

1) $x^3 + x - 5 = 0$ g. a lo mismo que

buscar para $f(x) = x^3 + x - 5$ un pto corte eje X. El ejercicio lo pide para el intervalo $(1, 2)$

f func. polinómica $\Rightarrow$ f cont en $\mathbb{R}$, en particular f cont $[1, 2]$
 $f(1) = -3$; $f(2) = 8 + 2 - 5 = 5 \Rightarrow$ por th. Bolzano

$\exists c \in (1, 2)$ t.q. $f(c) = 0$

2) $x^{2009} - e^x + 2 = 0$; no nos dan intervalo, tenemos que buscar dos pto en los que la función cambie de signo.

$f(0) = 0 - 1 + 2 = 1 > 0$

$f(1) = 1 - e + 2 = 3 - e > 0$ muy cerca ya del cero.

pensamos... si $x > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^{2009} + 2 > 0 \\ e^x > 0 \end{cases}$ tenemos que buscar que esas dos cantidades se aproximen para conseguir que se anulen

$x \in (0, 1)$, tomo $0'1 = \frac{1}{10}$; $(0'1)^{2009} + 2 =$

$= \frac{1}{10^{2009}} + 2 \sim e$
si me aproximo al 1

tomo un n° próximo al 1, por ejemplo 0'9

$f(0'9) = -0'459 < 0 \Rightarrow$ si tomo $[0'9, 1] \Rightarrow$ por Bolzano $\exists c \in (0'9, 1)$ t.q. $f(c) = 0$

• Otras soluciones: (Esta ecuación tiene 3 raíces reales una próx. al -1, otra próxima al 0'7 y otra al 1, se puede ver en geometría)

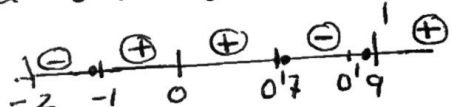
Si hubiésemos probado con 0'7 obtendríamos que también se cumple en $[0, 0'7]$

o también en $[0'7, 1]$ y también en $[-2, -1]$

p. ejemplo $f(-1) = -1 - \frac{1}{e} + 2 > 0$

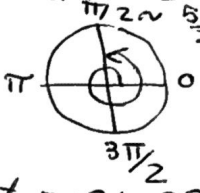
$f(-2) = -2 - \frac{1}{e^{2009}} + 2 < 0$

es obvio que esta cantidad es - y mayor que 2



[3] Considerando $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en su DOMINIO
 (por ser dos func. elemet. y una de ellas, una hipérbola.)
 i.e. donde su denominador $\neq 0$. En nuestro caso $x \neq 0$
 h cont. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 como $2\pi > 0 \Rightarrow [2\pi, \frac{5\pi}{2}] \subset (0, +\infty) \Rightarrow f$ cont. en $[2\pi, \frac{5\pi}{2}]$

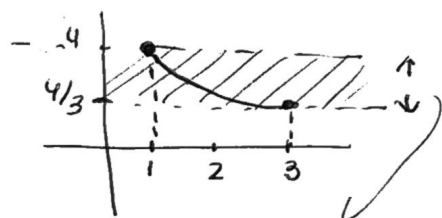
$$\left. \begin{aligned} h(2\pi) &= \sin 2\pi - \frac{1}{2\pi} = 0 - \frac{1}{2\pi} < 0 \\ h(\frac{5\pi}{2}) &= \sin \frac{5\pi}{2} - \frac{2}{5\pi} = -1 - \frac{2}{5\pi} > 0 \end{aligned} \right\}$$


 Se cumplen las hipótesis de Bolzano en el int. $[2\pi, \frac{5\pi}{2}]$
 $\Rightarrow \exists c \in (2\pi, \frac{5\pi}{2})$ t.q. $h(c) = 0$ y por tanto $f(c) = g(c)$

[4] a) $f(x) = \frac{4}{x}$ en $[1, 3]$
 f es una hipérbola, cont. en su dominio i.e. en los ptn en los que su denominador es $\neq 0$, $[x \neq 0]$
 Como $[1, 3] \subset (0, +\infty) \Rightarrow f$ cont. en $[1, 3] \Rightarrow$ por el th. Weierstrass f está ACOTADA en $[1, 3]$

