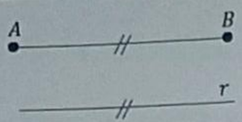
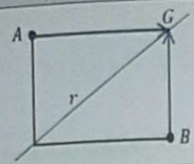
7. Los puntos $A \equiv (-1, 2, 1)$ y $B \equiv (2, 5, 1)$ son dos vértices de un cuadrado. Halla los otros dos vértices sabiendo que están en la recta de ecuación:

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-4}$$

Como el problema no dice nada, tenemos dos posibles opciones:

Los vértices son consecutivos	Los vértices están en una diagonal
	
Opción incorrecta: Como $\vec{v}_r(-1, 1, -4)$ no es proporcional a $\overrightarrow{AB}(3, 3, 0)$ descartamos esta opción.	**Opción correcta** (usamos punto genérico): En este caso $\overrightarrow{AG}$ es perpendicular a $\overrightarrow{BG}$ por lo tanto sabemos que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$

Tenemos que encontrar dos puntos de la recta. Como no sabemos cuáles son, recurrimos a punto genérico. Para ello empezamos pasando la recta a paramétrica:

$$r\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -1 - 4\lambda \end{cases} \rightarrow \quad G(-\lambda,\ 4+\lambda,\ -1-4\lambda)$$

Sabemos que $\overrightarrow{AG}$ es perpendicular a $\overrightarrow{BG} \rightarrow \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$

$$\overrightarrow{AG} = G - A = (-\lambda,\ 4+\lambda,\ -1-4\lambda) - (-1,\ 2,\ 1) = (-\lambda+1,\ 2+\lambda,\ -2-4\lambda)$$

$$\overrightarrow{BG} = G - B = (-\lambda,\ 4+\lambda,\ -1-4\lambda) - (2,\ 5,\ 1) = (-\lambda-2, -1+\lambda,\ -2-4\lambda)$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BG} = (-\lambda+1,\ 2+\lambda,\ -2-4\lambda) \cdot (-\lambda-2, -1+\lambda,\ -2-4\lambda) =$$

$$= (-\lambda+1) \cdot (-\lambda-2) + (2+\lambda) \cdot (-1+\lambda) + (-2-4\lambda) \cdot (-2-4\lambda) =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda - \lambda - 2 - 2 + 2\lambda - \lambda + \lambda^2 + 4 + 16\lambda + 16\lambda^2 =$$

$$= 18\lambda^2 + 18\lambda = 0 \rightarrow \lambda(18\lambda + 18) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Si $\lambda = 0 \rightarrow \boxed{G_1(0,\ 4, -1)}$

Si $\lambda = -1 \rightarrow \boxed{G_2(1,\ 3,\ 3)}$

TEMA 8

Probabilidad

¿Qué vamos a estudiar en este tema?

1. Espacio muestral y sucesos
2. Operaciones con sucesos
3. Probabilidad. Regla de Laplace
4. Propiedades de la probabilidad
5. Leyes de Morgan
6. Diferencia de sucesos
7. Probabilidad condicionada
8. Sucesos independientes
9. Diagramas de árbol
10. Teorema de probabilidad total
11. Teorema de Bayes

"Remix" de ejercicios del tema: PROBABILIDAD

Evaluación del bachillerato para el acceso a la universidad

1. Espacio muestral y sucesos

Llamamos **espacio muestral** al conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. En adelante lo designaremos como "E".

* **Sucesos individuales o elementales:** Cada uno de los elementos de E.
* **Suceso de un fenómeno o experimento aleatorio:** Cada uno de los subconjuntos de E.
* **Suceso vacío o imposible(Ø):** Aquel que no tiene ningún elemento de E.
* **Suceso seguro:** Aquel que ocurre siempre. Es el propio E.
* **Suceso contrario de un suceso A:** Aquel formado por todos los sucesos elementales que no están en A. Se representa como $\overline{A}$

Ejemplo 1. En el experimento de lanzar un dado de 6 caras, calcular:

a) Espacio muestral
b) Sucesos elementales
c) Suceso A: Sacar número par
d) Suceso B: Sacar el número 5
e) Suceso contrario de A
f) Suceso contrario de B
g) Suceso seguro
h) Un suceso imposible

$a)\ E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$b)\ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

$c)\ A = \{2, 4, 6\}$

$d)\ B = \{5\}$

$e)\ \overline{A} = \{1, 3, 5\}$

$f)\ \overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$g)\ C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$h)\ D = \{7\}$

2. Operaciones con sucesos

* **Unión:** $A \cup B$ es el suceso formado por todos los elementos de A y todos los elementos de B. ¡¡Importante!! La unión se lee como "ó". Es decir, "que ocurra A o que ocurra B". Cumple la propiedad conmutativa: $A \cup B = B \cup A$

* **Intersección:** $A \cap B$ es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez, de A y de B. ¡¡Importante!! La intersección se lee como "y". Es decir, "que ocurra A y que ocurra B". Cumple la propiedad conmutativa: $A \cap B = B \cap A$

* **Sucesos incompatibles:** Dos sucesos A y B son **incompatibles** si no tienen ningún elemento común. Es decir, cuando $A \cap B = \emptyset$

Por lo tanto, si tienen algún elemento en común son **compatibles**

Ejemplo 2. En el experimento de lanzar un dado de 6 caras, siendo los sucesos:
A: Sacar un número par ; B: Sacar un número múltiplo de 3...

a) Calcular $A \cup B$
b) Calcular $A \cap B$
c) ¿Son los sucesos A y B incompatibles?

