PROBLEMAS CON TRES INCÓGNITAS

1 En una reunión hay 22 personas, entre hombres, mujeres y niños. El doble del número de mujeres más el triple del número de niños, es igual al doble del número de hombres.

a) Con estos datos, ¿se puede saber el número de hombres que hay?

b) Si, además, se sabe que el número de hombres es el doble del de mujeres, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay?

Solución.

2 En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiantes, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla.

¿Cuántos helados de cada sabor se compran a la semana?

Solución.

3 Una persona ha obtenido 6 000 € de beneficio por invertir un total de 60 000 € en tres empresas: A, B y C. La suma del dinero invertido en A y B fue 5 veces el invertido en C, y los beneficios fueron el 5% en A, el 10% en B y el 20% en C. Averigua la cantidad invertida en cada empresa.

Solución.

4 En una clase de segundo de Bachillerato, por cada tres alumnos que estudian Tecnologías de la información, diez estudian Comunicación audiovisual, y por cada dos alumnos que estudian Tecnologías de la información, tres estudian Francés. Calcula el número de alumnos que cursan cada una de las materias mencionadas sabiendo que en la clase hay 35 alumnos y que cada uno de ellos sólo está matriculado en una de las asignaturas.

Solución.

5 En una tienda de ropa se liquidan los pantalones que han quedado sin vender en la temporada. Los hay de tres tipos:

– Sin defecto, todos al mismo precio de 20 euros.

– Con defecto no apreciable, con una rebaja del 20% sobre el precio de los anteriores.

– Con defecto apreciable, con una rebaja del 60% sobre el precio de los que no tienen defecto.

Hay 70 pantalones para vender. El precio total de todos ellos es de 1280 euros, y los que tienen defecto suponen el 40% de los que no lo tienen. ¿Cuántos pantalones hay de cada clase?

Solución.

6 Halla un número de tres cifras sabiendo que su suma es 12, que la cifra de las unidades es igual a la semisuma de las cifras de las centenas y de las decenas, y que, por último, el número que resulta al invertir las cifras del buscado es 198 unidades más pequeño que el número de partida.

Solución.

7 Una familia consta de una madre, un padre y una hija. La suma de las edades actuales de los 3 es de 80 años. Dentro de 22 años, la edad de la hija será la mitad que la de la madre. Si el padre es un año mayor que la madre, ¿qué edad tiene cada uno actualmente?

Solución.

8 Julia, Clara y Miguel reparten hojas de propaganda. Clara reparte el 20% del total, Miguel reparte 100 hojas más que Julia. Entre Clara y Julia reparten 850 hojas. Plantea un sistema de ecuaciones que permita saber cuántas hojas reparte cada uno y resuélvelo.

Solución.

9 Si la altura de Luis aumentase el triple de la diferencia entre la altura de Eusebio y de Pablo, Luis sería igual de alto que Pablo. Las alturas de los tres suman 515 cm. Ocho veces la altura de Eusebio es lo mismo que nueve veces la de Luis. Halla las tres alturas.

Solución.

1 En una reunión hay 22 personas, entre hombres, mujeres y niños. El doble del número de mujeres más el triple del número de niños, es igual al doble del número de hombres.

a) Con estos datos, ¿se puede saber el número de hombres que hay?

b) Si, además, se sabe que el número de hombres es el doble del de mujeres, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay?

Solución.

a) $x \to$ número de hombres
$y \to$ número de mujeres
$z \to$ número de niños

$$\begin{aligned} x + y + z &= 22 \\ 2y + 3z &= 2x \end{aligned}$$

No podemos averiguar el número de hombres, con tres variables necesito tres ecuaciones.

b)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 22 \\ 2y + 3z &= 2x \\ x &= 2y \end{aligned}$$

Si substituimos el valor de x de la última ecuación en las dos primeras tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} 2y + y + z = 22 &\ \to\ 3y + z = 22 \\ 2y + 3z = 4y &\ \to\ -2y + 3z = 0 \end{aligned}\right\} (1)$$

Aplicamos el método de reducción:

$$\begin{aligned} 3y + z = 22 &\xrightarrow{\cdot(-3)} -9y - 3z = -66 \\ -2y + 3z = 0 &\xrightarrow{\hspace{1.5em}} -2y + 3z = 0 \\ & \qquad -11y = -66 \ \to\ y = 6 \end{aligned}$$

Substituimos el valor de y en la primera ecuación de (1) y en x = 2y tenemos:

$$\begin{aligned} &3y + z = 22 \ \to\ 18 + z = 22 \ \to\ z = 4 \\ &x = 2y \ \to\ x = 12 \end{aligned}$$

En la reunión hay 12 hombres, 6 mujeres y 4 niños.

