TEMA 6
ESPACIO AFÍN

¿Qué vamos a estudiar en este tema?

1. Ecuaciones de la recta

- Ecuaciones de la recta. Casos frecuentes
- ¿Cómo pasar la ecuación de la recta de forma implícita a paramétrica?
- ¿Cómo calcular el vector director de una recta en forma implícita?
- Pertenencia de un punto a una recta
- Ecuaciones de los ejes coordenados

2. Ecuaciones del plano

- Caso I. Ecuación del plano definido por un punto y dos vectores directores
- Caso II: Ecuación del plano definido por un punto y su vector normal
- Casos frecuentes para calcular la ecuación del plano
- Pertenencia de un punto a un plano
- Ecuaciones de los planos coordenados

3. Posiciones relativas

- 3.1. Posición relativa entre recta y plano

  ¿Cómo calcular el punto de corte entre una recta y un plano?
- 3.2. Posición relativa entre dos rectas

  ¿Cómo calcular el punto de corte entre dos rectas?
- 3.3. Posición relativa entre dos planos
- 3.4. Posición relativa entre tres planos
- 3.5. Ejercicios de posiciones relativas entre recta y/o plano con parámetros

1. Ecuaciones de la recta

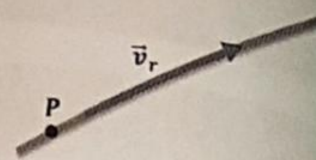
Una recta es una sucesión infinita y continua de puntos que se extiende en una misma dirección. Por lo tanto, una recta tiene una sola dimensión.

Para calcular la ecuación de una recta r **necesitaremos:**

- Un punto de la recta: P_r

- El vector director de la recta: $\vec{v}_r$

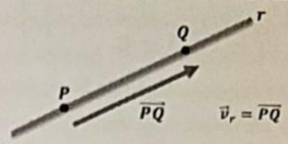
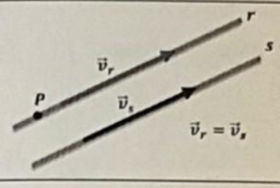
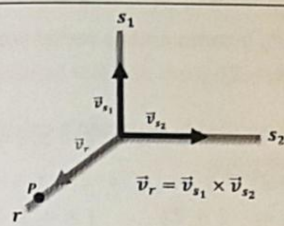
Importante



Se puede expresar la ecuación de una recta de distintas formas. ¡¡Veamos cada una de

Requisitos	Ejemplo
$P(P_x, P_y, P_z) \quad \vec{v}_r(v_x, v_y, v_z)$	$P(1, -3,\ 0) \quad \vec{v}_r(-2,\ 1,\ 4)$
Ecuación vectorial de la recta $r \equiv (x, y, z) = (P_x, P_y, P_z) + t(v_x, v_y, v_z)$	**Ecuación vectorial de la recta** $r \equiv (x, y, z) = (1, -3,\ 0) + t(-2,\ 1,\ 4$
Ecuación paramétrica de la recta $r \equiv \begin{cases} x = P_x + v_x \cdot t \\ y = P_y + v_y \cdot t \\ z = P_z + v_z \cdot t \end{cases}$ Muy importante	**Ecuación paramétrica de la recta** $r \equiv \begin{cases} x = \ \ 1 - 2t \\ y = -3 + 1t \\ z = \ \ 0 + 4t \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = \ \ 4t \end{cases}$
Ecuación continua de la recta $r \equiv \dfrac{x - P_x}{v_x} = \dfrac{y - P_y}{v_y} = \dfrac{z - P_z}{v_z}$	**Ecuación continua de la recta** $r \equiv \dfrac{x - 1}{-2} = \dfrac{y + 3}{1} = \dfrac{z - 0}{4}$
Ecuación general o implícita de la recta Se obtiene a partir de la ecuación continua, al coger dos igualdades de las tres posibles. Por lo tanto, toma la forma: $r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$	**Ecuación general o implícita de la recta** $1^{\underline{o}} \rightarrow \dfrac{x - 1}{-2} = \dfrac{y + 3}{1} \rightarrow 1(x - 1) = -2(y +$ $x - 1 = -2y - 6 \rightarrow x + 2y + 5 = 0$ $2^{\underline{o}} \rightarrow \dfrac{y + 3}{1} = \dfrac{z - 0}{4} \rightarrow 4(y + 3) = 1(z - 0);$ $4y + 12 = z \rightarrow 4y - z + 12 = 0$ $r \equiv \begin{cases} x + 2y + 5 = 0 \\ 4y - z + 12 = 0 \end{cases}$

Vamos a resumir en un cuadro, los casos frecuentes en la que nos pedirán calcular la ecuación de una recta y el consejo o pista que deberíamos tener en cuenta para resolverl

<u>Casos frecuentes</u> para calcular la ecuación de la recta r		
Caso	**Dibujo**	**Consejo o pista de resolución**
Recta que pasa por dos puntos P y Q (Ejercicio 1)		Disponemos ya de un punto de la recta P_r y el vector director $\vec{v}_r$ **será el mismo que el vector formado** $\overrightarrow{PQ}$: $\vec{v}_r = \overrightarrow{PQ}$
Recta que pasa por un punto P y es paralela a otra recta s (Ejercicio 2)		Disponemos ya de un punto de la recta P_r y **como ambas rectas son paralelas**, tienen el mismo vector director: $\vec{v}_r = \vec{v}_s$
Recta que pasa por un punto P y es perpendicular a la recta s_1 y s_2 (Ejercicio 3)		Disponemos ya de un punto de la recta P_r y **como las rectas son perpendiculares entre sí**, el vector director $\vec{v}_r$ **es el vector solución del producto vectorial de s_1 y s_2:** $\vec{v}_r = \vec{v}_{s_1} \times \vec{v}_{s_2}$

1. Calcula la ecuación de la recta, en todas sus formas posibles, que pasa por los puntos:

$$P(1,-1,\ 0) \quad \text{y} \quad Q(2,\ 0,\ 1)$$

Disponemos ya de un punto de la recta P_r y el vector director $\vec{v}_r$ **será el mismo que el vector formado** $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,\ 0,\ 1) - (1,-1,\ 0) = (\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1})$

Luego, $r\begin{cases} P_r(1,-1,\ 0) \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (1,\ 1,\ 1) \end{cases}$

Ecuación <u>vectorial</u> de la recta

$$r \equiv (x,y,z) = (1,-1,\ 0) + t(1,\ 1,\ 1)$$

Ecuación <u>paramétrica</u> de la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = \ \ 1 + 1t \\ y = -1 + 1t \\ z = \ \ 0 + 1t \end{cases} \equiv \begin{cases} x = \ \ 1 + t \\ y = -1 + t \\ \boxed{z = \qquad t} \end{cases}$$

¡¡OJO!! Cuando te den la ecuación paramétrica, no tienen por qué dártela con ese hueco... De hecho, en adelante no dejaremos el hueco pero debemos saber que ello significa que $P_z = 0$

Ecuación <u>continua</u> de la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-0}{1}$$

Ecuación general o implícita de la recta

$$1º \rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} \rightarrow x-1 = y+1 \rightarrow \boldsymbol{x-y-2=0}$$

$$2º \rightarrow \frac{y+1}{1} = \frac{z-0}{1} \rightarrow y+1 = z \rightarrow \boldsymbol{y-z+1=0}$$

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x-y-2=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}}$$

2. Calcula la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P(1,\ 0,-3)$ y es paralela a s:

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2}$$

Disponemos ya de un punto de la recta P_r **y como ambas rectas son paralelas, tienen el mismo vector director:** $\vec{v}_r = \vec{v}_s = (2,\ 1,-2)$

¡¡Interesante!! Como el enunciado no especifica la ecuación a calcular, podemos elegir la que queramos. La más útil suele ser la **paramétrica**:

Luego, $r \begin{cases} P_r(1,\ 0,-3) \\ \vec{v}_r(2,\ 1,-2) \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 0+1t \\ z = -3-2t \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = -3-2t \end{cases}$

3. Calcula la ecuación de la recta r que pasa por $A(1, 0, -2)$ y es perpendicular a las rectas:

$$s_1 \equiv \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s_2 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 1 \end{cases}$$

Disponemos ya de un punto de la recta A_r y **como la recta r es perpendicular a las otras dos rectas, el vector director $\vec{v}_r$ será el vector solución del producto vectorial** $\vec{v}_{s_1} \times \vec{v}_{s_2}$

Vectores directores de s_1 y s_2: $\vec{v}_{s_1} = (-1,\ 1,\ 1)$; $\vec{v}_{s_2} = (1,-1,\ 0)$

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{s_1} \times \vec{v}_{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0 + \vec{k} + \vec{j}) - (\vec{k} - \vec{i} - 0) = (\vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k})$$

$$\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\boxed{\vec{v}_r(1,\ 1,\ 0)}$$

Luego, $r \begin{cases} A_r(1,\ 0,-2) \\ \vec{v}_r(1,\ 1,\ 0) \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+1t \\ y = 0+1t \\ z = -2+0t \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = -2 \end{cases}$

¿Cómo pasar la ecuación de la recta de forma implícita a <u>paramétrica</u>?

¡¡Importante!!

En los apartados anteriores hemos visto que existen diferentes formas de expresar la ecuación de una recta. En todas ellas se pueden ver "a ojo" el vector director de la recta $\vec{v}_r$ y un punto de dicha recta P_r <u>excepto</u> en las ecuaciones <u>implícitas</u>. Por esta razón, es muy importante saber pasar la ecuación de la recta de forma implícita a paramétrica. **Para ello, tendremos que <u>parametrizar la recta</u> resolviendo el sistema compatible indeterminado (mediante Gauss) impuesto por la ecuación implícita para que dependa de un parámetro t.** Vamos a practicar transformando la siguiente recta r a forma paramétrica y deduciendo así su $\vec{v}_r$ y un punto P_r:

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y \qquad = 1 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} x \ +2y \ -z \ = \ 0 \ \ (E_1) \\ x \ \ +y \qquad = \ 1 \ \ (E_2) \end{cases} \Longrightarrow \quad E_2' = E_2 - E_1 \quad \Longrightarrow \begin{cases} x \ +2y \ -z \ = \ 0 \\ \qquad -y \ +z \ = \ 1 \end{cases}$$

Definimos $\boxed{z = t}$ y despejamos el resto de incógnitas de abajo a arriba:

$$\begin{cases} x \ +2y \ -z \ = 0 \to x + 2(t-1) - t = 0 \ \to \ x + 2t - 2 - t = 0 \to \ x = 2 - t \\ \qquad -y \ +z \ = 1 \to -y + t = 1 \to \ y = -1 + t \\ \qquad\qquad z \ = t \end{cases}$$

La ecuación de la recta en forma <u>paramétrica</u> será:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$$

Siendo un punto $P_r(2, -1, \ 0)$ y el vector director $\vec{v}_r(-1, \ 1, \ 1)$

¿Cómo calcular <u>directamente</u> $\vec{v}_r$ de una recta en forma implícita?