Explicación de cotas:

(no quiere decir que tiene un "tope" superior (se llama cota superior) y otro inferior, ver dibujo)



La función en $[1, 3]$

queda "encerrada" o acotada entre $\frac{4}{3}$ y 4

por ejemplo cota superior podemos tomar ④

$$\forall x \in [1, 3] \Rightarrow f(x) \leq 4$$

$$\text{y como cota inferior } \frac{4}{3}$$

$$\forall x \in [1, 3] \Rightarrow f(x) \geq \frac{4}{3}$$

b) $f(x) = \frac{3x}{x-2}$ hipérbola, Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$
 $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

f cont. en $\mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

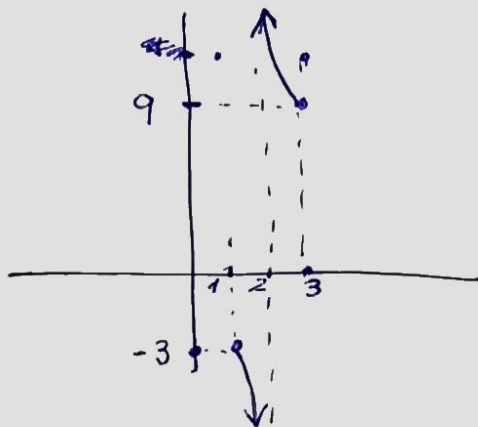
PERO $2 \in [0, 3] \Rightarrow \underline{\text{NO}}$ podemos decir que f sea continua en $[0, 3] \Rightarrow \underline{\text{NO}}$ se cumplen las hipótesis de Weierstrass $\Rightarrow \underline{\text{NO}}$ podemos afirmar que está acotada. De hecho NO lo

está, ya que al aproximarnos al 2 (pto. de No dominio) la función se va al $\pm \infty$ (3)

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{6}{0} \text{ IND } \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x}{x-2} = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

(tiene A.V. en $x=2$) por lo que es imposible que f esté acotada en $[0,3]$



[5] $f(x) = 2x+1$ func. polinómica $\Rightarrow f$ cont en $\mathbb{R}$ ✓
 $1 = 2x+1 \Leftrightarrow x=0$
 $5 = 2x+1 \Leftrightarrow x=2$ } el intervalo $[0,2] \subset \mathbb{R} \Rightarrow$
 f cont en $[0,2] \Rightarrow$ por el th. valores intermedios
 (Darboux) $\forall k \in (1,5) \Rightarrow \exists c \in (0,2) \mid f(c)=k$
 " "
 $(f(0), f(2))$

Así que f recorre todos los valores entre $[1,5]$

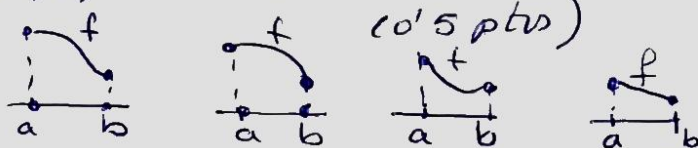
* [6] GALICIA ORD 2008 Op. [3a] ✓ Weierstrass
 enunciado Weierstrass 0'5 } f cont $[a,b] \Rightarrow f$ alcanza
 ejercicio 0'5 } máximos y mínimos en ese
 intervalo

Por ser f además estrictamente DEcreciente $\Rightarrow$

$$a < x \leq b \Rightarrow f(a) > f(x) \geq f(b)$$

$\Rightarrow f(x)$ alcanza máximo en $x=a$ y el mínimo $x=b$

Ejemplos



(0'5 pts)

* [7] Castilla - La Mancha EXT 2021 7b) pág. (4)

$$f(x) = x \sin x - \cos x \quad \text{en } [-1, 1]$$

f producto y resta de polinomios, senos y cosenos $\Rightarrow$
f cont y deriv en $\mathbb{R}$, en particular f cont $[-1, 1]$

