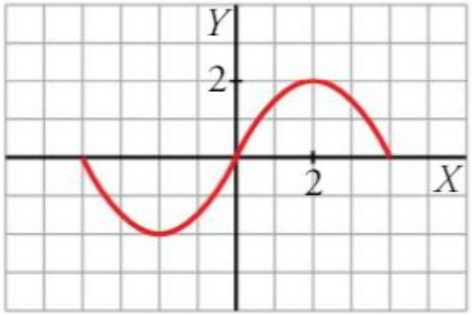


$\text{Dom} = [-3,5]$

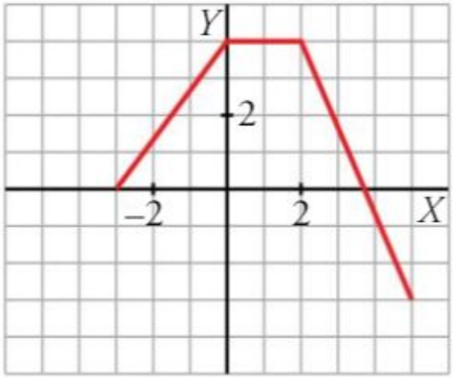
- <u>Recorrido (o rango) de una función.</u>

  Llamamos recorrido o rango de una función (Ran) al conjunto formado por todas las imágenes de la función.

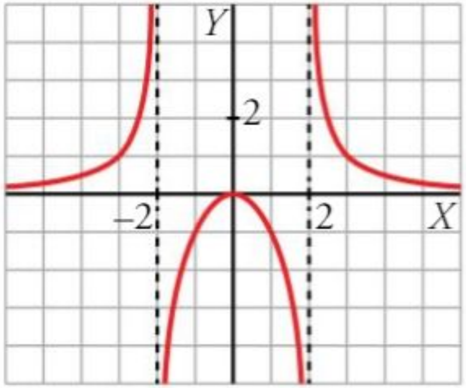
  Veremos cómo calcularlo sobre la gráfica de una función.



$\text{Ran} = [-2,2]$



$\text{Ran} = [-3,4]$



$\text{Ran} = \mathbb{R}$

4.3 FUNCIONES LINEALES.

Una función lineal será de la forma:

$$f(x) = mx + n \qquad m, n \in IR$$

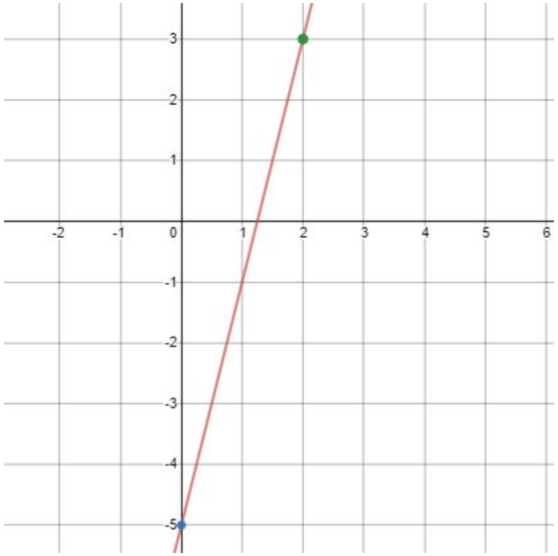
- m → pendiente
- n → ordenada en el origen

Su gráfica es una recta. Para representarla usamos una tabla de valores.

Ejemplo:

$$f(x) = 4x - 5$$

x	y
0	-5
2	3



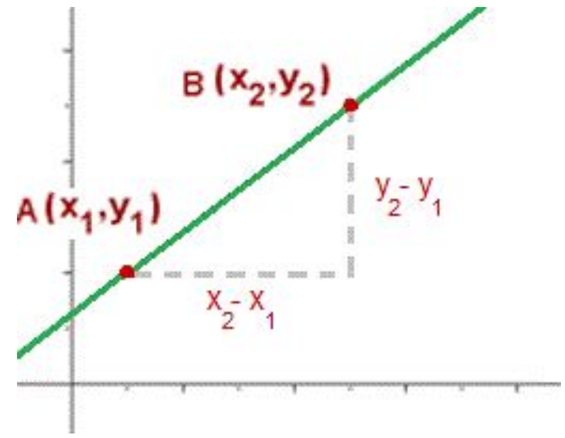
$$Dom = IR$$

$$Ran = IR$$

- Pendiente de una recta conocidos dos puntos por los que pasa.