En el apartado anterior hemos visto cómo pasar la ecuación de la recta de forma implícita a paramétrica para obtener su vector director y un punto de dicha recta. Es un gran método, pero puede ocurrir que nos queden muchas fracciones en el vector director.

Para evitar trabajar con fracciones, podemos calcular $\vec{v}_r$ a través del <u>producto vectorial</u>:
(Dicho cálculo lo explicaremos y demostraremos cuando estudiemos la ecuación del plano)

Sea $r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \quad \to \quad \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}$

De esta manera, vamos a calcular el vector director $\vec{v}_r$ de la siguiente ecuación implícita:

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} -y + z = 2 \\ x - 2y = 3 \end{cases}} \to \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 0 + \vec{j}) - (-\vec{k} - 2\vec{i} + 0) = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}$$

$$\boxed{\vec{v}_r = (2, \ 1, \ 1)}$$

Pertenencia de un punto P a una recta r

Un punto P pertenece a la recta r ($P \in r$) si satisface las ecuaciones de la recta. De esta forma, si sustituimos $P(x,\ y,\ z)$ en la recta, podremos comprobar si pertenece o no a ella.
Además podemos obtener nuevos puntos de una recta (de los infinitos que hay) **asignando valores a dos de las variables de la ecuación en forma implícita y despejando la tercera.**

Comprueba si los puntos $A(-1,\ 4,\ 2)$ y $B(0,\ 1,\ 3)$ pertenecen a la recta r:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$$

$A(-1,\ 4,\ 2) \rightarrow$ **Sustituimos** $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$ **en** $r \rightarrow \begin{cases} -1 = 1 - t & \rightarrow \\ 4 = 2 + t & \rightarrow \\ 2 = t & \rightarrow \end{cases}$ $\boxed{\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 2 \rightarrow A \in r \\ t = 2 \end{array}}$

$B(0,\ 1,\ 3) \rightarrow$ **Sustituimos** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ **en** $r \rightarrow \begin{cases} 0 = 1 - t & \rightarrow \\ 1 = 2 + t & \rightarrow \\ 3 = t & \rightarrow \end{cases}$ $\boxed{\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \rightarrow B \notin r \\ t = 3 \end{array}}$

Ecuaciones de los ejes coordenados

Los ejes coordenados son las rectas que forman nuestros ejes de coordenadas:

Eje	Es la recta que pasa por:	Ecuación paramétrica	Ecuación general
OX	$O(0,0,0)$ y $\vec{v}_{OX}(1,\ 0,\ 0)$	$r_{OX} \equiv \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	$r_{OX} \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
OY	$O(0,0,0)$ y $\vec{v}_{OY}(0,\ 1,\ 0)$	$r_{OY} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 + t \\ z = 0 \end{cases}$	$r_{OY} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
OZ	$O(0,0,0)$ y $\vec{v}_{OZ}(0,\ 0,\ 1)$	$r_{OZ} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 + t \end{cases}$	$r_{OZ} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

El truco está en llamar cero a lo que no aparezca su nombre

2. Ecuaciones del plano

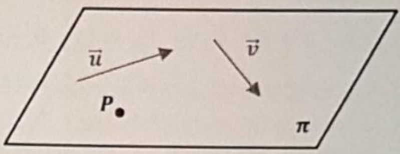
Un plano es una superficie infinita que contiene infinitos puntos y rectas. Por lo tanto, un plano tiene dos dimensiones.

Vamos a destacar **dos casos de interés** en el que quedan resumidos la mayoría de ejercicios:

Caso I: Ecuación del plano π definido por un punto P y dos vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$
Caso II: Ecuación del plano π definido por un punto P y su vector normal $\vec{n}$

Caso I. Ecuación del plano π definido por un punto P y dos vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

Si disponemos de un **punto P del plano π** y **dos vectores directores de dicho plano: $\vec{u}$** y **$\vec{v}$, directamente estamos en el caso I y podremos obtener fácilmente las ecuaciones del plano.**
¡¡OJO!! En un plano hay infinitos vectores directores, necesitamos dos que no sean proporcionales.



Se puede expresar la ecuación del plano de distintas formas. ¡¡Veamos cada una de ellas!!

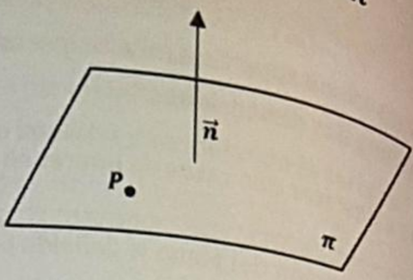
Requisitos	Ejemplo
$P(P_x, P_y, P_z)\ \ \vec{u}(u_x, u_y, u_z)\ \ \vec{v}(v_x, v_y, v_z)$	$P(1,-1,\ 0)\ \ \vec{u}(1,\ 1,\ 1)\ \ \vec{v}(0,\ 0,-1)$
Ecuación vectorial del plano $\pi \equiv (x,y,z) =$ $(P_x, P_y, P_z) + \alpha(u_x, u_y, u_z) + \beta(v_x, v_y, v_z)$	Ecuación vectorial del plano $\pi \equiv (x,y,z) =$ $(1,-1,\ 0) + \alpha(1,\ 1,\ 1) + \beta(0,\ 0,-1)$
Ecuación paramétrica del plano $\pi \equiv \begin{cases} x = P_x + u_x \cdot \alpha + v_x \cdot \beta \\ y = P_y + u_y \cdot \alpha + v_y \cdot \beta \\ z = P_z + u_z \cdot \alpha + v_z \cdot \beta \end{cases}$	Ecuación paramétrica del plano $\pi \equiv \begin{cases} x = \ \ 1 + 1\alpha + 0\beta \\ y = -1 + 1\alpha + 0\beta \\ z = \ \ 0 + 1\alpha - 1\beta \end{cases} \equiv \begin{cases} x = \ \ 1 + \alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = \ \ \alpha - \beta \end{cases}$
Ecuación general o implícita del plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ Se obtiene resolviendo el siguiente determinante e igualando a cero: $\begin{vmatrix} x - P_x & y - P_y & z - P_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0$ Muy importante	Ecuación general o implícita del plano $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$ $\begin{matrix} x-1 & y+1 & z-0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$ $= [-(x-1) + 0 + 0)] - [0 + 0 - (y+1)] =$ $= -x + 1 + y + 1 = -x + y + 2 = 0$ $\pi \equiv -x + y + 2 = 0$

¡¡FÍJATE!! No existe la ecuación continua del plano

Caso II: Ecuación del plano π definido por un punto P y su vector normal $\vec{n}$

El vector normal $\vec{n}$ de un plano es aquel vector perpendicular a dicho plano.

Así como los vectores directores de un plano son infinitos, **el vector normal es** **<u>único</u>**, por eso es el que usaremos para definir un plano.



Si conocemos la ecuación general o implícita del plano podremos sacarlo fácilmente ya que las **coordenadas del vector normal coinciden con los coeficientes de x, y, z en dicha ecuación:**

$$Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow \boxed{\vec{n}_\pi = (A, B, C)}$$

Por ejemplo:

$\pi \equiv x - z + 2 = 0 \rightarrow \vec{n}_\pi = (1,\ 0, -1)$

$\pi \equiv x - 2y + 3z + 4 = 0 \rightarrow \vec{n}_\pi = (1, -2,\ 3)$

¿Y a la inversa? Es decir.... **Si conociéramos el vector normal del plano y un punto del plano, ¿Podríamos obtener la ecuación del plano? ¡¡Claro que sí!!** Vamos a ver un ejemplo:

Calcula la ecuación del plano π definido por un punto $P(2, -1,\ 4)$ y $\vec{n}(1,\ 2,\ 3)$

Como hemos visto en el apartado anterior, si conocemos el vector normal del plano $\vec{n}(1,\ 2,\ 3)$, podremos obtener <u>**parte**</u> de la ecuación general o implícita del plano:

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow \pi \equiv 1x + 2y + 3z + D = 0$$

Como además disponemos de un punto del plano $P(2, -1,\ 4)$, podremos sustituir dicho punto en x, y, z y finalmente despejar D **para obtener la ecuación del plano π:**

$$\pi \equiv x + 2y + 3z + D = 0$$

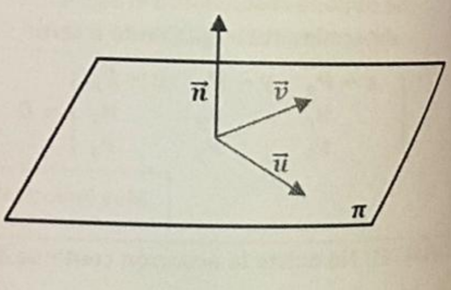
$$(2) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (4) + D = 0 \rightarrow 12 + D = 0 \rightarrow D = -12$$

$$\boxed{\pi \equiv x + 2y + 3z - 12 = 0}$$

¡¡Interesante!! **Fíjate que también podremos calcular el vector normal del plano $\vec{n}$ a través del producto vectorial de dos vectores directores contenidos en el plano:**