Además $\boxed{f(-1) = -\sin(-1) - \cos(-1)} = -(-\sin 1) - \cos 1 =$
 $\uparrow$
 $\left[\begin{array}{l} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{array} \right]$

$= \sin 1 - \cos 1 = \boxed{f(1)}$ por tanto se cumplen las
hipótesis del th de Rolle $\Rightarrow \exists c \in (-1, 1)$ t.q. $f'(c) = 0$
i.e. f tiene en $x=c$ un PUNTO CRÍTICO.

para justificar que es extremo relativo hay
que demostrar que $f''(c) \neq 0$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - (-\sin x) = 2 \sin x + x \cos x$$

$$f'(c) = 2 \sin c + c \cos c = 0 \Rightarrow \left\{ \sin c = -\frac{c}{2} \cos c \right\} (*)$$

$$f''(x) = 2 \cos x + \cos x + x(-\sin x) = 3 \cos x - x \sin x$$

$$f''(c) = 3 \cos c - c \sin c = 3 \cos c - c \cdot \left(-\frac{c}{2} \cos c\right) =$$

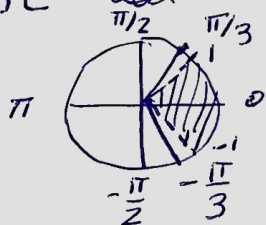
$$= 3 \cos c + \frac{c^2}{2} \cos c = (*) \left(3 + \frac{c^2}{2} \right) \cdot \cos c$$

$$\left(3 + \frac{c^2}{2} \right) > 0 \text{ siempre (por tanto } \neq 0)$$

$$\cos c \text{ con } c \in (-1, 1) ?$$

$$-1 \text{ rad } \approx 60^\circ = -\frac{\pi}{3}$$

$$1 \text{ rad } \approx 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$



en ese sector el coseno SIEMPRE es $\oplus$ y $\neq 0$
ya que $(-1, 1) \subset \left[-\frac{\pi}{3}, +\frac{\pi}{3}\right]$

o si se quiere en $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$

(el coseno se anula en $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$)

por tanto $\cos c > 0$, uniendo ambas $f''(c) > 0$
y por tanto $\neq 0$, así que es un Ext. relativo
Cde hecho es un mínimo relativo.

(*) (*)

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 2x^2 + ax & x < 1 \\ f_2(x) = bx + c & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{función a trozos, donde}$$

f_1 y f_2 son funciones polinómicas, por tanto, por separado, son continuas y derivables, sólo faltaría ver qué ocurre en el pto. de unión de f_1 y f_2 i.e. $x=1$

$$\left. \begin{aligned} \text{¿cont en } x=1? \quad f(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 + ax = 2+a \\ f(1) &= f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} bx + c = b+c \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

para f cont en $x=1$ tiene q. ocurrir q. $\boxed{2+a=b+c}$

$$\left. \begin{aligned} \text{para } f \text{ deriv en } x=1 \quad f_1'(x) &= 4x + a \\ f_2'(x) &= b \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} f'(1^-) &= 4 \cdot 1 + a = 4+a \\ f'(1^+) &= b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{para q. } f \text{ derive en } x=1 \text{ tiene q. ocurrir q.}$$

$$\Rightarrow f \text{ cont y deriv en } [0,2] \text{ si } \boxed{\begin{matrix} 2+a=b+c \\ 4+a=b \end{matrix}} \quad \boxed{4+a=b}$$

Para que se cumplan todas las condiciones o hipótesis de Rolle, además $f(0)=f(2)$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 2 \cdot 0^2 + a \cdot 0 = 0 \\ f(2) &= b \cdot 2 + c = 2b+c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{0=2b+c}$$