$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{3, 6\}$

a) $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$

b) $A \cap B = \{6\}$

c) No. Son compatibles ya que tienen algún elemento en común.

3. Probabilidad. Regla de Laplace

Para estudiar la probabilidad de un suceso A, aplicaremos la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{Nº\ de\ casos\ favorables}{Nº\ de\ casos\ totales}$$

Ejemplo 3. En el experimento de lanzar un dado de 6 caras, calcular la probabilidad de:

a) Sacar el número 5

b) Sacar un múltiplo de 3

c) Sacar un número par

d) Sacar el número 8

e) Sacar un número del 1 al 6

a) $P(A) = {}^{1}/_{6}$ "El dado tiene 1 cinco entre los 6 casos"

b) $P(B) = {}^{2}/_{6} = {}^{1}/_{3}$ "El dado tiene 2 múltiplos de tres entre los 6 casos"

c) $P(C) = {}^{3}/_{6} = {}^{1}/_{2}$ "El dado tiene 3 números pares entre los 6 casos"

d) $P(D) = {}^{0}/_{6} = 0$ "El dado tiene 0 número ocho entre los 6 casos"

e) $P(E) = {}^{6}/_{6} = 1$ "El suceso es seguro"

4. Propiedades de la probabilidad

a) La probabilidad del ***suceso seguro*** es uno: $P(E) = 1$

b) La probabilidad del ***suceso imposible*** es cero: $P(\emptyset) = 0$

c) La probabilidad de ***cualquier suceso*** está comprendida entre cero y uno.

d) La probabilidad del ***suceso contrario*** es: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

• **Probabilidad de Unión de sucesos:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

¡¡Importante!! Lo debemos leer como "Probabilidad de que ocurra A o que ocurra B".

• **Probabilidad de Intersección de sucesos:** $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

¡¡Importante!! Lo debemos leer como "Probabilidad de que ocurra A y que ocurra B".

• **Sucesos incompatibles:** Dos sucesos A y B son **incompatibles** si no tienen ningún elemento común. Por lo tanto, la probabilidad de su intersección debe ser 0: $P(A \cap B) = 0$

Por lo tanto, si tienen algún elemento en común son **compatibles:** $P(A \cap B) \neq 0$

Ejemplo 4. Sabiendo que $P(\overline{A}) = 0{,}25$; $P(B) = 0{,}6$; $P(A \cup B) = 0{,}9$

a) Calcula $P(A \cap B)$

b) ¿Son los sucesos A y B compatibles?

a) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}25 = \mathbf{0{,}75}$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}75 + 0{,}6 - 0{,}9 = \mathbf{0{,}45}$

b) Puesto que $P(A \cap B) \neq 0$, podemos afirmar que los sucesos A y B son compatibles.

Ejemplo 5. Sabiendo que los sucesos A y B son incompatibles y que $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}3$ calcula $P(A \cup B)$

Puesto que los sucesos A y B son incompatibles, sabemos que $P(A \cap B) = 0$, por tanto:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0 = \mathbf{0{,}7}$

Ejemplo 6. En una clase de bachillerato, el 70% de los alumnos aprueban matemáticas, el 80% aprueban química y el 55% aprueban las dos asignaturas. Calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar apruebe alguna de las dos asignaturas.

Definimos los sucesos: $M =$ **"Aprobar Matemáticas"** ; $Q =$ **"Aprobar Química"**

"La probabilidad de aprobar matemáticas es del 70%" → $P(M) = \mathbf{0,7}$

"La probabilidad de aprobar química es del 80%" → $P(Q) = \mathbf{0,8}$

"La probabilidad de aprobar las dos asignaturas es del 55%" → $P(M \cap Q) = \mathbf{0,55}$

La probabilidad de aprobar alguna asignatura por tanto será: $P(M \cup Q)$

$P(M \cup Q) = P(M) + P(Q) - P(M \cap Q) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}55 = \mathbf{0,95}$

¡¡Importante!! Fíjate lo importante que es leer con cuidado...La probabilidad de aprobar las dos asignaturas, hace referencia al **concepto de intersección** mientras que la probabilidad de aprobar alguna asignatura (química **o** matemática) hace referencia al **concepto de unión.**

5. Leyes de Morgan

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

¡¡Interesante!! Fíjate que $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ establece "la probabilidad de que no ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B". **Es decir, la probabilidad de que no ocurra ninguno de los sucesos.**

Ejemplo 7. En un concurso, la probabilidad de ganar el premio A es 0,5; la probabilidad de ganar el premio B es 0,15 mientras que la probabilidad de ganar los dos regalos es de 0,05. Calcula la probabilidad de no ganar ningún regalo.