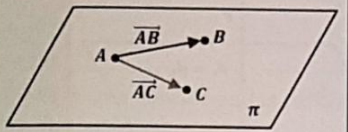
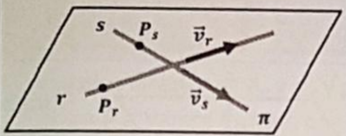
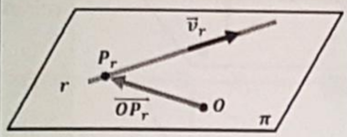
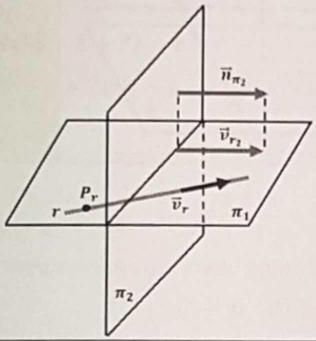
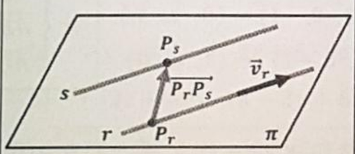
En el tema anterior vimos que el vector solución del producto vectorial de $\vec{u} \times \vec{v}$, es un vector perpendicular a ellos, es decir, en este caso será el vector normal $\vec{n}$

$$\boxed{\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}}$$



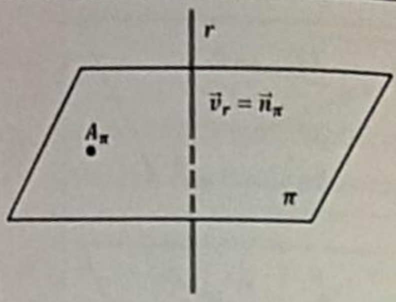
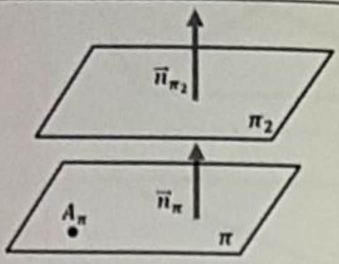
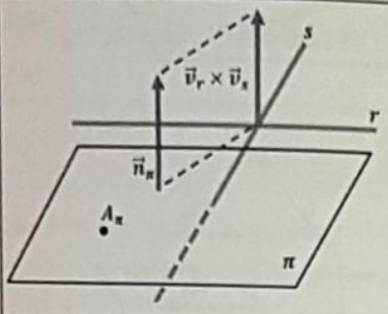
<u>Casos frecuentes</u> para calcular la ecuación del plano π

Casos II: Disponemos de un punto del plano y dos vectores directores

Caso	Dibujo	Consejo o pista de resolución
Ecuación del plano definida por tres puntos A, B, C (Ejercicio 1)		Disponemos ya de un punto del plano A y podremos construir dos vectores directores: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$
Ecuación del plano que contiene a dos rectas r y s que se cortan (Ejercicio 2)		Disponemos ya de dos vectores directores: $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ y podríamos elegir como punto de referencia del plano, tanto P_r como P_s
Ecuación del plano que contiene a una recta r y un punto O (Ejercicio 3)		Disponemos ya de un punto del plano O y el vector director $\vec{v}_r$ y **podremos construir el otro vector director con el punto del plano y de la recta: $\overrightarrow{OP_r}$**
Ecuación del plano que contiene a una recta r y es perpendicular a un plano π_2 (Ejercicio 4)		Disponemos ya de un vector director $\vec{v}_r$ y de un punto incluido en el plano P_r **y como los planos son perpendiculares, el vector normal de π_2 equivale al otro vector director del plano: $\vec{v}_{r_2} = \vec{n}_{\pi_2}$**
Ecuación del plano que contiene a dos rectas r y s que son paralelas (Ejercicio 5)		Disponemos ya de un vector director $\vec{v}_r$ y de un punto incluido en el plano P_r <u>sin embargo</u> no podemos usar $\vec{v}_s$ **como el otro vector director del plano porque son paralelos. Por lo tanto construimos un nuevo vector director con los puntos de las rectas: $\overrightarrow{P_rP_s}$** (Podríamos haber elegido como vector de referencia también $\vec{v}_s$)

<u>Casos frecuentes</u> para calcular la ecuación del plano π

Casos II: Disponemos de un punto del plano y su vector normal $\vec{n}$

Caso	Dibujo	Consejo o pista de resolución
Ecuación del plano que contiene un punto A y que es perpendicular a una recta r (Ejercicio 6)		Disponemos ya de un punto del plano A_π y como la recta es perpendicular al plano, el vector **director de la recta coincidirá con el vector normal del plano:** $\vec{n}_\pi = \vec{v}_r$
Ecuación del plano que pasa por un punto A y es paralelo a otro plano π_2 (Ejercicio 7)		Disponemos ya de un punto del plano A_π y como los planos son paralelos, **ambos tienen el mismo vector normal:** $\vec{n}_\pi = \vec{n}_{\pi_2}$
Ecuación del plano que pasa por un punto A y es paralela a una recta r, la cual es perpendicular a su vez a una recta s (Ejercicio 8)		Disponemos ya de un punto del plano A_π y como las rectas son perpendiculares entre sí y una de ellas paralela al plano, el vector resultante del producto vectorial de r y s, será el vector normal del plano: $\vec{n}_\pi = \vec{v}_r \times \vec{v}_s$

1. Calcula todas las ecuaciones del plano que pasan por los puntos:
$A\,(-1,\ 0,-1)$; $B\,(-1,\ 1,\ 0)$; $C\,(0,\ 0,-1)$

<u>Caso I</u>. Disponemos ya de un punto del plano A_π y podremos construir dos vectores directores: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 1\,,\ 0) - (-1,\ 0,-1) = (0,\ 1,\ 1)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 0,-1) - (-1,\ 0,-1) = (1,\ 0,\ 0)$$

$$\boxed{\pi \begin{cases} A_\pi = (-1,\ 0,-1) \\ \overrightarrow{AB} = (0,\ 1,\ 1) \\ \overrightarrow{AC} = (1,\ 0,\ 0) \end{cases}}$$

Ecuación <u>vectorial</u> del plano: $\pi \equiv (x,y,z) = (-1,\ 0,-1) + \alpha(0,\ 1,\ 1) + \beta(1,\ 0,\ 0)$

Ecuación <u>paramétrica</u> del plano: $\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + 0\alpha + 1\beta \\ y = \ \ 0 + 1\alpha + 0\beta \\ z = -1 + 1\alpha + 0\beta \end{cases} \equiv \begin{cases} x = -1 + \beta \\ y = \alpha \\ z = -1 + \alpha \end{cases}$

Ecuación general o implícita del plano:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} x+1 & y-0 & z+1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} = [0+0+(y-0)] - [(z+1)+0+0] \rightarrow \boldsymbol{y-z-1=0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\pi \equiv y-z-1=0}}$$

2. Calcula la ecuación del plano π que contiene a las rectas que se cortan:

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x+y-z=6 \\ x+z=3 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2}}$$

Caso I. Disponemos ya de dos vectores directores: $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ y podríamos elegir como punto de referencia del plano, tanto $\boldsymbol{P_r}$ como $\boldsymbol{P_S}$. Vamos a coger, por ejemplo, P_r:

Pero primero debemos pasar la ecuación de la recta r a paramétrica:

$$\begin{cases} x \; +y \; -z = 6 \; (E_1) \\ x \; +z = 3 \; (E_2) \end{cases} \Rightarrow E_2' = E_2 - E_1 \Rightarrow \begin{cases} x \; +y \; -z = 6 \\ -y \; +2z = -3 \end{cases}$$

Definimos $\boxed{z=t}$ y despejamos el resto de incógnitas de abajo a arriba:

$$\begin{cases} x \; +y \; -z = 6 \rightarrow x+\mathbf{3}+\mathbf{2t}-\boldsymbol{t}=6 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{x=3-t}} \\ -y \; +2z = -3 \rightarrow -y+2t=-3 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{y=3+2t}} \end{cases}$$

$r \equiv \begin{cases} x=3-t \\ y=3+2t \\ z=t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} P_r(3,\ 3,\ 0) \\ \vec{v}_r(-1,\ 2,\ 1) \end{cases}$	$s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2} \longrightarrow \begin{cases} P_s(1,-1,\ 0) \\ \vec{v}_s(-1,\ 6,\ 2) \end{cases}$

$$\pi \begin{cases} \boldsymbol{P_\pi = P_r(3,\ 3,\ 0)} \\ \boldsymbol{\vec{v}_r(-1,\ 2,\ 1)} \\ \boldsymbol{\vec{v}_s(-1,\ 6,\ 2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-3 & y-3 & z-0 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix} =$$

$$= [4\cdot(x-3) - 6z - 1(y-3)] - [-2z + 6\cdot(x-3) - 2\cdot(y-3)] =$$

$$= [4x-12-6z-y+3] - [-2z+6x-18-2y+6] \rightarrow \boldsymbol{-2x+y-4z+3=0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\pi \equiv -2x+y-4z+3=0}}$$

¡¡Consejo!! Cuando el determinante es grande, es recomendable hacer la comprobación...