Uniendo las 3 condiciones tenemos

$$\left. \begin{aligned} 2+a &= b+c \\ 4+a &= b \\ 0 &= 2b+c \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \begin{matrix} -2-a = -b-c \\ 4+a = b \end{matrix} \\ & \frac{2}{2} = -c \Rightarrow \boxed{c=-2} \Rightarrow 0=2b-2 \\ & \Rightarrow 2b=2 \Rightarrow \boxed{b=1} \Rightarrow \begin{matrix} 4+a=b \\ 4+a=1 \end{matrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow a=1-4 \Rightarrow \boxed{a=-3} \quad \checkmark \end{aligned}$$

para estos valores se cumple Rolle $\Rightarrow \exists k \in (0,2) / f'(k)=0$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x-3 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{no puede ser } \geq 1 \text{ por } 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow x < 1 \text{ y además } 4k-3=0 \Rightarrow \boxed{k=\frac{3}{4}} \quad \checkmark$$

* 9 GALICIA 2013 ORD Opurn B Ej. 4 a)

(p.6)

Rolle para $f(x) = x^3 + ax - 1$ en $[0, 1]$?

(Valia 0'5 el teorema, 0'25 calcular "a" y 0'25 "c")
(la teoría mirar en los apuntes o en el solucionario) pto de Rolle

$f(x)$ es una func. polinómica $\Rightarrow f$ cont y deriv en $\mathbb{R} \Rightarrow$
 $\left. \begin{array}{l} f \text{ cont en } [0, 1] \\ f \text{ deriv en } (0, 1) \end{array} \right\}$

sólo falta ver que $f(0) = f(1)$

$$f(0) = 0 + a \cdot 0 - 1 = -1 ; f(1) = 1 + a - 1 = a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -1} \quad 0'25 \text{ pts}$$

$\Rightarrow$ si $a = -1$ se cumplen las condiciones de Rolle y
 por tanto $\exists c \in (0, 1)$ t.q. $f'(c) = 0$

$$\text{hacemos } f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ a = -1 & & \end{array}$$

como necesitamos que $c \in (0, 1)$ (y por tanto sea $\oplus$)

$$\text{la solución es } c = \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}} \quad \text{desptos.}$$

* 10 GALICIA 2012 Ext. Opurn B 3 a) b) para $c > 2$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x < 2 \\ x + 1 & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{calcular } a, b, c \text{ para}$$

que se cumpla Rolle en $[0, c]$, con $c > 2$ por tanto $2 \in [0, c]$

f func. a trozos donde f_1 y f_2 son func. polinómicas y
 por tanto continuas y derivables en $\mathbb{R}$, por tanto

$$f \text{ lo será, sólo falta ver qué ocurre en el pto de unión } x=2$$

$$f(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + ax + b = 4 + 2a + b$$

$$f(2^+) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 1 = 3$$

$$\Rightarrow \text{para } f \text{ cont } 4 + 2a + b = 3 \Rightarrow \boxed{2a + b = -1}$$

$$\left. \begin{array}{l} f_1'(x) = 2x + a \\ f_2'(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x + a = 4 + a \\ f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{para}$$

$$\text{que } f \text{ derivable } 4 + a = 1 \Rightarrow \boxed{a = -3} \Rightarrow \boxed{b = 5}$$

$$\Rightarrow a = -3, b = 5$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & x < 2 \\ x + 1 & x \geq 2 \end{cases} \quad (p7)$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ cont } [0, c] \\ f \text{ deriv } (0, c) \\ (\text{con } c > 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{só falta que } f(0) = f(c) \\ f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 5 = 5 \\ f(c) = c + 1 \end{array} \Rightarrow c + 1 = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 4} \checkmark$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ cont } [0, 4] \\ f \text{ deriv } (0, 4) \\ f(0) = f(4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \exists k \in (0, 4) \text{ t.q. } f'(k) = 0 \\ \text{th} \\ \text{Rolle} \end{array}$$

— 0 —

11 Galicia 2011 ORD op. A. Ej. 3 a)

**

$f(x) = x^3 - kx + 10$ es func. polinómica $\Rightarrow f$ cont $[-2, 0]$ y derivable en $(-2, 0)$ para poder aplicar Rolle

$$f(-2) = f(0) \Leftrightarrow -8 - k(-2) + 10 = 0 - 0 + 10$$

$$\Leftrightarrow -8 + 2k + 10 = 10 \Leftrightarrow -8 + 2k = 0 \Leftrightarrow 2k = 8$$

$$\Leftrightarrow \boxed{k = 4}$$

Para ese valor: $f(x) = x^3 - 4x + 10$ en $[-2, 0]$

$$\exists c \in (-2, 0) \text{ t.q. } f'(c) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{como } c \in (-2, 0) \Rightarrow \boxed{x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}} \checkmark \text{ es el valor buscado}$$