$P(A) = \mathbf{0,5}$; $P(B) = \mathbf{0,15}$; $P(A \cap B) = \mathbf{0,05}$

La probabilidad de no ganar ningún regalo (no ganar el regalo A ni el regalo B) **será, por tanto:**

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

Calculamos $P(A \cup B)$: $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}15 - 0{,}05 = \mathbf{0,6}$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}6 = \mathbf{0,4}$

6. Diferencia de sucesos

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

¡¡Interesante!! Fíjate que $P(A \cap \overline{B})$ establece la "probabilidad de que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B". **Es decir, la probabilidad de que solo ocurra el suceso A.**

Ejemplo 8. En un concurso, la probabilidad de ganar el premio A es 0,5, la probabilidad de ganar el premio B es 0,25 mientras que la probabilidad de ganar los dos regalos es de 0,05.

a) Calcula la probabilidad de ganar solo el premio A.

b) Calcula la probabilidad de ganar solo el premio B.

$P(A) = \mathbf{0,5}$; $P(B) = \mathbf{0,25}$; $P(A \cap B) = \mathbf{0,05}$

a) La probabilidad de ganar solo el premio A será:

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}05 = \mathbf{0,45}$

b) La probabilidad de ganar solo el premio B será:

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}25 - 0{,}05 = \mathbf{0,2}$

7. Probabilidad condicionada

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

¡¡Interesante!! Fíjate que $P(A/B)$ establece la **"probabilidad de que ocurra el suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B".**

Ejemplo 9. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = \mathbf{0,6}$; $P(B) = \mathbf{0,5}$ **y** $P(A \cap B) = \mathbf{0,3}$

a) Calcula la probabilidad de que ocurra B sabiendo que ha ocurrido A.

b) Calcula la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B.

a) $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}6} = \mathbf{0,5}$ b) $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}5} = \mathbf{0,6}$

8. Sucesos independientes

Dos sucesos son <u>independientes</u> si lo que ocurre en uno de ellos no influye en el otro.

Para ello, se debe cumplir que: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Ejemplo 10. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 03$; $P(B) = 0,5$ y $P(A \cap B) = 0,2$

¿Son los sucesos A y B independientes?

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow 0,2 = 0,3 \cdot 0,5 \rightarrow 0,2 \neq 0,15$

Los sucesos no son independientes, por lo tanto son dependientes.

¡¡Vamos a hacer un ejercicio que recoja varios de los conceptos anteriores!!

Ejemplo 11. Sean A y B dos sucesos independientes tales que $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,5$

Calcula:

a) $P(A \cap B)$

b) $P(A \cup B)$

c) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

d) $P(A \cap \overline{B})$

e) $P(A/B)$

Como los sucesos son independientes, sabemos que: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\boldsymbol{a)}\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,3 \cdot 0,5 = \mathbf{0,15}$

$\boldsymbol{b)}\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,5 - 0,15 = \mathbf{0,65}$

$\boldsymbol{c)}\ P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,65 = \mathbf{0,35}$

$\boldsymbol{d)}\ P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,3 - 0,15 = \mathbf{0,15}$

$$\boldsymbol{e)}\ P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,15}{0,5} = \mathbf{0,3}$$

9. Diagramas de árbol

Muchos problemas de probabilidad se resuelven mediante la creación de diagramas de árbol por lo que vamos a aprender a construirlos y entender su funcionamiento, su "ritmo".

Vamos a hacer unos cuantos ejemplos clásicos para aprender dicho concepto:

Ejemplo 12. Tenemos una urna con 3 bolas azules y 4 bolas rojas. Si extraemos 2 bolas <u>con devolución</u>, calcula la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean azules

b) Las dos bolas sean rojas

c) La primera sea roja y la segunda sea azul

d) La primera sea azul y la segunda sea roja

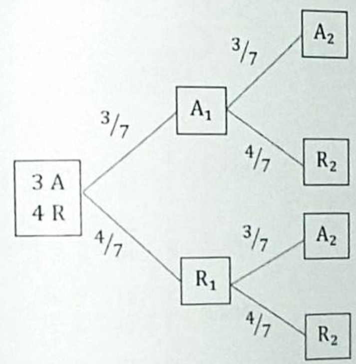
e) Las dos bolas sean del mismo color

f) Las dos bolas sean de distinto color

Definimos lo sucesos → A: "Sacar bola azul" R: "Sacar bola roja"

Hacemos el diagrama de árbol colando en cada una de sus ramas su probabilidad.