Como ya veremos después, el punto debe satisfacer (cumplir) las ecuaciones del plano:

$P_r(3,\ 3,\ 0) \in -2x+y-4z+3=0 \rightarrow -2\cdot(\mathbf{3})+(\mathbf{3})-4\cdot(\mathbf{0})+3=0 \rightarrow \boxed{\mathbf{0=0}}$

3. **Calcula la ecuación del plano π que contiene a la recta r y pasa por el origen**

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Caso II. Disponemos ya de un punto del plano $O(0,\ 0,\ 0)$ y el vector director $\vec{v}_r$ y **podremos construir el otro vector director con el punto del plano y de la recta:** $\overrightarrow{OP_r}$

Pero primero debemos pasar la ecuación de la recta r a paramétrica:

$$\begin{cases} x \ +2y \ -z = 3 \ (E_1) \\ 2x \ -y \ +z = 1 \ (E_2) \end{cases} \Rightarrow E_2' = E_2 - 2E_1 \Rightarrow \begin{cases} x \ +2y \ -z = 3 \\ \quad -5y \ +3z = -5 \end{cases}$$

¡¡Interesante!! Como vemos que nos van a salir fracciones si continuamos con el ejercicio, vamos a volver a hacer Gauss pero eliminando otra variable que no sea la x. Por ejemplo, la z:

$$\begin{cases} x \ +2y \ -z = 3 \ (E_1) \\ 2x \ -y \ +z = 1 \ (E_2) \end{cases} \Rightarrow E_2' = E_2 + E_1 \Rightarrow \begin{cases} x \ +2y \ -z = 3 \\ 3x \ +y \quad = 4 \end{cases}$$

Definimos $\boxed{x = t}$ y despejamos el resto de incógnitas de abajo a arriba:

$$\begin{cases} x \ +2y \ -z = 3 \ \to \ t + 2\cdot(4-3t) - z = 3 \ \to \ t + 8 - 6t - z = 3 \ \to \ \boxed{z = 5 - 5t} \\ 3x \ +y \quad = 4 \ \to \ 3t + y = 4 \ \to \ \boxed{y = 4 - 3t} \end{cases}$$

$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 4 - 3t \\ z = 5 - 5t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} P_r(0,\ 4,\ 5) \\ \vec{v}_r(1, -3, -5) \end{cases}$	$\overrightarrow{OP_r} = P_r - O = (0,\ 4,\ 5)$

$$\pi \begin{cases} O_\pi(0,\ 0,\ 0) \\ \vec{v}_r(1, -3, -5) \\ \overrightarrow{OP_r}(0,\ 4,\ 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & -3 & -5 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & -3 & -5 \end{matrix}$$

$$= [-15x + 4z + 0] - [0 - 20x + 5y] \to \mathbf{5x - 5y + 4z = 0}$$

$$\boxed{\pi \equiv 5x - 5y + 4z = 0}$$

4. Calcula la ecuación del plano π que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π_2

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases} \qquad \pi_2 \equiv 2x - y = 2$$

<u>**Caso I**</u>. Disponemos ya de un vector director $\vec{v}_r$ y de un punto incluido en el plano P_r **y como los planos son <u>perpendiculares</u>, el vector normal de π_2 equivale al otro vector director del plano: $\vec{v}_{r_2} = \vec{n}_{\pi_2}$**

Pero primero debemos pasar la ecuación de la recta r a <u>paramétrica</u> (definiendo $\boxed{z = t}$):

$$\begin{cases} \boxed{x = 1} \\ y - 2z = 2 \;\rightarrow\; y - 2t = 2 \;\rightarrow\; \boxed{y = 2 + 2t} \end{cases}$$

$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2t \\ z = t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} P_r(1,\ 2,\ 0) \\ \vec{v}_r(0,\ 2,\ 1) \end{cases}$	$\vec{v}_{r_2} = \vec{n}_{\pi_2} = (2, -1,\ 0)$

$$\pi \begin{cases} P_\pi = P_r(1,\ 2,\ 0) \\ \vec{v}_r(0,\ 2,\ 1) \\ \vec{v}_{r2}(2, -1,\ 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix}$$

$$= [0 + 0 + 2 \cdot (y - 2)] - [4z - 1 \cdot (x - 1) + 0] =$$

$$= 2y - 4 - 4z + x - 1 \rightarrow \mathbf{x + 2y - 4z - 5 = 0}$$

$$\boxed{\pi \equiv x + 2y - 4z - 5 = 0}$$

5. **Calcula la ecuación del plano π que contiene a las rectas paralelas:**

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases}$$

Caso I. Disponemos ya de un vector director $\vec{v}_r$ y de un punto incluido en el plano P_r sin embargo no podemos usar $\vec{v}_s$ **como el otro vector director porque son paralelos.**
Por lo tanto construimos un nuevo vector director con los puntos de las rectas: $\overrightarrow{P_rP_s}$
(Podríamos haber elegido como vector de referencia también $\vec{v}_s$)

$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} P_r(1,\ 0,\ 0) \\ \vec{v}_r(-1,\ 0,\ 1) \end{cases}$	$s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} P_s(0,\ 2,\ 0) \\ \vec{v}_s(1,\ 0, -1) \end{cases}$
$\overrightarrow{P_rP_s} = P_s - P_r = (0,\ 2,\ 0) - (1,\ 0,\ 0) = (-1,\ 2,\ 0)$	

$$\pi \begin{cases} P_r(1,\ 0,\ 0) \\ \vec{v}_r(-1,\ 0,\ 1) \\ \overrightarrow{P_rP_s}(-1,\ 2,\ 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= [0 - 2z - y] - [0 + 2 \cdot (x-1) + 0] = -2z - y - 2x + 2 \rightarrow -2x - y - 2z + 2 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv -2x - y - 2z + 2 = 0} \rightarrow \boxed{\pi \equiv 2x + y + 2z - 2 = 0}$$

Podemos cambiar el signo a todos para que quede "mejor"

6. **Calcula la ecuación del plano que contiene al punto $A\ (0,\ 3, -1)$ y es perpendicular a la recta r:**

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-1}$$

Caso II. Disponemos ya de un punto del plano A_π y como la recta es perpendicular al plano, **el vector director de la recta coincidirá con el vector normal del plano:** $\vec{n}_\pi = \vec{v}_r$

$$\pi \begin{cases} \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (2,\ 1, -1) \\ A_\pi(0,\ 3, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2x + 1y - 1z + D = 0 \\ 2 \cdot (0) + 1 \cdot (3) - 1 \cdot (-1) + D = 0 \rightarrow 4 + D = 0 \rightarrow D = -4 \end{matrix}$$

$$\boxed{\pi \equiv 2x + y - z - 4 = 0}$$

7. Calcula la ecuación del plano π que es paralelo al plano $\boldsymbol{\pi_2 \equiv 2x - 3y + z - 5 = 0}$ y pasa por $\boldsymbol{P(1, 2, 1)}$

<u>Caso II</u>. Disponemos ya de un punto del plano $\boldsymbol{P_\pi}$ y como los planos son paralelos, **ambos tienen el mismo vector normal:** $\boldsymbol{\vec{n}_\pi = \vec{n}_{\pi_2}} = (2, -3,\ 1)$

$$\pi \begin{cases} \vec{n}_\pi(2, -3,\ 1) \\ P_\pi\ (1,\ 2,\ 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x - 3y + 1z + D = 0 \\ 2 \cdot (\mathbf{1}) - 3 \cdot (\mathbf{2}) + 1 \cdot (\mathbf{1}) + D = 0 \ \rightarrow\ -3 + D = 0 \ \rightarrow\ \boldsymbol{D = 3} \end{array}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\pi \equiv 2x - 3y + z + 3 = 0}}$$

8. Calcula la ecuación del plano que pasa por un punto $A(1,\ 0, -1)$, y es paralela a una recta r, la cual es perpendicular a su vez a una recta s:

$$\boldsymbol{r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1}} \qquad \boldsymbol{s \equiv \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 3t \\ z = -1 \end{cases}}$$

<u>Caso II</u>. Disponemos ya de un punto del plano $\boldsymbol{A_\pi}$ y como las rectas son perpendiculares entre sí y una de ellas paralela al plano, el vector resultante del producto vectorial de r y s, será el vector normal del plano: $\boldsymbol{\vec{n}_\pi = \vec{v}_r \times \vec{v}_s}$

$r \equiv \left\{\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{1} \longrightarrow \begin{cases} P_r(1, -2,\ 1) \\ \vec{v}_r(1,\ 3,\ 1) \end{cases}\right.$	$s \equiv \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 3t \\ z = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} P_s(1,\ 0, -1) \\ \vec{v}_s(-3,\ 3,\ 0) \end{cases}$

$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0\vec{\imath} + 3\vec{k} - 3\vec{\jmath}) - (-9\vec{k} + 3\vec{\imath} - 0\vec{\jmath}) = \boldsymbol{-3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 12\vec{k}}$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 1 \end{array}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{n}_\pi(-3, -3,\ 12)}}$$

$$\pi \begin{cases} \vec{n}_\pi(-3, -3,\ 12) \\ A_\pi\ (1,\ 0, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} -3x - 3y + 12z + D = 0 \\ -3(\mathbf{1}) - 3(\mathbf{0}) + 12(\mathbf{-1}) + D = 0 \ \rightarrow\ \boldsymbol{D = 15} \end{array}$$

$$\boxed{\pi \equiv -3x - 3y + 12z + 15 = 0} \ \rightarrow\ \boxed{\boldsymbol{\pi \equiv -x - y + 4z + 5 = 0}}$$

Podemos simplificar para que quede "mejor"

Pertenencia de un punto P a un plano π

Un punto P pertenece al plano π ($P \in \pi$) si satisface las ecuaciones del plano. De esta forma, si sustituimos $P(x,\ y,\ z)$ en el plano, podremos comprobar si pertenece o no a él. Además podemos obtener <u>**nuevos puntos**</u> de un plano (de los infinitos que hay) asignando **valores a dos de las variables de la ecuación en forma implícita y despejando la tercera.**

Sea el plano $\pi \equiv x + y - 2z + 3 = 0$, comprobar si los puntos $A(-2,\ 1,\ 1)$ y $B(2,-1,\ 3)$ pertenecen a π y obtener dos puntos nuevos C y D

$$A(-2,\ 1,\ 1) \rightarrow \text{Sustituimos} \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \text{en } \pi \rightarrow (-2) + (1) - 2(1) + 3 = 0 \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} 0 = 0 \\ A \in \pi \end{array}}$$

$$B(2,-1,\ 3) \rightarrow \text{Sustituimos} \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \text{en } \pi \rightarrow (2) + (-1) - 2(3) + 3 = 0 \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} -2 \neq 0 \\ B \notin \pi \end{array}}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 1 \cdot (0) + 1 \cdot (0) - 2z + 3 = 0 \rightarrow z = {}^{3}/_{2} \rightarrow \boxed{C\left(0,\ 0,\ \frac{3}{2}\right) \in \pi}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow 1 \cdot (0) + 1 \cdot (1) - 2z + 3 = 0 \rightarrow z = 2 \rightarrow \boxed{D(0,\ 1,\ 2) \in \pi}$$

¡¡Recuerda!! Podríamos haber dado valores a otras variables, ya que tenemos infinitos puntos.