Dados dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ de una recta, la pendiente se puede calcular:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$



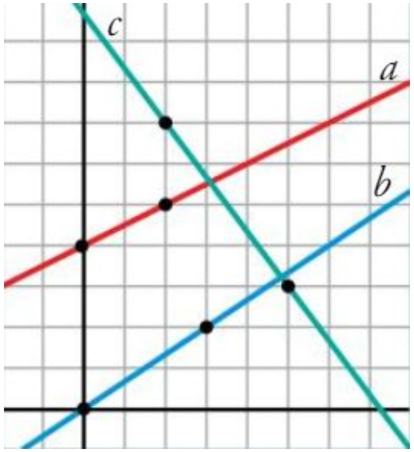
- Ecuación de una recta conocido un punto y su pendiente.

Si $A(x_0, y_0)$ es un punto de una recta y m es la pendiente de la misma, la ecuación de dicha recta será:

$$\boxed{y = y_0 + m \cdot (x - x_0)}$$

Ejemplos:

Calcula las ecuaciones de las siguientes rectas:



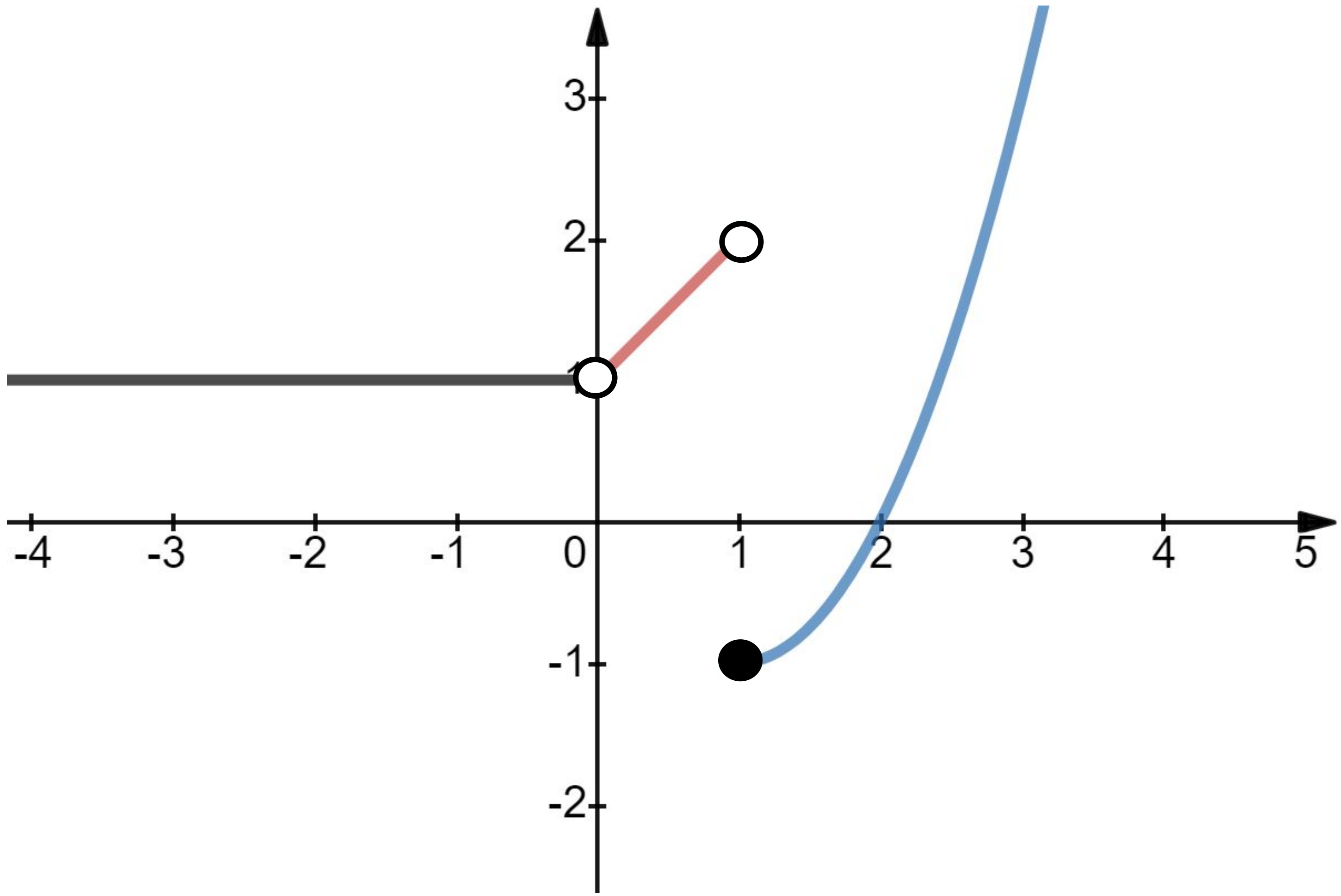
Recta a

$$\left.\begin{array}{l} A=(0,4) \\ B=(2,5) \end{array}\right\} \quad m=\frac{5-4}{2-0}=\frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} A=(0,4) \\ m=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad y=4+\frac{1}{2}(x-0) \longrightarrow y=\frac{1}{2}x+4$$