El enunciado especifica que es **<u>con devolución</u>** lo que implica que sacamos una bola de la urna, miramos su color y la devolvemos. Por lo tanto, **las probabilidades de la urna no varían:**



Una vez elaborado el diagrama de árbol, vamos a estudiar su **"ritmo"**:

Seguimos el recorrido del diagrama en función de la pregunta que queramos resolver y sabiendo que **cuando avanzamos hacia adelante, tenemos que multiplicar mientras que cada vez que volvemos al principio, tenemos que sumar:**

a) $P(A_1 \cap A_2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49} = 0,1837$

b) $P(R_1 \cap R_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49} = 0,3265$

c) $P(R_1 \cap A_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49} = 0,2449$

d) $P(A_1 \cap R_2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{49} = 0,2449$

e) $P(A_1 \cap A_2) \cup (R_1 \cap R_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(R_1 \cap R_2) = \frac{9}{49} + \frac{16}{49} = \frac{25}{49} = 0,5102$

f) $P(A_1 \cap R_2) \cup P(R_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap A_2) = \frac{12}{49} + \frac{12}{49} = \frac{24}{49} = 0,4898$

¡¡Importante!! Puesto que volvemos al principio, **sumamos.**

Ejemplo 13. Tenemos una urna con 3 bolas azules y 4 bolas rojas. Si extraemos 2 bolas <u>sin reemplazamiento</u>, calcula la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean azules

b) Las dos bolas sean rojas

c) La primera sea roja y la segunda sea azul

d) La primera sea azul y la segunda sea roja

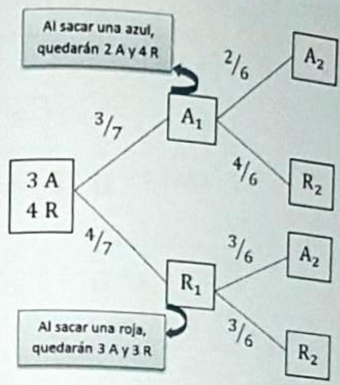
e) Las dos bolas sean del mismo color

f) Las dos bolas sean de distinto color

Definimos lo sucesos → A: "Sacar bola azul" R: "Sacar bola roja"

Hacemos el diagrama de árbol colando en cada una de sus ramas su probabilidad.

El enunciado especifica que es **<u>sin reemplazamiento</u>** (es lo mismo que **<u>sin devolución</u>**) lo que implica que **las probabilidades en la segunda extracción son diferentes a las de la primera extracción.**



a) $P(A_1 \cap A_2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7} = 0,1429$

b) $P(R_1 \cap R_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7} = 0,2857$

c) $P(R_1 \cap A_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7} = 0,2857$

d) $P(A_1 \cap R_2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7} = 0,2857$

e) $P(A_1 \cap A_2) \cup (R_1 \cap R_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7} = 0,4286$

f) $P(A_1 \cap R_2) \cup P(R_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap A_2) = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7} = 0,5714$

Ejemplo 14. Tenemos dos urnas. La primera con 3 bolas verdes y 4 bolas rojas. La segunda con 2 bolas verdes y 7 bolas rojas. Si se elige una urna al azar y se saca una bola, calcula la probabilidad de que:

a) La bola sea verde

b) La bola sea roja

Definimos los sucesos

U_1: "Elegir Urna 1"

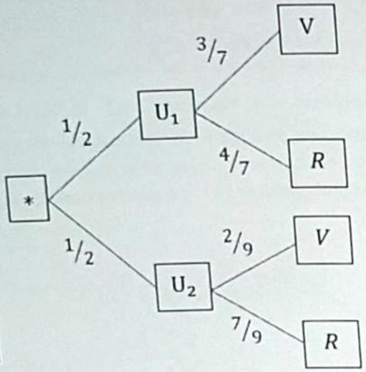
U_2: "Elegir Urna 2"

V: "Sacar bola verde"

R: "Sacar bola roja"

* Como elegimos una urna al azar, la probabilidad de elegir una de ellas es de $^1/_2$

Si tuviéramos tres urnas, sería $^1/_3$ y así sucesivamente...



$$a)\ P(V) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9} = \frac{3}{14} + \frac{2}{18} = \frac{3}{14} + \frac{1}{9} = \mathbf{\frac{41}{126}} = \mathbf{0,3254}$$

$$b)\ P(R) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{9} = \frac{4}{14} + \frac{7}{18} = \frac{2}{7} + \frac{7}{18} = \mathbf{\frac{85}{126}} = \mathbf{0,6746}$$

¡¡Fíjate!! Como solo hay dos colores, también podríamos haber calculado $P(R)$ como el suceso contrario a sacar el color verde. Es decir:

$$\boldsymbol{P(R) = P(\overline{V}) = 1 - P(V)} = 1 - 0{,}3254 = \mathbf{0,6746}$$

Ejemplo 15. En una clase de bachillerato hay 10 chicas y 8 chicos. De ellos, 3 chicas y 4 chicos juegan al fútbol. Si escogemos un estudiante al azar, determina la probabilidad de:

a) Que sea chica y no juegue al fútbol

b) Que sea chico y juegue al fútbol

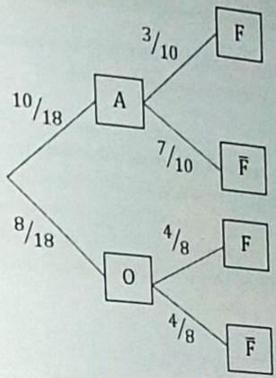
Definimos los sucesos

A: "Ser chica"

O: "Ser chico"

F: "Juega al fútbol"

