

Ejercicio 4 ABAU Modelo 2022

(1)

Explicado Paso a paso (lo que está entre paréntesis son explicaciones para los alumnos y No hay que escribirlos ni justificarlos en el examen, son sólo para que lo entendáis mejor)

Enunciado :
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & x \leq 0 \\ -x^2 - x - 1 & x > 0 \end{cases}$$

hallar el área del recinto encerrado entre la gráfica de la función f y las rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$

Solución

(por comodidad. llamo $f_1(x) = x^2 - x - 1$
 $f_2(x) = -x^2 - x - 1$
 $h(x) = 4x - 7$
 $g(x) = 1$)

(lo que me piden es el área de la región encerrada por las gráficas de f, g, h 3 funciones, lo que hace este ejercicio más largo, algo más complicado, diferente y me cuesta dibujar las gráficas)

(OJO, la AUBA no da puntos por la representación gráfica)

Primer Paso miro si f es continua en $x=0$)

(Este paso NO es necesario pero a mí me ayuda a la hora de dibujar la gráfica de f)

($f(0) = f(0^-) = -1 = f(0^+) \Rightarrow f \text{ cont } \mathbb{R}$)
(es una $f.$ atroz y cada trozo es una func. polinómica)

(por ser f continua sé que cuando dibuje f_1 y f_2 quedarán "UNIDAS" y que además el pto de unión será $(0, -1)$)

Segundo Paso gráfica de $f_1(x) = x^2 - x - 1$

(como f está definida como f_1 para $x \leq 0$, dibujaré con trazo "visible" la parte de $x \leq 0$ y la otra, simplemente la dejaré en puntitos que luego borraré)

• f_1 parábola V convexa (por $a > 0$)

• vértice $\frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} = 0.5$; $f_1(0.5) = -1.25$

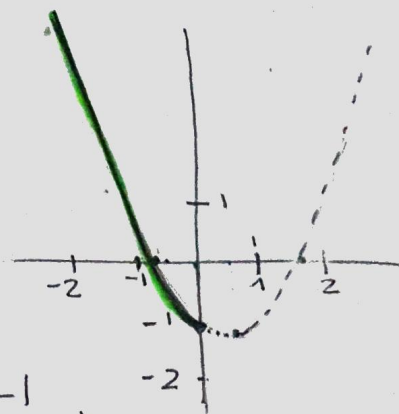
• ptos de corte $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $\left\{ \begin{array}{l} 1.6 \text{ (aprox)} \\ -0.6 \text{ (aprox)} \end{array} \right.$

(• recordemos que $f_2(0) = -1$ (por f continua)

(Este es que me interesa)

x	$f_1(x)$	
-0.6	0	(aprox) pto corte
0	-1	
+0.5	-1.25	(Vértice)
1.6	0	(aprox) pto de corte

f_1



Tercer Paso dibujo $f_2(x) = -x^2 - x - 1$ (para $x > 0$)

(al igual que antes, vértice, pto corte etc)

(dibujaré toda pero marcaré bien la única rama que me importa que es la positiva)

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} = -0.5 ; f_2(-0.5) = -0.75$$

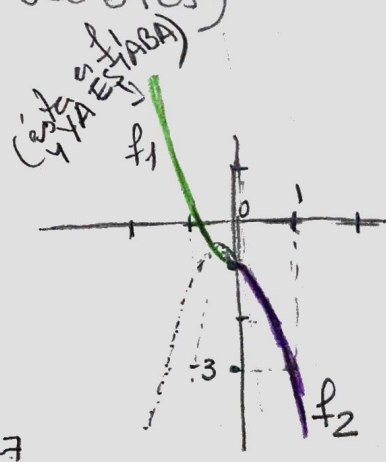
$$f_2(0) = -1 \text{ (lo vimos cuando } f \text{ continuaba)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)(-1)}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{R} \Rightarrow \text{No corta el eje } x$$

(por comodidad, y por obtener un dibujo más exacto le voy a dar más valores)

x	$f_2(x)$
-1	-1
-0.5	-0.75
0	-1
1	-3

(Esta es la parte q. me interesa)



Cuarto Paso

Dibujo las rectas $h(x) = 4x - 7$ and $g(x) = 1$

x	h	g
0	-7	1
1	-3	1

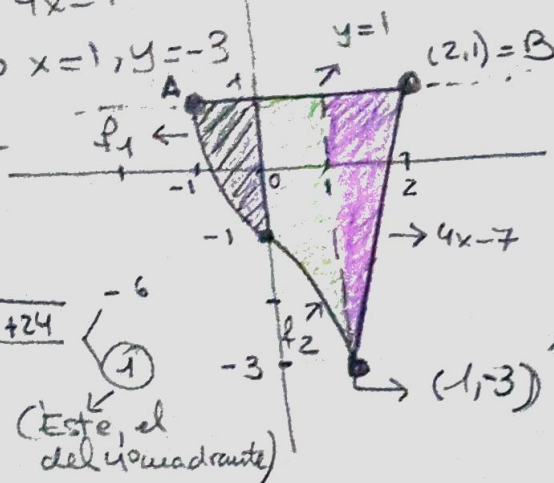
(Al dibujarlas ya vemos que f_2 y la recta $4x-7$ se cortan en el pto $x=1, y=-3$

pero si no lo hubiéramos visto podíamos hacer $-x^2-x-1=4x-7$

$$-x^2-5x+6=0; x=\frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{-2}$$

para $x=1$
 $=0 \quad f_2(1)=-3$
pto C

(Este, el del 1º cuadrante)