Ecuaciones de los planos coordenados

Los planos coordenados son los planos que forman nuestros ejes de coordenadas:

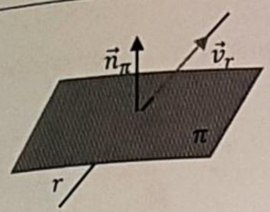
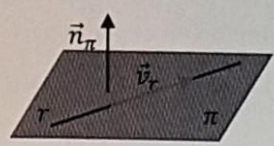
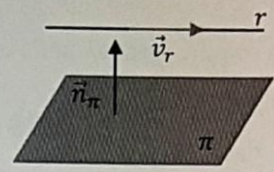
Plano	Es el plano que pasa por:	Ecuación paramétrica	Ecuación general
XY	$O\ (0,0,0)\ ;\ \vec{v}_{OX}(1,\ 0,\ 0)$ y $\vec{u}_{OY}(0,\ 1,\ 0)$	$\pi_{XY} \equiv \begin{cases} x = 0 + \alpha \\ y = 0 + \beta \\ z = 0 \end{cases}$	$\pi_{XY} \equiv z = 0$
XZ	$O\ (0,0,0)\ ;\ \vec{v}_{OX}(1,\ 0,\ 0)$ y $\vec{u}_{OZ}(0,\ 0,\ 1)$	$\pi_{XZ} \equiv \begin{cases} x = 0 + \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 + \beta \end{cases}$	$\pi_{XZ} \equiv y = 0$
YZ	$O\ (0,0,0)\ ;\ \vec{v}_{OY}(0,\ 1,\ 0)$ y $\vec{u}_{OZ}(0,\ 0,\ 1)$	$\pi_{YZ} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 + \alpha \\ z = 0 + \beta \end{cases}$	$\pi_{YZ} \equiv x = 0$

El truco está en llamar cero a lo que no aparezca su nombre

3. Posiciones relativas

3.1. Posición relativa entre recta y plano

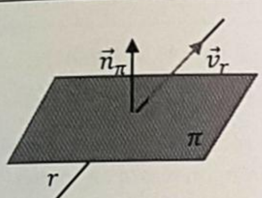
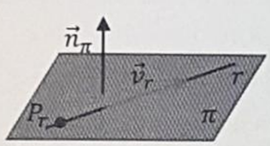
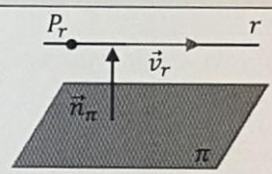
Una recta (r) y un plano (π) pueden disponerse de las siguientes tres formas:

		
La recta y el plano son secantes	**La recta está contenida en el plano**	**La recta es paralela al plano**

En función de la expresión de la <u>ecuación de la recta</u>, distinguiremos **<u>dos casos</u>** para estudiar la posición relativa entre recta y plano:

Caso A: **Si la ecuación está en forma vectorial, paramétrica o continua (es decir, <u>no general</u>):**

Estudiamos la posición relativa calculando el **producto escalar entre $\vec{v}_r$ y $\vec{n}_\pi$** de manera que si:

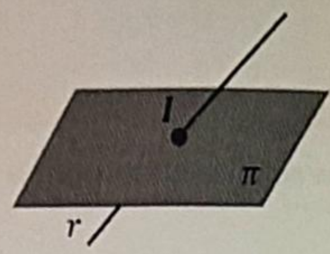
$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi \neq 0$ $\vec{v}_r$ **<u>no</u> es perpendicular a $\vec{n}_\pi$**	$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$ $\vec{v}_r$ **<u>sí</u> es perpendicular a $\vec{n}_\pi$**	
Sabremos que **<u>la recta y el plano son secantes</u>** (se cortan en un punto)	Si además, P_r está contenido en π, sabremos que **<u>la recta está contenida en el plano</u>** (se cortan en infinitos puntos)	Si P_r no está contenido en π, sabremos que **<u>la recta es paralela al plano</u>** (No tienen ningún punto en común)
		

¡¡Vamos a practicar con un ejemplo!!

Calcula la posición relativa entre la recta (r) y plano (π):

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -1 - t \end{cases} \qquad \pi \equiv x - y + z + 2 = 0$$

¿Cómo calcular el punto de corte I entre una recta y un plano?



Caso A: **Si la ecuación está en forma vectorial, paramétrica o continua (es decir, no general):**

Ya hemos estudiado que una recta r se corta con un plano π cuando $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi \neq 0$

En este caso, calculamos el **punto de corte** a través de un **punto genérico** de la recta: $I(x, y, z)$
Un punto genérico es aquel punto que estoy buscando al cual le impongo una condición determinada. En este caso la condición será la pertenencia al plano para que sea el punto de corte entre recta y plano. De esta forma, sustituimos dicho punto en el plano para calcular el parámetro y obtener finalmente el punto de corte I.

Caso B: **Si la recta está en forma general:**

Ya hemos estudiado que una recta r se corta con un plano π cuando, para el sistema formado por sus ecuaciones, se cumple que: $Rg(A) = Rg(A^*) = 3$

En este caso, calculamos el punto de corte resolviendo el sistema compatible determinado.

¡¡Vamos a ver un ejemplo de cada caso!!

Calcula el punto de corte entre el plano $\boldsymbol{\pi \equiv x + z - 3 = 0}$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$

Caso A: **La recta está en forma paramétrica:**

Calculamos el **punto de corte** a través de un **punto genérico** $I(x,\ y,\ z)$ **de la recta:**

$$I(x,\ y,\ z) \rightarrow \boxed{I(1+t,\ 2+t,\ t)}$$

Sustituimos dicho punto en el plano para calcular el parámetro y obtener el punto de corte I:

$$\pi \equiv x + z - 3 = 0 \rightarrow (1+t) + (t) - 3 = 0 \rightarrow 2t - 2 = 0 \rightarrow \boxed{t = 1}$$

$$\boxed{I(1+t,\ 2+t,\ t)} \longrightarrow \boxed{I(2,\ 3,\ 1)}$$

Calcula el punto de corte entre el plano $\pi \equiv x + y - 2 = 0$ y la recta $r = \begin{cases} y + z - 3 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$

Caso B: **La recta está en forma general.**

Formamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas con las ecuaciones de la recta y el plano y las soluciones nos dará el punto donde la recta se corte con el plano.

Podemos resolver el sistema compatible determinado mediante el método de Gauss:

Ordenamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 3 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 2 \ (E_1) \\ y + z = 3 \ (E_2) \\ x + z = 3 \ (E_3) \end{cases} \Rightarrow E_3' = E_3 - E_1 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 0 + y + z = 3 \\ 0 - y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \ (E_1) \\ y + z = 3 \ (E_2') \\ -y + z = 1 \ (E_3') \end{cases} \Rightarrow E_3'' = E_3' + E_2' \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 3 \\ 0 + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \quad 3) \\ y + z = 3 \quad 2) \\ 2z = 4 \quad 1) \end{cases}$$

Ya hemos triangulado, así que podemos resolvemos el sistema de ecuaciones obteniendo las variables **de abajo a arriba**

1) $z = \frac{4}{2} \rightarrow \boxed{z = 2}$

2) $y + z = 3 \rightarrow y + 2 = 3 \rightarrow \boxed{y = 1}$

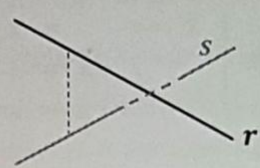
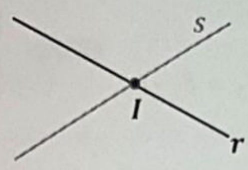
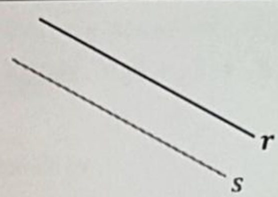
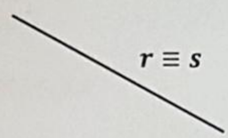
3) $x + y = 2 \rightarrow x + 1 = 2 \rightarrow \rightarrow \boxed{x = 1}$

El punto de corte será: $\boxed{I(1, \ 1, \ 2)}$

3.2. Posición relativa entre dos rectas

Para estudiar la posición relativa entre una recta r y una recta s, **formamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas con los vectores directores de las rectas ($\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$) y un vector formado por un punto P de cada recta ($\overrightarrow{P_rP_s}$) y lo expresamos como las matrices A y A^*.** De esta forma, **podremos determinar la posición relativa calculando el rango de las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{pmatrix} \qquad\qquad A^* = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix}$$

$Rg(A^*) = 3$ Los tres vectores no estan en el mismo plano		**Las rectas se cruzan**
$Rg\ (A) = Rg(A^*) = 2$ Los tres vectores están en el mismo plano		**Las rectas son secantes (se cortan en un punto)**
$Rg\ (A) = 1 \neq Rg(A^*) = 2$ Dos vectores son proporcionales o iguales		**Las rectas son paralelas**
$Rg\ (A) = Rg(A^*) = 1$ Los tres vectores son proporcionales o iguales		**Las rectas son coincidentes**

Estudia la posición relativa entre las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -t \end{cases}$

¡¡CONSEJO!! Aunque el enunciado ponga el mismo parámetro (t) en las dos rectas, es conveniente cambiar uno de ellos para evitar confusiones y errores.

$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,\ 2,\ 0) \\ \vec{v}_r(1, -1,\ 1) \end{cases}$	$s \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_s(3,\ 3,\ 0) \\ \vec{v}_s(1,\ 2, -1) \end{cases}$
$\overrightarrow{P_rP_s} = P_s - P_r = (3,\ 3,\ 0) - (1,\ 2,\ 0) = (2,\ 1,\ 0)$	

- Formamos las matrices A y A^* con los vectores anteriores:

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculamos el rango de las matrices para determinar la posición relativa entre las rectas:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 1 + 2) - (4 - 1 + 0) = 0$$
$$\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{matrix}$$

Como la matriz A^* tiene el determinante $3x3 = 0$, el $rg(A^*)$ no puede ser 3

Por lo tanto, ahora buscamos un determinante 2x2 que sea distinto de cero:

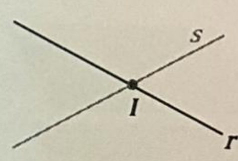
$$A^* = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 1 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$$

Como la matriz A^* tiene un determinante $2x2 \neq 0$, el $rg(A^*) = 2$

Estudiamos el rango de A:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$$

Como la matriz A tiene un determinante $2x2 \neq 0$, el $rg(A) = 2$

$Rg\ (A) = Rg(A^*) = 2$ Los tres vectores están en el mismo plano		Las rectas se cortan en un punto

¿Cómo calcular el punto de corte I entre dos rectas?