$\overline{F}$: "No juega al fútbol"



$$a)\ P(A \cap \overline{F}) = \frac{10}{18}\cdot\frac{7}{10} = \mathbf{\frac{7}{18}} = \mathbf{0,3889}$$

$$b)\ P(O \cap F) = \frac{8}{18}\cdot\frac{4}{8} = \frac{32}{144} = \mathbf{\frac{2}{9}} = \mathbf{0,2222}$$

10. Teorema de probabilidad total

Para el cálculo de la probabilidad total emplearemos la siguiente fórmula:

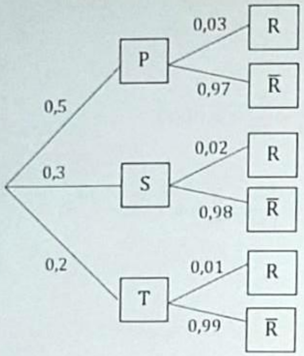
$$P(B) = P(A_1) \cdot P\left(\frac{B}{A_1}\right) + P(A_2) \cdot P\left(\frac{B}{A_2}\right) + \cdots + P(A_n) \cdot P\left(\frac{B}{A_n}\right)$$

Aunque al principio pueda dar un poco de miedo esta fórmula.... Veremos que aprenderemos a dominarla rápidamente con unos cuantos ejemplos:

Ejemplo 16. Una empresa recibe lotes de material de tres proveedores en proporciones del 50%, 30% y 20%. Se sabe que el 3% de los lotes del primer proveedor, el 2% de los del segundo y el 1% de los del tercero son rechazados en el control de calidad que realiza la empresa a la recepción del material. ¿Cuál es la probabilidad de que un lote sea rechazado?

Definimos los sucesos

P: "Primer proveedor"
S: "Segundo proveedor"
T: "Tercer proveedor"
R: "Rechazado"
$\overline{R}$: "No rechazado"



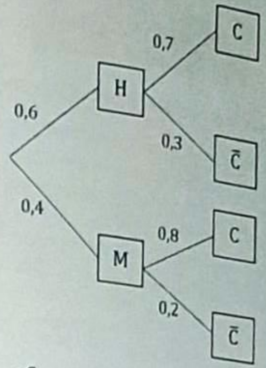
$$P(R) = P(P) \cdot P\left(\frac{R}{P}\right) + P(S) \cdot P\left(\frac{R}{S}\right) + P(T) \cdot P\left(\frac{R}{T}\right) = P(P \cap R) + P(S \cap R) + P(T \cap R)$$

$$P(R) = 0{,}5 \cdot 0{,}03 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}2 \cdot 0{,}01 = \mathbf{0{,}023}$$

Ejemplo 17. En una cierta enfermedad, el 60% de los pacientes son hombres y el resto son mujeres. Con el tratamiento que se aplica, se sabe que se curan un 70% de los hombres y un 80% de las mujeres. Si se elige un paciente al azar, calcula la probabilidad de que se cure de la enfermedad.

Definimos los sucesos

H: "Ser hombre"
M: "Ser mujer"
C: "Se curan"
$\overline{C}$: "No se curan"



$$P(C) = P(H) \cdot P\left(\frac{C}{H}\right) + P(M) \cdot P\left(\frac{C}{M}\right) = P(H \cap C) + P(M \cap C)$$

$$P(C) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = \mathbf{0{,}74}$$

11. Teorema de Bayes

Al teorema de Bayes podríamos llamarlo "teorema del cangrejo" ya que si seguimos su lectura en el diagrama de árbol, nos damos cuenta de que "retrocedemos" en él:

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

¡¡Recuerda!! $P(A/B)$ establece la probabilidad de que "ocurra el suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B".

Ejemplo 18. El 40% de los sábados Marta va al cine, el 30% va de compras y el 30% restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60% de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20% de las veces que va de compras y el 80% de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

a) Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.

b) Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿Cuál es la probabilidad de que vayan al cine?

<u>Definimos los sucesos</u>

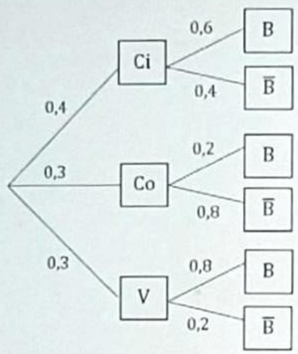
Ci: "Va al cine"

Co: "Va de compras"

V: "Videojuegos"

B: "Con sus compañeros de baloncesto"

$\overline{B}$: "Sin sus compañeros de baloncesto"



$a)\ P(\overline{B})=P(Ci)\cdot P\left(\frac{\overline{B}}{Ci}\right)+P(Co)\cdot P\left(\frac{\overline{B}}{Co}\right)+P(V)\cdot P\left(\frac{\overline{B}}{V}\right)=$

$P(\overline{B})=P(Ci\cap\overline{B})+P(Co\cap\overline{B})+P(V\cap\overline{B})$

$P(\overline{B})=0{,}4\cdot 0{,}4+0{,}3\cdot 0{,}8+0{,}3\cdot 0{,}2=\mathbf{0{,}46}$

b) Puesto que nos piden calcular $P(^{Ci}/_{B})$, tenemos que "retroceder" en el diagrama de árbol por lo que aplicaremos el <u>teorema de Bayes</u>:

$$P\left(\frac{Ci}{B}\right)=\frac{P(Ci\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{0{,}4\cdot 0{,}6+0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}3\cdot 0{,}8}=\frac{0{,}24}{0{,}54}=0{,}4444$$

¡¡Fíjate!! También podríamos haber calculado el denominador de la siguiente forma:

$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0{,}46=\mathbf{0{,}54}$

Ejemplo 19. Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50%, el 30% y el 20% de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6% de las resistencias producidas por A, el 5% de las producidas por B y el 3% de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia.

a) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa.

b) Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario A.