Volver a los enunciados

2 En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiantes, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla.

¿Cuántos helados de cada sabor se compran a la semana?

Solución.

$x \to$ helados de vainilla
$y \to$ helados de chocolate
$z \to$ helados de nata

$$\begin{aligned} x+y+z&=110\\ 4x+5y+6z&=540\\ y+z&=1{,}2x \end{aligned}$$

Arreglamos la última ecuación:

$$-1{,}2x+y+z=0 \xrightarrow{\cdot 10} -12x+10y+10z=0 \xrightarrow{:2} -6x+5y+5z=0$$

Y resolvemos por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110\\ 4 & 5 & 6 & 540\\ -6 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[6F_1-F_3]{\substack{F_1\\4F_1-F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110\\ 0 & -1 & -2 & -100\\ 0 & 11 & 11 & 660 \end{array}\right) \xrightarrow[11F_2+F_3]{\substack{F_1\\F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110\\ 0 & -1 & -2 & -100\\ 0 & 0 & -11 & -440 \end{array}\right)$$

Escribimos el sistema escalonado y resolvemos:

$$\begin{aligned} x+y+z=110 &\to x+20+40=110 \to x=30\\ -y-2z=-100 &\to -y-80=-100 \to y=20\\ -11z=-440 &\to z=40 \end{aligned}$$

Se compran 30 helados de vainilla, 20 de chocolate y 40 de nata.

Volver a los enunciados

3 Una persona ha obtenido 6 000 € de beneficio por invertir un total de 60 000 € en tres empresas: A, B y C. La suma del dinero invertido en A y B fue 5 veces el invertido en C, y los beneficios fueron el 5% en A, el 10% en B y el 20% en C. Averigua la cantidad invertida en cada empresa.

Solución.

$x \rightarrow$ Dinero invertido en A
$y \rightarrow$ Dinero invertido en B
$z \rightarrow$ Dinero invertido en C

$$\begin{aligned} &x+y+z=60000 \\ &x+y=5z \\ &0{,}05x+0{,}1y+0{,}2z=6000 \end{aligned}$$

Arreglamos las dos últimas ecuaciones:

$$x+y=5z \;\rightarrow\; x+y-5z=0$$

$$0{,}05x+0{,}1y+0{,}2z=60000 \xrightarrow{\cdot 100} 5x+10y+20z=600000 \xrightarrow{:5} x+2y+4z=120000$$

Y resolvemos por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60000 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 120000 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - F_3]{\substack{F_1 \\ F_1 - F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60000 \\ 0 & 0 & 6 & 60000 \\ 0 & -1 & -9 & -120000 \end{array}\right)$$

Escribimos el sistema escalonado y resolvemos:

$$\begin{aligned} x+y+z=60000 &\rightarrow x+30000+10000=60000 \rightarrow x=20000 \\ 6z=60000 &\rightarrow z=10000 \\ -y-9z=-120000 &\rightarrow -y-90000=-120000 \rightarrow y=30000 \end{aligned}$$

Ha invertido 20000 € en A, 30000 € en B y 10000 € en C.

Volver a los enunciados

4 En una clase de segundo de Bachillerato, por cada tres alumnos que estudian Tecnologías de la información, diez estudian Comunicación audiovisual, y por cada dos alumnos que estudian Tecnologías de la información, tres estudian Francés. Calcula el número de alumnos que cursan cada una de las materias mencionadas sabiendo que en la clase hay 35 alumnos y que cada uno de ellos sólo está matriculado en una de las asignaturas.

Solución.

$x \to$ alumnos que estudian TIC
$y \to$ alumnos que estudian CA
$z \to$ alumnos que estudian francés

$$\begin{cases} x+y+z=35 \\ \frac{x}{3}=\frac{y}{10} \\ \frac{x}{2}=\frac{z}{3} \end{cases}$$

Arreglamos las dos últimas ecuaciones:

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{10} \to 10x=3y \to 10x-3y=0$$
$$\frac{x}{2}=\frac{z}{3} \to 3x=2z \to 3x-2z=0$$

Y resolvemos por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 10 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3F_1-F_3]{\substack{F_1 \\ 10F_1-F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & 13 & 10 & 350 \\ 0 & 3 & 5 & 105 \end{array}\right) \xrightarrow[3F_2-13F_3]{\substack{F_1 \\ F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & 13 & 10 & 350 \\ 0 & 0 & -35 & -315 \end{array}\right)$$

Escribimos el sistema escalonado y resolvemos:

$$x+y+z=35 \to x+20+9=35 \to x=6$$
$$13y+10z=350 \to 13y+90=350 \to 13y=260 \to y=20$$
$$-35z=-315 \to z=9$$

6 alumnos estudian TIC, 20 estudian CA y 9 estudian francés.