El punto de corte es el <u>único</u> **punto común** para las dos rectas, por lo tanto **podemos coger un punto genérico de <u>una</u> de las rectas: $I(x, y, z)$ y sustituirlo en la <u>otra recta</u> para calcular el parámetro y obtener finalmente el punto de corte I.**

Usando como ejemplo las dos rectas anteriores **que ya sabemos que se cortan:**

$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$	$s \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$

Calculamos el <u>punto de corte</u> a través de un <u>punto genérico</u> $I(x,\ y,\ z)$ **de <u>una</u> de las rectas:**

$$I(x,\ y,\ z) \rightarrow \boxed{I(1+t,\ 2-t,\ t)}$$

Sustituimos dicho punto en la <u>otra recta</u> para calcular el parámetro y obtener I:

$$1 + t \ = \ 3 + \lambda$$

$$2 - t \ = \ 3 + 2\lambda \ \rightarrow \ 2 + \lambda = 3 + 2\lambda \ \rightarrow \ \boxed{\lambda = -1}$$

$$\boxed{t \ = \ -\lambda} \rightarrow \boxed{t = 1} \rightarrow$$

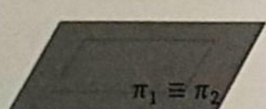
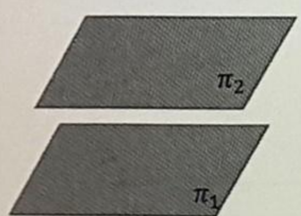
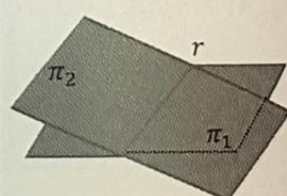
El punto de corte entre las rectas r y s es $I(2,\ 1,\ 1)$

¡¡Interesante!! **Podríamos haberlo calculado igual usando la otra recta y el otro parámetro**

3.3. Posición relativa entre dos planos

Para estudiar la posición relativa entre dos planos, utilizaremos sus vectores normales y comprobaremos si son proporcionales o no:

$\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$

$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$	**El resto de los casos**
Sabremos que **<u>los planos son coincidentes</u>**	Sabremos que **<u>los planos son paralelos</u>**	Sabremos que **<u>los planos son secantes</u> (se cortan formando una recta)**
		

Estudia la posición relativa entre los siguientes pares de planos:

a) $\begin{cases} \pi_1: 2x - 4y + 6z - 4 = 0 \\ \pi_2: \ x - 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \dfrac{2}{1} = \dfrac{-4}{-2} = \dfrac{6}{3} = \dfrac{-4}{-2} \rightarrow$ **Los planos π_1 y π_2 son coincidentes($\pi_1 \equiv \pi_2$)**

b) $\begin{cases} \pi_1: 2x + 6y - 4z - 8 = 0 \\ \pi_2: \ x + 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \dfrac{2}{1} = \dfrac{6}{3} = \dfrac{-4}{-2} \neq \dfrac{-8}{4} \rightarrow$ **Los planos π_1 y π_2 son paralelos ($\pi_1 \parallel \pi_2$)**

c) $\begin{cases} \pi_1: 2x + 8y - 3z - 4 = 0 \\ \pi_2: \ x + 4y - 2z - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \dfrac{2}{1} = \dfrac{8}{4} \neq \dfrac{-3}{-2} \neq \dfrac{-4}{-3} \rightarrow$ **Los planos π_1 y π_2 son secantes en una recta ($\pi_1 \nparallel \pi_2$)**

d) $\begin{cases} \pi_1: 2x - 4y + 2z = 0 \\ \pi_2: \ x - 2y + \ z = 0 \end{cases} \rightarrow \dfrac{2}{1} = \dfrac{-4}{-2} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ **Los planos π_1 y π_2 son coincidentes($\pi_1 \equiv \pi_2$)**

¡¡Interesante!!OJO

3.4. Posición relativa entre tres planos

Para estudiar la posición entre tres planos, **formamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas con las ecuaciones de los planos y lo expresamos como las matrices A y A^*.** **Discutimos el sistema por el teorema de Rouché Frobenius,** para lo cual calculamos el rango de las matrices:

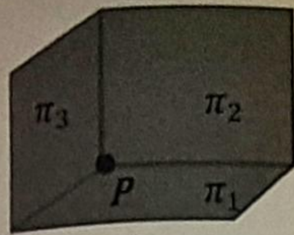
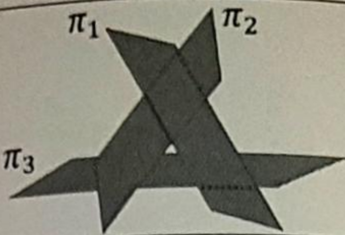
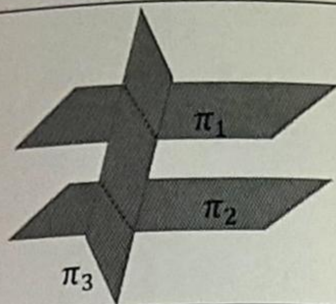
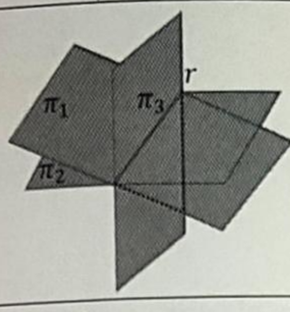
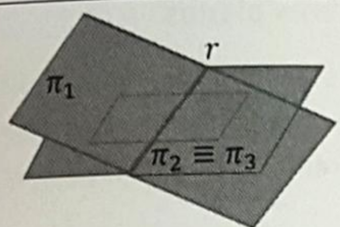
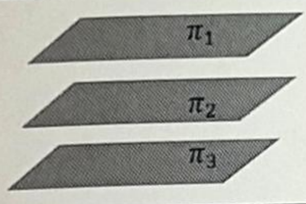
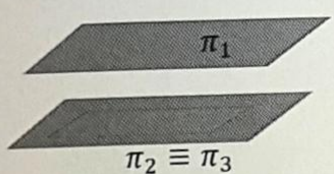
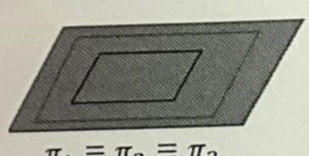
$\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

$\pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$

$\pi_3 \equiv A''x + B''y + C''z + D'' = 0$

$$\begin{cases} Ax & +By & +Cz & = & -D \\ A'x & +B'y & +C'z & = & -D' \\ A''x & +B''y & +C''Z & = & -D'' \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{pmatrix}$$

¡¡En el siguiente cuadro vamos a ver las diferentes posibilidades!!

<table>
<tr><td>$Rg(A) = Rg(A^*) = 3$
S.C.D (Única solucion)
Los tres planos tienen un solo punto en común, que es la solución del sistema</td><td></td><td>Los tres planos se cortan en un punto</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$Rg(A) = 2 \neq Rg(A^*) = 3$
S.I. (No hay solución)</td><td></td><td>Los planos se cortan dos a dos</td></tr>
<tr><td></td><td>Dos planos son paralelos y el otro es secante</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$Rg(A) = Rg(A^*) = 2$
S.C.I (infinitas soluciones)
Los tres planos tienen infinitos puntos en comun, que son las soluciones del sistema</td><td></td><td>Los tres planos son secantes (se cortan formando una recta)</td></tr>
<tr><td></td><td>Dos planos son coincidentes y el otro es secante (siguen cortándose en una recta)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$Rg(A) = 1 \neq Rg(A^*) = 2$
S.I. (No hay solución)</td><td></td><td>Los tres planos son paralelos</td></tr>
<tr><td></td><td>Dos planos son coincidentes y el otro es paralelo</td></tr>
<tr><td>$Rg(A) = Rg(A^*) = 1$
S.C.I (infinitas soluciones)
Los tres planos tienen infinitos puntos en comun, que son las soluciónes del sistema</td><td></td><td>Los tres planos son coincidentes</td></tr>
</table>

Estudia la posición relativa de los siguientes planos:
π_1: $2x - y - z = 0$; π_2 $-x + z = 0$; π_3 $x - y = 1$

- Formamos las matrices A y A^* con las ecuaciones de los planos:

$$A^* = \left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}}_{\boxed{A}} \;\middle\vdots\; \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right)$$

- <u>Discutimos</u> el sistema por el método de teorema de Rouché Frobenius, para lo cual debemos calcular el rango de las matrices A y A^*:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 1 - 1) - (0 - 2 + 0) = 0$$
$$\begin{matrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Como la matriz A tiene el determinante $3x3 = 0$, el $rg(A)$ <u>no</u> puede ser 3

Por lo tanto, ahora buscamos un determinante 2x2 que sea distinto de cero:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & -1 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

Como la matriz A tiene un determinante $2x2 \neq 0$, el $rg(A) = 2$

Como $rg\ (A)$ vale dos, sabemos que el $rg\ (A^*)$ podría ser dos o tres. Ahora buscamos un determinante que <u>**incluya**</u> este determinante 2x2 distinto de cero y el término independiente:

$$A^* = \left(\boxed{\begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{matrix}} \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \;\vdots\; \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} \right) \longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 1) = -1$$
$$\begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Como la matriz A^* tiene un determinante $3x3 \neq 0$, el $rg(A^*) = 3$

$rg\ (A) = 2 \neq rg\ (A^*) = 3$	**Sistema incompatible**	**No tiene solución**

Los planos no tienen ningún punto en común, pero aún debemos comprobar si se cortan dos a dos, o si dos planos son paralelos y el otro es secante a ellos. **Comprobamos <u>planos paralelos</u>:**

$$\pi_1 \text{ y } \pi_2 \begin{cases} \pi_1: 2x - y - z = 0 \\ \pi_2: -x + z = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{2}{-1} \neq \frac{-1}{0} \rightarrow \textbf{Secantes}$$

$$\pi_1 \text{ y } \pi_3 \begin{cases} \pi_1: 2x - y - z = 0 \\ \pi_3: x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{-1} \rightarrow \textbf{Secantes}$$