<u>Definimos los sucesos</u>

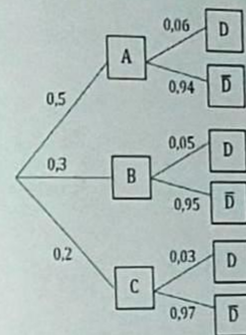
A: "Operario A"

B: "Operario B"

C: "Operario C"

D: "Defectuoso"

$\overline{D}$: "No defectuoso"



$a)\ P(D)=P(A)\cdot P\left(\frac{D}{A}\right)+P(B)\cdot P\left(\frac{D}{B}\right)+P(C)\cdot P\left(\frac{D}{C}\right)=$

$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)$

$P(D)=0{,}5\cdot 0{,}06+0{,}3\cdot 0{,}05+0{,}2\cdot 0{,}03=\mathbf{0{,}051}$

b) Puesto que nos piden calcular $P(^{A}/_{D})$, tenemos que "retroceder" en el diagrama de árbol por lo que aplicaremos el <u>teorema de Bayes</u>:

$$P\left(\frac{A}{D}\right)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}06}{0{,}051}=\mathbf{0{,}5882}$$

¡¡Fíjate!! El denominador es el resultado del apartado anterior.

"Remix" de ejercicios del tema:

PROBABILIDAD

Evaluación del bachillerato para el acceso a la universidad

1. Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que $P(A) = 4/9$; $P(B) = 1/2$; $P(A \cup B) = 2/3$, se pide:

a) Comprobar si los sucesos A y B son incompatibles o no.

b) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.

c) Calcular $P(\bar{A}/B)$

a) Dos sucesos A y B son incompatibles si no tienen ningún elemento común: $\mathbf{P(A \cap B) = 0}$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = {}^{4}/_{9} + {}^{1}/_{2} - {}^{2}/_{3} = {}^{5}/_{18} = \mathbf{0,2778}$$

Puesto que $P(A \cap B) \neq 0$, los sucesos <u>no son incompatibles</u>

b) Dos sucesos A y B son independientes si se cumple que: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow {}^{5}/_{18} = {}^{4}/_{9} \cdot {}^{1}/_{2} \rightarrow {}^{5}/_{18} \neq {}^{4}/_{18}$$

Puesto que $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, los sucesos <u>no son independientes</u>

c) $P(\bar{A}/B) = \dfrac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{{}^{2}/_{9}}{{}^{1}/_{2}} = {}^{4}/_{9} = \mathbf{0,4444}$

$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = {}^{1}/_{2} - {}^{5}/_{18} = {}^{2}/_{9} = \mathbf{0,2222}$ ← ojo!

2. Se tiran al aire, simultáneamente, un dado (con forma cúbica) y una moneda. Teniendo en cuenta que los sucesos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que en el dado salga un 5 y de que la moneda salga cara?

Definimos los sucesos	Probabilidad	Pregunta
5: "Sacar un 5"	$P(5) = {}^{1}/_{6}$	¿$P(5 \cap C)$?
C: "Sacara cara"	$P(C) = {}^{1}/_{2}$	

Como los sucesos son independientes sabemos que: $P(5 \cap C) = P(5) \cdot P(C)$

$$P(5 \cap C) = {}^{1}/_{6} \cdot {}^{1}/_{2} = {}^{1}/_{12} = \mathbf{0,08333}$$

3. En un experimento aleatorio, sean A y B dos sucesos con $P(\bar{A}) = 0,4$ y $P(B) = 0,7$. Si A y B son independientes, calcula $P(A \cup B)$ y $P(A - B)$

Como son sucesos independientes sabemos que: $\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

$P(\bar{A}) = 0,4 \rightarrow P(A) = 1 - 0,4 = \mathbf{0,6}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,7 = \mathbf{0,42}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,7 - 0,42 = \mathbf{0,88}$

$P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,42 = \mathbf{0,18}$

4. En una clase de bachillerato, el 60% de los alumnos aprueban matemáticas, el 50% aprueban inglés y el 30% aprueban las dos asignaturas.

Calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar:

a) Apruebe alguna de las dos asignaturas (una o las dos)

b) Apruebe matemáticas sabiendo que ha aprobado inglés.