— 0 —

12 2014 GALICIA ORD Op B Ej. 3b)

**

$f(x) = \frac{1}{2-x}$ comprobar T.V.M. Cal. Dif $\left. \begin{array}{l} f \text{ cont } [a, b] \\ f \text{ deriv } (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow$

piden aplicarlo en el intervalo $[0, 1]$ $\exists c \in (a, b)$ t.q.

y que en ese caso encontremos $\frac{c}{5}$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

f cociente de func. polinómicas $\Rightarrow f$ cont y derivable excepto en los pto donde se anule el denominador

$$2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

para $\mathbb{R} - \{2\}$
 f deriv. $\mathbb{R} - \{2\}$

$2 \notin [0, 1] \Rightarrow$ no hay problema f deriv. $(0, 1)$ (p8)

$\Rightarrow$ por T.V.M. Def. $\exists c \in (0, 1)$ tq $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2-0}}{1 - 0} = 1 - \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$f'(x) = -\frac{-1}{(2-x)^2} = \frac{1}{(2-x)^2}; \quad f'(c) = \frac{1}{(2-c)^2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow (2-c)^2 = 2 \Rightarrow 2-c = \pm\sqrt{2} \Rightarrow 2 \pm \sqrt{2} = c$
 $\uparrow$
 $c \neq 2$
 $c \in (0, 1)$ $c < 2 - \sqrt{2} \frac{\text{si}}{\text{y}} \in (0, 1)$
 $2 + \sqrt{2}$ no sirve p.q. es > 1

$c \in (0, 1)$

$\boxed{c = 2 - \sqrt{2}} \checkmark$

[13] 2014 GALICIA EXTOP B Ej. 3b) a)

$** f(x) = \begin{cases} mx & x < 1 \\ ax^2 + bx + 1 & x \geq 1 \end{cases}$ a) calculamos a, b, m para que f cont y deriv. en $x=1$

y tenga ext. relativo en $x=3$

$$f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} mx = \boxed{m}$$

$$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1 = a + b + 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + bx + 1$$

f cont en $x=1 \Leftrightarrow \boxed{m = a + b + 1}$

$f'(1^-) = m$

$f'(1^+) = 2a + b$ para f deriv en $x=1$ $\boxed{m = 2a + b}$

$f'(x) = \begin{cases} m & x < 1 \\ 2ax + b & x \geq 1 \end{cases}$

por tener ext. relativo en $x=3 \Rightarrow f'(3) = 0$ y $f''(3) \neq 0$

$3 > 1 \Rightarrow f'(3) = 2a \cdot 3 + b = \boxed{6a + b = 0}$

$x > 1 \rightarrow f''(x) = 2a \neq 0$
 $\boxed{a \neq 0}$

$$\left. \begin{aligned} m &= a + b + 1 \\ m &= 2a + b \\ 6a + b &= 0 \\ a &\neq 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} -m &= -a - b - 1 \\ m &= 2a + b \end{aligned}$$

(P9)

$$0 = a - 1 \Rightarrow \boxed{a=1} \text{ bien } a \neq 0$$

$$6a + b = 0 \Rightarrow \underset{a=1}{6} + b = 0 \Rightarrow \boxed{b=-6}$$

$$m = a + b + 1 \Rightarrow m = 1 - 6 + 1 \Rightarrow \boxed{m=-4}$$

$$\boxed{\text{Solución } a=1, b=-6, m=-4} \quad \checkmark$$

b) para esos valores ya probamos en el apdo a) que

f cont en $x=1$

f deriv en $x=1$

f es func. atraves de funciones

polinómicas $\Rightarrow$

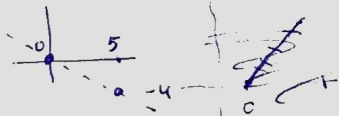
f cont $\mathbb{R}$
 f deriv $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -4x & x < 1 \\ x^2 - 6x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -4 & x < 1 \\ 2x - 6 & x \geq 1 \end{cases}$$