Quinto Paso
Ptos de corte

P.4

* El pto de corte de f_1 e $y=1 \Rightarrow x^2-x-1=1 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$
 (el pto A) $x = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

(-1) (El pto que buscas está en el 2º cuadrante se ve en el dibujo) Pto $(-1,1)$

* El pto de corte de las rectas $y=1$ e $y=4x-7$

$$1=4x-7 \Leftrightarrow \boxed{x=2} \Rightarrow (2,1)$$

(El pto B)

Sexto Paso (Mirar dibujo) Divido

el área a calcular en 3 zonas:

A_1 (zona gris) = área región encerrada entre f_1 y la recta $g(x)=1$ entre los valores $x=-1$ y $x=0$ (mirar dibujo)

A_2 (zona verde) = área región encerrada entre f_2 y la recta $g(x)=1$ entre los valores $x=0$, y $x=1$ (ver dibujo)

A_3 = área de un triángulo de base 1 (se puede obtener)

$\sqrt{10}$ simplemente restando $x=2$ menos $x=-1$ (5)
 y de altura 4 (se puede obtener mirando el dibujo
 y restando a $x=-3$, $x=1$; $|-3-1|=|-4|=4$)

1) A_1 ? (*) (El área comprendida entre
 dos graficas f y g entre
 los pto $x=a$, $x=b$ es

$$\begin{aligned}
 \text{En nuestro caso } A_1 &= \left| \int_{-1}^0 (x^2 - x - 1 - 1) dx \right| = \left| \int_{-1}^0 (x^2 - x - 2) dx \right| = \\
 &= \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-1}^0 \right| = \\
 &= \left| 0 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2(-1) \right) \right| = \left| -\frac{7}{6} \right| = \boxed{\frac{7}{6} \text{ u}^2 \text{ de medida}}
 \end{aligned}$$

2) A_2 ? (*) $A_2 = \left| \int_0^1 (-x^2 - x - 1 - 1) dx \right| = \left| \int_0^1 (-x^2 - x - 2) dx \right| =$
 $= \left| \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^1 \right| = \left| -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2 - 0 \right| = \left| -\frac{17}{6} \right| = \boxed{\frac{17}{6} \text{ u}^2}$

3) $A_3 = \frac{1 \cdot 4}{2} = \boxed{2 \text{ u}^2 \text{ de medida}}$

Último paso (Sumamos las tres áreas)
 $A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{7}{6} + \frac{17}{6} + 2 = \frac{36}{6} = \boxed{6 \text{ u}^2}$

FIN


El ejercicio resumido como que hay que escribir: (6)

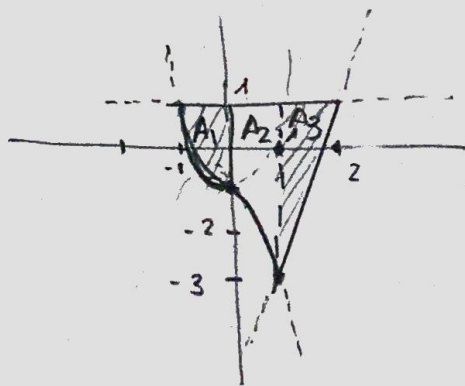
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 = f_1, & x \leq 0 \\ -x^2 - x - 1 = f_2, & x > 0 \end{cases}$$

Rectas $y = 4x - 7$
 $y = 1$

Dibuj f_1, f_2 , recta $y = 4x - 7, y = 1$

* f_1 parábola convexa $\cup$, vértice $(0.5, -1.25)$
pts corte $(-0.6, 0), (1.6, 0)$ pasa por $(0, -1)$

* f_2 parábola cóncava $\cap$, vértice $(-0.5, -0.75)$
no corta el eje x pasa por $(0, -1)$



$$A = \left| \int_{-1}^0 f_1 - 1 \right| + \left| \int_0^1 f_2 - 1 \right| + \frac{1 \cdot 4}{2} =$$

$$= \left| \int_{-1}^0 (x^2 - x - 2) dx \right| + \left| \int_0^1 (-x^2 - x - 2) dx \right| + 2 =$$

$$= \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-1}^0 \right| + \left| \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^1 \right| + 2 =$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{17}{6} + 2 = \boxed{6 \text{ u}^2 \text{ de medida}}$$

FIN