Volver a los enunciados

5 En una tienda de ropa se liquidan los pantalones que han quedado sin vender en la temporada. Los hay de tres tipos:

– Sin defecto, todos al mismo precio de 20 euros.

– Con defecto no apreciable, con una rebaja del 20% sobre el precio de los anteriores.

– Con defecto apreciable, con una rebaja del 60% sobre el precio de los que no tienen defecto.

Hay 70 pantalones para vender. El precio total de todos ellos es de 1280 euros, y los que tienen defecto suponen el 40% de los que no lo tienen. ¿Cuántos pantalones hay de cada clase?

Solución.

$x \to$ pantalones sin defecto (que cuestan 20€)
$y \to$ pantalones con defecto no apreciable (que cuestan 16€)
$z \to$ pantalones con defecto apreciable (que cuestan 8€)

$$\begin{aligned} &x+y+z=70 \\ &20x+16y+8z=1280 \\ &y+z=0{,}4x \end{aligned}$$

Arreglamos las dos últimas ecuaciones:

$$20x+16y+8z=1280 \xrightarrow{:4} 5x+4y+2z=320$$
$$y+z=0{,}4x \to -0{,}4x+y+z=0 \xrightarrow{\cdot 10} -4x+10y+10z=0 \xrightarrow{:2} -2x+5y+5z=0$$

Y resolvemos por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 5 & 4 & 2 & 320 \\ -2 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_1+F_3]{\substack{F_1 \\ 5F_1-F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & 7 & 7 & 140 \end{array}\right) \xrightarrow[7F_2-F_3]{\substack{F_1 \\ F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & 0 & 14 & 70 \end{array}\right)$$

Escribimos el sistema escalonado y resolvemos:

$$\begin{aligned} x+y+z=70 &\quad\rightarrow\quad x+15+5=70 \quad\rightarrow\quad x=50 \\ y+3z=30 &\quad\rightarrow\quad y+15=30 \quad\rightarrow\quad y=15 \\ 14z=70 &\quad\rightarrow\quad z=5 \end{aligned}$$

Hay 50 pantalones sin defecto, 15 con defecto no apreciable y 5 con defecto apreciable.

Volver a los enunciados

6 Halla un número de tres cifras sabiendo que su suma es 12, que la cifra de las unidades es igual a la semisuma de las cifras de las centenas y de las decenas, y que, por último, el número que resulta al invertir las cifras del buscado es 198 unidades más pequeño que el número de partida.

Solución.

$x \to$ cifra de las centenas
$y \to$ cifra de las decenas
$z \to$ cifra de las unidades

$$x + y + z = 12$$
$$z = \frac{x+y}{2} \qquad \text{(semisuma es sinónimo de media)}$$
$$100z + 10y + x = 100x + 10y + z - 198$$

Explicación de la última ecuación:

Pensemos en un número como 342: éste puede ser escrito del siguiente modo:

3	4	2

$$342 = 300 + 40 + 2 = 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2$$

Por tanto el número inicial por el que nos pregunta el ejercicio puede ser escrito:

x	y	z

$$x \cdot 100 + y \cdot 10 + z = 100x + 10y + z$$

Y el que resulta al invertir sus cifras es:

z	y	x

$$z \cdot 100 + y \cdot 10 + x = 100z + 10y + x$$

Arreglamos las dos últimas ecuaciones:

$$z = \frac{x+y}{2} \;\to\; 2z = x + y \;\to\; x + y - 2z = 0$$
$$100z + 10y + x = 100x + 10y + z - 198 \;\to\; -99x + 99z = -198 \xrightarrow{:99} -x + z = -2$$

Y resolvemos por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+F_3]{\substack{F_1 \\ F_1-F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Escribimos el sistema escalonado y resolvemos:

$$\begin{aligned} x+y+z=12 &\rightarrow x+2+4=12 \rightarrow x=6 \\ 3z=12 &\rightarrow z=4 \\ y-z=-2 &\rightarrow y-4=-2 \rightarrow y=2 \end{aligned}$$

El número es el 624.

Volver a los enunciados

7 Una familia consta de una madre, un padre y una hija. La suma de las edades actuales de los 3 es de 80 años. Dentro de 22 años, la edad de la hija será la mitad que la de la madre. Si el padre es un año mayor que la madre, ¿qué edad tiene cada uno actualmente?