Definimos los sucesos	Probabilidad	Preguntas
M: "Aprobar matemáticas"	$P(M) = 0,6$	¿$P(M \cup I)$?
I: "Aprobar inglés"	$P(I) = 0,5$	¿$P({}^{M}/_{I})$?
	$P(M \cap I) = 0,3$	

$$P(M \cup I) = P(M) + P(I) - P(M \cap I) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = \mathbf{0,8}$$

$$P({}^{M}/_{I}) = \frac{P(M \cap I)}{P(I)} = \frac{0,3}{0,5} = \mathbf{0,6}$$

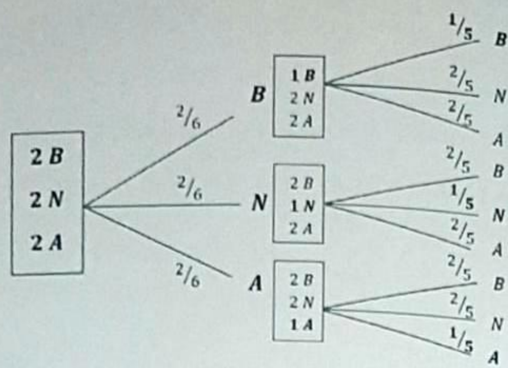
5. De una bolsa con 2 bolas blancas, 2 bolas negras y 2 bolas amarillas, se extraen 2 sin devolución (es decir, una vez extraída una bola, no se vuelve a poner en la bolsa).
Calcula la probabilidad de que las dos bolas sean blancas.

Definimos los sucesos

B: "Sacar bola blanca"

N: "Sacar bola negra"

A: "Sacar bola amarilla"



$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{15}} = \mathbf{0,0667}$$

6. En una clase de bachillerato hay 10 chicas y 8 chicos. De ellos, 3 chicas y 4 chicos juegan al ajedrez. Si escogemos un estudiante al azar, determina:

a) La probabilidad de que sea chica y no juegue al ajedrez

b) La probabilidad de que no juegue al ajedrez sabiendo que es chico

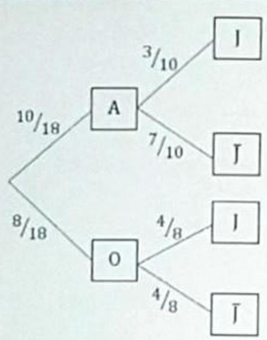
Definimos los sucesos

A: "Ser chica"

O: "Ser chico"

J: "Juega al ajedrez"

$\bar{J}$: "No juega al ajedrez"



$$a)\ P(A \cap \bar{J}) = \frac{10}{18} \cdot \frac{7}{10} = \frac{70}{180} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{18}} = \mathbf{0,3889}$$

$$b)\ P\left(\frac{\bar{J}}{O}\right) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \mathbf{0,5}$$

7. En una empresa, el 20% de los empleados son matemáticos, el 50% ingenieros y el resto no tienen carrera universitaria. Entre los matemáticos, el 40% ocupa un cargo directivo mientras que entre los ingenieros ese porcentaje se reduce a la mitad y es del 5% en el resto de los empleados. Elegido un empleado al azar, se pide:

a) Determinar la probabilidad de que ocupe un cargo directivo.

b) Si ocupa un cargo directivo ¿Cuál es la probabilidad de que sea matemático?

Definimos los sucesos

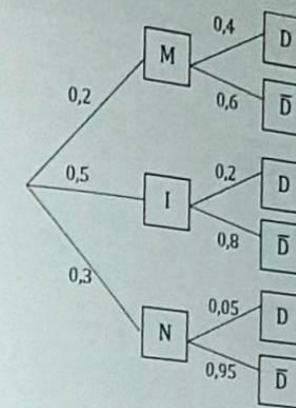
M: "Matemático"

I: "Ingeniero"

N: "No tiene carrera"

D: "Directivo"

$\bar{D}$: "No es directivo"



$$a)\ P(D) = P(M) \cdot P\left(\frac{D}{M}\right) + P(I) \cdot P\left(\frac{D}{I}\right) + P(N) \cdot P\left(\frac{D}{N}\right)$$

$$P(D) = 0,2 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,05 = \mathbf{0,195}$$

b) Aplicamos el **<u>teorema de Bayes</u>:**

$$P\left(\frac{M}{D}\right) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{0,2 \cdot 0,4}{0,195} = \mathbf{0,4103}$$

8. Una empresa fabrica móviles de tres marcas distintas: A, N, M. El 20% de los móviles fabricados son de marca A y el 40% de la marca N. Se decide instalar un software oculto que permita espiar usuarios en los móviles. El software espía se instala en el 15% de los móviles de marca A, en un 10% de la marca N y en un 12% de los móviles de marca M.

a) Determina la probabilidad de que una persona que compra uno de estos móviles tenga instalado el software espía.

b) Si el móvil de una persona tiene instalado el software espía, calcula la probabilidad de que sea de la marca A.