Al no haber ningún plano paralelo, significa que los <u>planos se cortan dos a dos</u>

$$\pi_2 \text{ y } \pi_3 \begin{cases} \pi_2: -x + z = 0 \\ \pi_3: x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \frac{-1}{1} \neq \frac{0}{-1} \rightarrow \textbf{Secantes}$$

3.5. Ejercicios de posiciones relativas entre recta y/o plano con parámetros:

1. Estudia la posición relativa entre la recta r y el plano π dependiendo de los valores de a

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \pi \equiv ax + y - z + 4 = 0$$

Caso A: Como la ecuación de la recta está en forma paramétrica, estudiamos la posición relativa calculando el producto escalar entre $\vec{v}_r$ y $\vec{n}_\pi$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,\ 1,\ 0) \\ \vec{v}_r(-1,\ 2,\ 1) \end{cases} \qquad \pi \equiv ax + y - z + 4 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\pi(a,\ 1, -1)$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (-1,\ 2,\ 1) \cdot (a,\ 1, -1) = -a + 2 - 1 = -a + 1 = 0 \ \rightarrow a = 1$$

Si $a \neq 1 \rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi \neq 0 \rightarrow$ **La recta y el plano son secantes**

Si $a = 1 \rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \rightarrow$ **La recta está contenida en el plano o es paralela a ella**

Vamos a estudiar si P_r está contenida en π:

$$\begin{matrix} \pi \equiv ax + y - z + 4 = 0 \\ P_r(1,\ 1,\ 0) \end{matrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 1 \cdot (1) + (1) - (0) + 4 = 0 \\ \boxed{6 \neq 0} \end{matrix} \right. \rightarrow \boxed{P_r \text{ no está contenida en } \pi}$$

Si $a = 1 \rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \rightarrow$ **La recta es paralela al plano**

2. Sea m un número real y sean r y π una recta y un plano definidos por:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - my + z = 2 - m \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \qquad \pi \equiv 3x + 2z = 2 - m$$

Estudia la posición relativa entre r y π en función de m

Caso B: Como la ecuación está en forma general, formamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas con las ecuaciones del plano y la recta y lo expresamos como las matrices A y A^*:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 0 & 2 & 2 - m \\ 2 & -m & 1 & 2 - m \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\underbrace{}_{\boxed{A}}$$

__**Discutimos**__ **el sistema por el teorema de Rouché Frobenius**, para lo cual calculamos el rango de las matrices matrices A y A^*:

Calculamos los valores de m para los cuales $|A| = 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -m & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3m + 8 + 0) - (-2m + 6 + 0) = -m + 2 = 0 \rightarrow \boldsymbol{m = 2}$$

$$\begin{matrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{-m} & \mathbf{1} \end{matrix}$$

Si $\boldsymbol{m \neq 2} \rightarrow$ $|A| \neq 0$ $\rightarrow$ Determinante $3x3 \neq 0 \rightarrow$ $\boldsymbol{rg(A) = 3}$	
Como $rg\ (A)$ vale tres, sabemos que el $rg\ (A^*)$ podría ser tres o cuatro **pero**, como la matriz A^* no tiene determinante $4x4$, obligatoriamente $\boldsymbol{rg\ (A^*) = 3}$	
$\boldsymbol{rg\ (A) = 3 = rg\ (A^*) =}$ **Número de incógnitas**	**Sistema compatible determinado**
LA RECTA Y EL PLANO SON SECANTES	

Si $\boldsymbol{m = 2} \rightarrow$ $\boldsymbol{|A| = 0}$ y entonces debemos sustituir $\boldsymbol{m = 2}$ en la matriz A buscando un determinante 2x2 que sea distinto de cero para establecer el rango de A:

$$A^* = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{matrix} 3 & 0 \\ 2 & \mathbf{-2} \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} & & \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{\boxed{A}} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

Como la matriz A tiene un determinante $2x2 \neq 0$, el $rg(A) = 2$

Como $rg\ (A)$ vale dos, sabemos que el $rg\ (A^*)$ podría ser dos o tres. Ahora buscamos un determinante que __incluya__ este determinante 2x2 distinto de cero y el término independiente:

$$A^* = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{\boxed{A}} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$rg\ (A^*)$ __no__ puede ser tres, por lo tanto: $rg\ (A^*) = 2$

Si $\boldsymbol{m = 2} \rightarrow \boldsymbol{rg}\ (A) = 2 = \boldsymbol{rg}\ (A^*) \neq$ **Número incógnitas**	**Sistema compatible Indeterminado**
LA RECTA ESTÁ CONTENIDA EN EL PLANO	

3. Sean las rectas $r \equiv x = -y = z - 1$ y $s \equiv x - 2 = y = z - m$

Determina m para que las rectas sean coplanarias.

¡¡Importante!! Las rectas serán <u>coplanarias</u> siempre y cuando <u>no se crucen</u>.

Vamos a estudiar su posición relativa en función de m:

$r \equiv x = \boxed{\dfrac{y}{-1}} = z - 1 \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,\ 0,\ 1) \\ \vec{v}_r(1, -1,\ 1) \end{cases}$ ¡¡OJO!!	$s \equiv x - 2 = y = z - m \Rightarrow \begin{cases} P_s(2,\ 0,\ m) \\ \vec{v}_s(1,\ 1,\ 1) \end{cases}$
$\overrightarrow{P_rP_s} = P_s - P_r = (2,\ 0,\ m) - (0,\ 0,\ 1) = (\mathbf{2},\ \mathbf{0},\ \boldsymbol{m-1})$	

- Formamos las matrices A y A^* con los vectores anteriores y calculamos sus rangos para determinar la posición relativa entre las rectas:

$$A^* = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & m-1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores de m para los cuales $|A^*| = 0$:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m - 1 + 0 - 2) - (2 + 0 - m + 1) = 2m - 6 = \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{m = 3}$$
$$\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Si $\boldsymbol{m \neq 3} \rightarrow\ |A^*| \neq 0\ \rightarrow$ Determinante $3x3 \neq 0 \rightarrow\ \boldsymbol{rg(A^*) = 3}$
LA RECTAS SE CRUZAN, LUEGO <u>NO</u> SON COPLANARIAS

Si $\boldsymbol{m = 3} \rightarrow\ |\boldsymbol{A^*}| = \mathbf{0}$ **El rango de la matriz A^* no podrá ser 3.** Por lo tanto, sustituimos $\boldsymbol{m = 3}$ en la matriz buscando un determinante 2x2 que sea distinto de cero:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & \mathbf{2} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Como la matriz A^* tiene un determinante $\boldsymbol{2x2 \neq 0}$, el $rg(A^*) = 2$

Como $rg\ (A^*\ )$ vale dos, sabemos que el $rg\ (A)$ podría ser dos o menor:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Como la matriz A tiene un determinante $\boldsymbol{2x2 \neq 0}$, el $rg(A) = 2$

Si $\boldsymbol{m = 3} \rightarrow \boldsymbol{rg\ (A^*) = 2 = rg\ (A)}$	**LAS RECTAS SE CORTAN EN UN PUNTO, LUEGO SON COPLANARIAS**

4. Sea “m” una constante real. Determina la posición relativa de los planos siguientes, según los valores de “m”:

$$\boldsymbol{\pi: mx - 6y + 2z = 2} \qquad \boldsymbol{\pi': \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda + \mu \end{cases}}$$

Primero pasamos la ecuación del plano π' a forma general:

$$\pi' \equiv \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(0,\ 1,\ 2) \\ \vec{v}_1(1,-1,-2) \\ \vec{v}_2(1,\ 0,\ 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & -2 \end{matrix}$$

$$= [-x + 0 - 2\cdot(y-1)] - [-1\cdot(z-2) + 0 + (y-1)] =$$

$$= (-x - 2y + 2) - (-z + 2 + y - 1) = \boldsymbol{-x - 3y + z + 1 = 0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\pi' \equiv -x - 3y + z + 1 = 0}}$$

- Estudiamos la posición relativa entre los dos planos:

$$\begin{cases} \pi: mx - 6y + 2z - 2 = 0 \\ \pi': -x - 3y + z + 1 = 0 \end{cases} \to \frac{m}{-1} = \frac{-6}{-3} = \frac{2}{1} = \frac{-2}{1} \to \boldsymbol{\frac{m}{-1} = 2 = 2 \neq -2}$$

Si $\boldsymbol{m = -2}$ **los planos son paralelos** ya que $^{-2}/_{-1} = 2 = 2 \neq -2$
Si $\boldsymbol{m \neq -2}$ **los planos son secantes**

5. Estudia la posición relativa de los planos π_1, π_2, π_3 dependiendo de los valores de m

$$\boldsymbol{\pi_1 \equiv -mx + my + z = 0} \qquad \boldsymbol{\pi_2 \equiv x - my + 3z = 4} \qquad \boldsymbol{\pi_3 \equiv 2x - 2y - z = 0}$$

- Formamos las matrices A y A^* con las ecuaciones de los planos:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} -m & m & 1 & 0 \\ 1 & -m & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\hphantom{-m \quad m \quad 1}}_{\boxed{A}}$$

- **Discutimos el sistema por el método de teorema de Rouché Frobenius, para lo cual** debemos calcular el rango de las matrices A y A^*:

Calculamos los valores de m para los cuales $|A| = 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} -m & m & 1 \\ 1 & -m & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-m^2 - 2 + 6m) - (-2m + 6m - m) = -m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$\begin{matrix} -m & m & 1 \\ 1 & -m & 3 \end{matrix}$$

$$m = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-2)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{-2} = \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$ → $\lvert A\rvert \neq 0$ → Determinante $3x3 \neq 0$ → $rg(A) = 3$	
Como $rg\,(A)$ vale tres, sabemos que el $rg\,(A^*)$ podría ser tres o cuatro **pero**, como la matriz A^* no tiene determinante $4x4$, obligatoriamente $rg\,(A^*) = 3$	
$rg\,(A) = 3 = rg\,(A^*)$ = **Número de incógnitas**	**Sistema compatible determinado**
LOS TRES PLANOS SE CORTAN EN UN PUNTO	

Si $m = 1 \rightarrow$ $|A| = 0$ y entonces debemos sustituir $m = 1$ en la matriz A buscando un determinante 2x2 que sea distinto de cero para establecer el rango de A:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