Tenemos que encontrar $c \in (0, 5)$ t.q $f'(c) =$ pendiente del segmento que une los pto $(0, 0)$, $(5, -4)$

i.e. $f'(c) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0}$



este valor me lo proporciona el TVM Diferencial

que garantiza que por $\left. \begin{aligned} f &\text{ cont } [0, 5] \\ f &\text{ deriv } (0, 5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists c \in (0, 5)$

$$\text{t.q. } f'(c) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0}$$

$$\frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{-4 - 0}{5} = \boxed{-\frac{4}{5}} \quad \left\{ \begin{aligned} 2c - 6 &= -\frac{4}{5} \\ 2c &= 6 - \frac{4}{5} \end{aligned} \right.$$

$$f'(c) = \boxed{2c - 6}$$

$$\boxed{c = \frac{13}{5}} \quad \checkmark$$

$\downarrow$
tiene que ser $c \geq 1$ ya que $-4 \neq -\frac{4}{5}$

Solución $\checkmark$

(14) Navarra ORD 2021 P.7 (Opcional)

P.10

$$f(x) = \ln \left(\frac{5x-2-x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x}{x^2-4x+6} \right) \text{ en } [1,3]$$

Comprobar a) f cont en $[1,3]$

b) demostrar $\exists \alpha \in (1,3)$ t.q. $f'(\alpha) = \frac{3}{2} \ln 2$
enunciar el th utilizado y justificar su uso.

a) f cont en $[1,3]$?

f composición de logarítmica con suma, restas, producto y cociente de funciones polinómicas y sinusoidales
 $\Rightarrow f$ será continua donde este bien definida $\left\{ \begin{array}{l} \text{denominador} \neq 0 \\ \text{argumento} > 0 \end{array} \right.$

• Veamos que $x^2-4x+6 \neq 0$

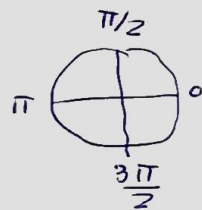
$$x^2-4x+6=0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-24}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2} \notin \mathbb{R}$$

por tanto el denominador no se anula nunca

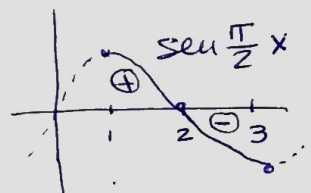
• tenemos que ver que $\frac{5x-2-x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x}{\text{con } x \in [1,3]} > 0$
(de lo contrario $\nexists \ln$)

Estudiamos por separado $5x-2$ recta creciente
 $-x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x$

$$\begin{aligned} x \in [1,3] &\rightarrow x=1 \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 \\ &x=2 \rightarrow \pi \rightarrow \operatorname{sen} \pi = 0 \\ &x=3 \rightarrow \frac{3\pi}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1 \end{aligned}$$

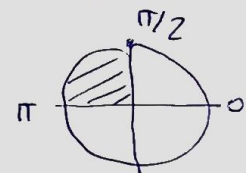


Para el estudio separamos el intervalo en dos subintervalos $[1,2]$ y $[2,3]$



$x \in [1,2]$

$$x \in [1,2] \rightarrow \frac{\pi}{2}x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x \in [0,1]$$

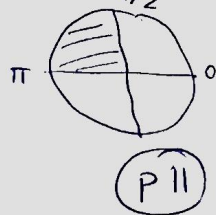


$$x \in [1,2] \rightarrow -x \in [-2,-1]$$

$$-x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x$$

$\rightarrow$ sigue

$$\begin{aligned} x \in [1, 2] &\rightarrow \frac{\pi}{2}x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2}x \in [0, 1] \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 \leq \sin \frac{\pi}{2}x \leq 1 \\ x \in [1, 2] &\rightarrow 1 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow 0 \leq x \sin \frac{\pi}{2}x \leq 2$$