Solución.

	Hoy	Dentro de 22 años
Edad Madre	x	x + 22
Edad Padre	y	y +22
Edad hija	z	z + 22

$$\begin{aligned} &x+y+z=80 \\ &z+22=\frac{x+22}{2} \\ &y=x+1 \end{aligned}$$

Arreglamos las dos últimas ecuaciones:

$$\begin{aligned} &z+22=\frac{x+22}{2} \rightarrow 2z+44=x+22 \rightarrow -x+2z=-22 \\ &y=x+1 \rightarrow -x+y=1 \end{aligned}$$

Y resolvemos por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ -1 & 0 & 2 & -22 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-F_3]{\substack{F_1 \\ F_2+F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & 3 & 58 \\ 0 & -1 & 2 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+F_3]{\substack{F_1 \\ F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & 3 & 58 \\ 0 & 0 & 5 & 35 \end{array}\right)$$

Escribimos el sistema escalonado y resolvemos:

$$\begin{aligned} x + y + z = 80 &\rightarrow x + 37 + 7 = 80 \rightarrow x = 36 \\ y + 3z = 58 &\rightarrow y + 21 = 58 \rightarrow y = 37 \\ 5z = 35 &\rightarrow z = 7 \end{aligned}$$

La madre tiene 36 años, el padre 37 y la hija 7.

Volver a los enunciados

8 Julia, Clara y Miguel reparten hojas de propaganda. Clara reparte el 20% del total, Miguel reparte 100 hojas más que Julia. Entre Clara y Julia reparten 850 hojas. Plantea un sistema de ecuaciones que permita saber cuántas hojas reparte cada uno y resuélvelo.

Solución.

$x \to$ hojas que reparte Julia.
$y \to$ hojas que reparte Clara.
$z \to$ hojas que reparte Miguel.

$$y = 0{,}2(x+y+z)$$
$$z = x+100$$
$$x+y = 850$$

Vamos a sustituir x+y en la primera ecuación por 850 (qué es lo que afirma la última ecuación). También sustituimos en la primera ecuación z por x+100 (qué es lo afirma la segunda ecuación). Resulta:

$$y = 0{,}2(x+y+z) \;\to\; y = 0{,}2(850+x+100) \;\to\; y = 0{,}2(x+950) \;\to\; y = 0{,}2x+190 \quad \textbf{(1)}$$

Sustituimos este valor de y en la última ecuación (x+y=850) y obtenemos:

$$x+y=850 \;\to\; x+0{,}2x+190=850 \;\to\; 1{,}2x=660 \;\to\; x=660:1{,}2=550$$

A continuación sustituimos en **(1)**:

$$y = 0{,}2x+190 = 0{,}2\cdot 550+190 = 110+190 = 300$$

Por último obtenemos z en la segunda ecuación del sistema:

$$z = x+100 = 650$$

Así pues, Julia reparte 550 hojas, Clara 300 hojas y Miguel 650 hojas.

Volver a los enunciados

9 Si la altura de Luis aumentase el triple de la diferencia entre la altura de Eusebio y de Pablo, Luis sería igual de alto que Pablo. Las alturas de los tres suman 515 cm. Ocho veces la altura de Eusebio es lo mismo que nueve veces la de Luis. Halla las tres alturas.

Solución.

$x \to$ Altura de Luis.	$x+3(y-z)=z$
$y \to$ Altura de Eusebio.	$x+y+z=515$
$z \to$ Altura de Pablo.	$8y=9x$

Arreglamos la primera y la última ecuación:

$$x+3(y-z)=z \;\to\; x+3y-3z=z \;\to\; x+3y-4z=0$$
$$8y=9x \;\to\; -9x+8y=0$$

Y resolvemos por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 515 \\ -9 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[9F_1+F_3]{\substack{F_1 \\ F_1-F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -515 \\ 0 & 35 & -36 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[35F_2-2F_3]{\substack{F_1 \\ F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -515 \\ 0 & 0 & -103 & -18025 \end{array}\right)$$

Escribimos el sistema escalonado y resolvemos:

$$\begin{aligned} x+3y-4z=0 \;&\to\; x+540-700=0 \;\to\; x=160 \\ 2y-5z=-515 \;&\to\; 2y-875=-515 \;\to\; 2y=360 \;\to\; y=180 \\ -103z=-18025 \;&\to\; z=175 \end{aligned}$$

Luis mide 160 cm, Eusebio 180 cm y Pablo 175 cm.

Volver a los enunciados