4.10 FUNCIONES A TROZOS.

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x<0\\ x+1 & \text{si} \quad 0<x<1\\ x^2-2x & \text{si} \quad 1\leq x\end{cases}$$



Ejercicios 21 y 22 pág 130

21 Representa.

a) $y = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 2 \\ -x+6 & \text{si } 2 \le x < 7 \\ 3 & \text{si } x \ge 7 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x \le -1 \\ 2x^2-2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x \le 0 \\ -\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

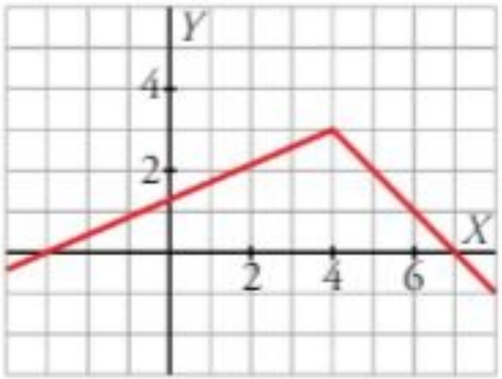
Solución a

Solución b

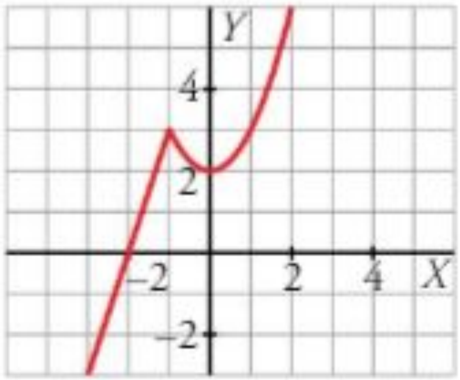
Solución c

22 Obtén la expresión analítica de estas funciones:

a)



b)



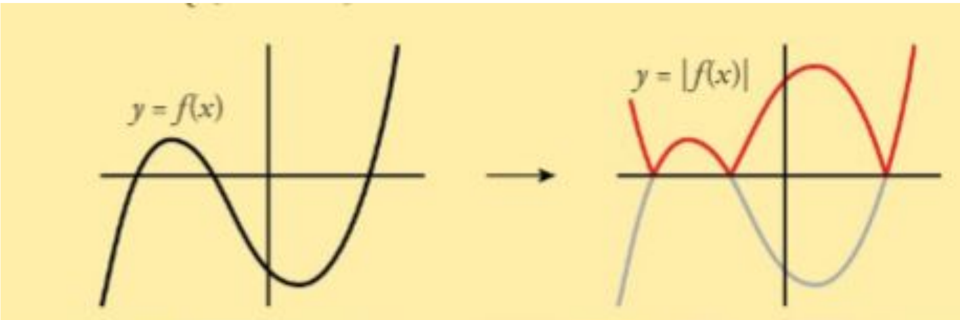
4.11 FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO.