A

Como la matriz A tiene un determinante $2x2 \neq 0$, el $rg(A) = 2$

Como $rg\,(A)$ vale dos, sabemos que el $rg\,(A^*)$ podría ser dos o tres. Ahora buscamos un determinante que <u>incluya</u> este determinante 2x2 distinto de cero y el término independiente:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 0 - 8) - (0 - 4 + 0) = -4$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{matrix}$$

A

Como la matriz A^* tiene un determinante $3x3 \neq 0$, el $rg(A^*) = 3$

Si $m = 1 \rightarrow rg\,(A) = 2 \neq rg\,(A^*) = 3$	**Sistema Incompatible**
LOS TRES PLANOS PUEDEN CORTARSE DOS A DOS O DOS PUEDEN SER PARALELOS Y EL OTRO SECANTE	

- <u>Discutimos</u> el sistema por el método de teorema de Rouché Frobenius, para lo cual debemos calcular el rango de las matrices A y A^*:

Calculamos los valores de m para los cuales $|A| = 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} -m & m & 1 \\ 1 & -m & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-m^2 - 2 + 6m) - (-2m + 6m - m) = \boldsymbol{-m^2 + 3m - 2 = 0}$$

$$\begin{matrix} -m & m & 1 \\ 1 & -m & 3 \end{matrix}$$

$$m = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-2)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{-2} = \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$ $\rightarrow$ $|A| \neq 0$ $\rightarrow$ Determinante $3x3 \neq 0 \rightarrow rg(A) = 3$	
Como $rg\ (A)$ vale tres, sabemos que el $rg\ (A^*)$ podría ser tres o cuatro **pero**, como la matriz A^* no tiene determinante $4x4$, obligatoriamente $rg\ (A^*) = 3$	
$rg\ (A) = 3 = rg\ (A^*) =$ Número de incógnitas	**Sistema compatible determinado**
LOS TRES PLANOS SE CORTAN EN UN PUNTO	

Si $m = 1 \rightarrow$ $|A| = 0$ y entonces debemos sustituir $m = 1$ en la matriz A buscando un determinante 2x2 que sea distinto de cero para establecer el rango de A:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 \\ 1 & \boxed{-1} & \boxed{3} & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

$\underbrace{\qquad}_{A}$

Como la matriz A tiene un determinante $2x2 \neq 0$, el $rg(A) = 2$

Como $rg\ (A)$ vale dos, sabemos que el $rg\ (A^*)$ podría ser dos o tres. Ahora buscamos un determinante que <u>incluya</u> este determinante 2x2 distinto de cero y el término independiente:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \boxed{0} \\ 1 & -1 & 3 & \boxed{4} \\ 2 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 0 - 8) - (0 - 4 + 0) = -4$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{matrix}$$

$\underbrace{\qquad}_{A}$

Como la matriz A^* tiene un determinante $3x3 \neq 0$, el $rg(A^*) = 3$

Si $m = 1 \rightarrow rg\ (A) = 2 \neq rg\ (A^*) = 3$	**Sistema Incompatible**
LOS TRES PLANOS PUEDEN CORTARSE DOS A DOS O DOS PUEDEN SER PARALELOS Y EL OTRO SECANTE	

Vamos a estudiar si hay <u>**planos paralelos**</u>:

$$\begin{cases} \pi_1: -x + y + z = 0 \\ \pi_2: x - y + 3z = 4 \end{cases} \rightarrow \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{3} \rightarrow \textbf{NO}$$

$$\begin{cases} \pi_1: -x + y + z = 0 \\ \pi_3: 2x - 2y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2} \neq \frac{1}{-1} \rightarrow \textbf{NO}$$

LOS TRES PLANOS SE CORTAN DOS A DOS

$$\begin{cases} \pi_2: x - y + 3z = 4 \\ \pi_3: 2x - 2y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{3}{-1} \rightarrow \textbf{NO}$$

Si $m = 2 \rightarrow$ $|A| = 0$ y entonces debemos sustituir $m = 2$ en la matriz A buscando un determinante 2x2 que sea distinto de cero para establecer el rango de A:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & \boxed{2} & \boxed{1} & 0 \\ 1 & \boxed{-2} & \boxed{3} & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

$\underbrace{\qquad}_{A}$

Como la matriz A tiene un determinante $2x2 \neq 0$, el $rg(A) = 2$

Como $rg\ (A)$ **vale dos, sabemos que el** $rg\ (A^*)$ **podría ser dos o tres.** Ahora buscamos un determinante que <u>incluya</u> este determinante 2x2 distinto de cero y el término independiente:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & \boxed{0} \\ 1 & -2 & 3 & \boxed{4} \\ 2 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 0 - 8) - (0 - 8 + 0) = 0$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{matrix}$$

$\underbrace{\qquad}_{A}$

$rg\ (A^*)$ no puede ser tres, por lo tanto: $rg\ (A^*) = 2$

Si $m = 2 \rightarrow rg\ (A) = 2 = rg\ (A^*) \neq$ Número de incógnitas	**Sistema compatible indeterminado**
LOS TRES PLANOS PUEDEN CORTARSE EN UNA RECTA O PUEDE HABER DOS PLANOS COINCIDENTES Y EL OTRO SECANTE	

Vamos a ver si hay <u>planos coincidentes</u>:

$$\begin{cases} \pi_1: -2x + 2y + z = 0 \\ \pi_2: x - 2y + 3z = 4 \end{cases} \rightarrow \frac{-2}{1} \neq \frac{2}{-2} \rightarrow \textbf{NO}$$

$$\begin{cases} \pi_1: -2x + 2y + z = 0 \\ \pi_3: 2x - 2y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{-2}{2} = \frac{2}{-2} = \frac{1}{-1} = \frac{0}{0} \rightarrow \textbf{SÍ}$$

DOS PLANOS COINCIDENTES Y EL OTRO SECANTE (siguen cortándose en una recta)

6. Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + ay + z - 2 = 0$, determina, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro a, para cada uno de los supuestos:

a) Que π_1 y π_2 sean paralelos

b) Que π_1 y π_2 sean perpendiculares

c) Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $\alpha \equiv x = y$

a) Dos planos son paralelos si: $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'}$

$$\begin{cases} \pi_1: ax + y - z + 1 = 0 \\ \pi_2: x + ay + z - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{-2} \rightarrow a = \frac{-1}{1} \rightarrow a = -1$$

Comprobamos que se cumple que si $a = -1$, los planos π_1 y π_2 son paralelos:

$$\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{-2} \rightarrow -1 = -1 = -1 \neq \frac{1}{-2}$$

Los planos π_1 y π_2 son paralelos

b) Dos planos son perpendiculares si sus vectores normales son perpendiculares.

Por lo tanto: $\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0$

$$\begin{cases} \vec{n}_{\pi_1}(a,\ 1, -1) \\ \vec{n}_{\pi_2}(1,\ a,\ 1) \end{cases} \rightarrow \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = (a,\ 1, -1) \cdot (1,\ a,\ 1) = a + a - 1 = 2a - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Si $a = 1/2$, los planos π_1 y π_2 son perpendiculares

c) Si una recta es perpendicular a un plano, el vector director $\vec{v}_r$ de la recta es el vector normal $\vec{n}_\pi$ del plano o paralelo a este.

- Empezamos definiendo la recta formada por los 2 planos:

$$r \equiv \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} ax + y - z + 1 = 0 \\ x + ay + z - 2 = 0 \end{cases}$$

- Calculamos $\vec{v}_r$ por medio del producto vectorial:

$$\vec{v}_r = \vec{n}_{\pi_1} x\, \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 1 & -1 \end{matrix} = (\vec{i} + a^2 \cdot \vec{k} - \vec{j}) - (\vec{k} - a \cdot \vec{i} + a \cdot \vec{j}) =$$

$$= \vec{i} + a^2 \cdot \vec{k} - \vec{j} - \vec{k} + a \cdot \vec{i} - a \cdot \vec{j} =$$

$$= (a+1) \cdot \vec{i} + (-1 - a) \cdot \vec{j} + (a^2 - 1) \cdot \vec{k} =$$

$$= (a + 1,\ -1 - a,\ a^2 - 1)$$

$$\boxed{\vec{v}_r(a + 1,\ -1 - a,\ a^2 - 1)}$$

- Calculamos el vector normal de α:

$$\alpha \equiv x = y \rightarrow \alpha \equiv x - y = 0 \rightarrow \vec{n}_\alpha(1, -1,\ 0)$$

Para que r sea perpendicular a α, el vector director $\vec{v}_r$ de la recta tiene que ser el vector normal $\vec{n}_\alpha$ del plano o paralelo a este. **Luego $\vec{v}_r$ y $\vec{n}_\alpha$ deben ser proporcionales:**

$$\begin{cases} \vec{n}_\alpha(1, -1,\ 0) \\ \vec{v}_r(a + 1, -1 - a,\ a^2 - 1) \end{cases}$$

$$\frac{1}{a+1} = \frac{-1}{-1-a} = \frac{0}{a^2 - 1}$$

¡¡Cogemos las dos ecuaciones que nos resulten más fáciles!!

$$\frac{1}{a+1} = \frac{0}{a^2 - 1} \rightarrow 1 \cdot (a^2 - 1) = 0 \cdot (a + 1) \rightarrow a^2 - 1 = 0 \rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1$$

<u>Comprobamos</u> las soluciones:

$$a = +1 \rightarrow \begin{cases} \vec{n}_\alpha(1, -1,\ 0) \\ \vec{v}_r(2, -2,\ 0) \end{cases}$$

Si $a = 1$ la recta intersección entre π_1 y π_2 es perpendicular al plano $\alpha \equiv x = y$

Solución válida

$$a = -1 \rightarrow \begin{cases} \vec{n}_\alpha(1, -1,\ 0) \\ \vec{v}_r(0,\ 0,\ 0) \end{cases}$$

¡¡OJO!! En el apartado a), vimos que para $a = -1$ los planos π_1 y π_2 eran paralelos; Por lo tanto no definen una recta

Solución <u>No</u> válida

Este apartado ha sido de dificultad ¡¡NIVEL FULL DE ESTAMBUL!!

Si has sido capaz de resolverlo es porque eres una MÁQUINA.