<u>Definimos los sucesos</u>

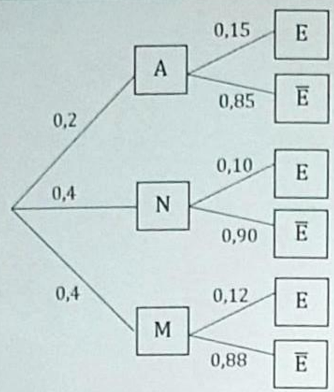
A: "Marca A"

N: "Marca N"

M: "Marca M"

E: "Software espía"

$\bar{E}$: "No Software espía"



$$a)\ P(E) = P(A)\cdot P\left(\frac{E}{A}\right) + P(N)\cdot P\left(\frac{E}{N}\right) + P(M)\cdot P\left(\frac{E}{M}\right)$$

$$P(E) = 0{,}2\cdot 0{,}15 + 0{,}4\cdot 0{,}10 + 0{,}4\cdot 0{,}12 = \mathbf{0{,}118}$$

b) Aplicamos el <u>teorema de Bayes</u>:

$$P\left(\frac{A}{E}\right) = \frac{P(A\cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}15}{0{,}118} = \mathbf{0{,}2542}$$

9. En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas. En B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

a) El libro elegido sea de matemáticas

b) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B.

<u>Definimos los sucesos</u>

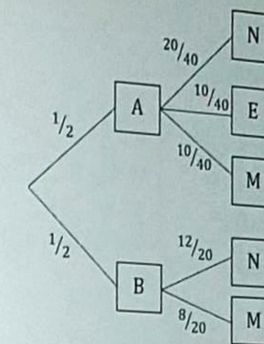
A: "Estantería A"

B: "Estantería B"

N: "Novela"

E: "Ensayo"

M: "Matemáticas"



$$a)\ P(M) = P(A)\cdot P\left(\frac{M}{A}\right) + P(B)\cdot P\left(\frac{M}{B}\right)$$

$$P(M) = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{40} + \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{20} = \frac{1}{8} + \frac{1}{5} = \frac{13}{40} = \mathbf{0{,}325}$$

b) Aplicamos el <u>teorema de Bayes</u>:

$$P\left(\frac{B}{M}\right) = \frac{P(B\cap M)}{P(M)} = \frac{{}^{1}/_{2}\,.\,{}^{8}/_{20}}{0{,}325} = \mathbf{0{,}6154}$$

10. En una bolsa hay 10 caramelos de fresa, 15 de menta y 5 de limón. Se extraen sucesivamente de la bolsa dos caramelos. Se pide:

a) Determinar la probabilidad de que el segundo de ellos sea de fresa.

b) Determinar la probabilidad de que los dos sean de fresa.

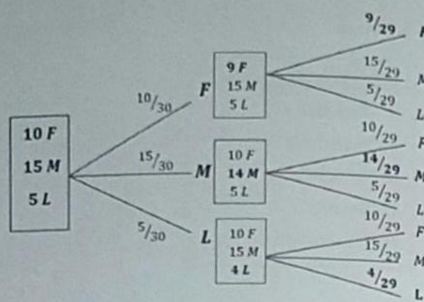
c) Sabiendo que el segundo ha sido de fresa, calcular la probabilidad de que lo haya sido también el primero.

Definimos los sucesos

F: "Fresa"

M: "Menta"

L: "Limón"



a) $P(F_2) = P(F_1) \cdot P\left(\frac{F_2}{F_1}\right) + P(M_1) \cdot P\left(\frac{F_2}{M_1}\right) + P(L_1) \cdot P\left(\frac{F_2}{L_1}\right)$

$$P(F_2) = \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} + \frac{15}{30} \cdot \frac{10}{29} + \frac{5}{30} \cdot \frac{10}{29} = \frac{3}{29} + \frac{5}{29} + \frac{5}{87} = 0,3333$$

b) $P(F_1 \cap F_2) = \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} = \frac{3}{29} = 0,1034$

c) Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \frac{P(F_1 \cap F_2)}{P(F_2)} = \frac{0,1034}{0,3333} = 0,3102$$

11. En un IES se va a organizar una excursión que consiste en una semana en la nieve. De los alumnos de bachillerato van a apuntarse 20 chicas y 25 chicos de un total de 43 chicas y 50 chicos. Si se elige un alumno al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea chica y vaya a la excursión.

b) Vaya a la excursión sabiendo que es chica.

c) Sea chica sabiendo que va a la excursión.

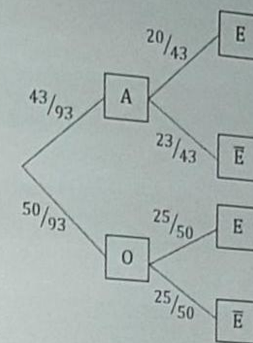
Definimos los sucesos

A: "Ser chica"

O: "Ser chico"

E: "Va a la excursión"

$\bar{E}$: "No va a la excursión"



a) $P(A \cap E) = \frac{43}{93} \cdot \frac{20}{43} = \frac{20}{93} = 0,2151$

b) $P\left(\frac{E}{A}\right) = \frac{20}{43}$

c) Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P\left(\frac{A}{E}\right) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{0,2151}{\frac{43}{93} \cdot \frac{20}{43} + \frac{50}{93} \cdot \frac{25}{50}} = \frac{0,2151}{0,4839} = 0,4445$$

¡¡Interesante!! Fíjate que en el apartado b) no tenemos que utilizar el teorema de Bayes mientras que en el apartado c) lo hemos empleado al movernos "al revés" en el árbol.