Se llama función valor absoluto a la siguiente:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto de una función sería:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$



4.12 COMPOSICIÓN DE FUNCIONES.

Supongamos que tenemos dos funciones:

$$f(x) = x^2 - 5x$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$x \xrightarrow{f(x)} x^2 - 5x \xrightarrow{g(x)} \sqrt{x^2 - 5x}$$

La función que resulta después de aplicar las dos funciones anteriores se llama función compuesta de f y g. Se representa: $g \circ f$

En nuestro caso: $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

Ejemplos:

Dadas las funciones f y g: $f(x)=x^2-x$ $\quad g(x)=\dfrac{4}{x+1}$ Calcula:

a) $g\circ f$ **b)** $f\circ g$ **c)** $f\circ f$ **d)** $g\circ g$

$$\textbf{a)}\ (g\circ f)(x)=g[f(x)]=g[x^2-1]=\frac{4}{x^2-x+1}$$

$$\textbf{b)}\ (f\circ g)(x)=f[g(x)]=f\left[\frac{4}{x+1}\right]=\left(\frac{4}{x+1}\right)^2-\frac{4}{x+1}=\frac{12-4x}{(x+1)^2}$$

$$\textbf{c)}\ (f\circ f)(x)=f[f(x)]=f[x^2-x]=(x^2-x)^2-(x^2-x)=x^4-2x^3+x$$

$$\textbf{d)}\ (g\circ g)(x)=g[g(x)]=g\left[\frac{4}{x+1}\right]=\frac{4}{\dfrac{4}{x+1}+1}=\frac{4x+4}{x+5}$$

Ejercicios 1 y 2 pág 136

1 Si $f(x) = x^2 - 5x + 3$ y $g(x) = x^2$, obtén las expresiones de $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$.

Halla $f[g(4)]$ y $g[f(4)]$.

2 Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 4$, obtén las expresiones de $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

Halla el valor de estas funciones en $x = 0$ y $x = 5$.

4.13 FUNCIÓN INVERSA O RECÍPROCA.

Observa qué ocurre cuando componemos estas dos funciones:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad g(x) = \frac{1+x}{x}$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\frac{1+x}{x}\right] = \frac{1}{\boxed{\frac{1+x}{x}} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left[\frac{1}{x-1}\right] = \frac{1+\boxed{\frac{1}{x-1}}}{\boxed{\frac{1}{x-1}}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = x$$

En este caso diremos que la función g(x) es la inversa (o recíproca) de f(x) y la representamos por $f^{-1}(x)$

- ¿Cómo calcular la inversa de f(x)?

$$f(x) = 3x - 1 \longrightarrow y = 3x - 1$$

Despejamos x:

$$y = 3x - 1 \longrightarrow y + 1 = 3x \longrightarrow \frac{y+1}{3} = x$$

La función inversa de f(x) será:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$$

Ejercicios 10 y 12 pág 150

10 Halla la función inversa de las siguientes funciones:

a) $y = 3x - 2$

b) $y = \dfrac{x+3}{2}$

c) $y = \sqrt{2x+1}$

d) $y = 1 + 2^x$

e) $y = 2 + log_3\, x$

f) $y = 4 - x^2$

12 Comprueba si cada par de funciones son una inversa de la otra. Para ello calcula $f \circ f^{-1}$ o bien $f^{-1} \circ f$:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$; $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 2$

b) $f(x) = \sqrt{2x+3}$; $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+2}{3}$

c) $f(x) = 1 + log_2 \dfrac{x}{3}$; $f^{-1}(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$