$$0 \geq -x \sin \frac{\pi}{2}x \geq -2$$

o també en $-x \sin \frac{\pi}{2}x \geq -2$

$$\boxed{-2 \leq -x \sin \frac{\pi}{2}x}$$

$$x \in [1, 2] \rightarrow 5x \in [5, 10] \rightarrow 5x - 2 \in [3, 8]$$

$$\Rightarrow \boxed{3 \leq 5x - 2 \leq 8}$$

sumando (unintendo) ambd

$$1 \leq 5x - 2 - x \sin \frac{\pi}{2}x \leq 8$$

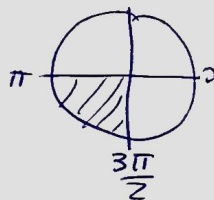
$$\boxed{5x - 2 - x \sin \frac{\pi}{2}x > 0}$$

y per tanto $\exists \ln$

Si $x \in [2, 3]$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2}x &\in [-1, 0] \Rightarrow -1 \leq \sin \frac{\pi}{2}x \leq 0 \\ x &\in [2, 3] \Rightarrow 2 \leq x \leq 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow -2 \leq x \sin \frac{\pi}{2}x \leq 0 \Rightarrow \boxed{2 \geq -x \sin \frac{\pi}{2}x \geq 0}$$

$$x \in [2, 3] \Rightarrow 2 \leq x \leq 3 \Rightarrow 10 \leq 5x \leq 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \boxed{8 \leq 5x - 2 \leq 13} \\ \boxed{0 \leq -x \sin \frac{\pi}{2}x \leq 2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 8 \leq 5x - 2 - x \sin \frac{\pi}{2}x \leq 15 \\ \boxed{5x - 2 - x \sin \frac{\pi}{2}x > 0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists \ln$$

en qualq. casu la funció per tant està bé definida en $[-1, 3]$ y es continua

b) $\exists \alpha \in (1,3)$ tq. $f'(\alpha) = \frac{1}{2} \ln 2$:

Vamos a utilizar el T.V.M. Dif que dice que

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ cont } [1,3] \\ f \text{ deriv } (1,3) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \alpha \in (1,3) \text{ tq } f'(\alpha) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1}$$

Veamos lo que vale $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{\ln\left(\frac{15-2-3(-1)}{9-12+6}\right) - \ln\left(\frac{3-1}{3}\right)}{2}$

$$= \frac{\ln\left(\frac{16}{3}\right) - \ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2} \stackrel{\substack{\text{prop.} \\ \text{logaritmos}}}{=} \frac{\ln\left(\frac{\frac{16}{3}}{\frac{2}{3}}\right)}{2} = \frac{\ln\left(\frac{16}{2}\right)}{2} = \frac{\ln 8}{2}$$

$$= \boxed{\frac{3 \ln 2}{2}} \text{ que es justo lo que estamos buscando}$$

$\Rightarrow$ solo tengo que ver que se cumplen las hipótesis del TVM Dif.

f cont en $[1,3]$ (lo vimos en el apdo a)
por ser composición de funciones elementales con un cociente que nunca se anula y estaba bien definida en $[1,3]$

No falta ver que f deriv en $(1,3)$

Calculamos su derivada y tenemos que comprobar que está bien definida en $(1,3)$

$$f(x) = \ln\left(\frac{5x-2-x\sin\frac{\pi}{2}x}{x^2-4x+6}\right) = \ln(5x-2-x\sin\frac{\pi}{2}x) - \ln(x^2-4x+6)$$

para que sea más fácil

$$f'(x) = \frac{5 - (\sin\frac{\pi}{2}x + x(\cos\frac{\pi}{2}x)(\frac{\pi}{2}))}{5x-2-x\sin\frac{\pi}{2}x} - \frac{2x-4}{x^2-4x+6} =$$

$$= \frac{5 - \sin\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}x\cos\frac{\pi}{2}x}{5x-2-x\sin\frac{\pi}{2}x} - \frac{2x-4}{x^2-4x+6}$$

$\downarrow$
Este denominador no se anula nunca en $[1,3]$

lo vimos en apdo a)

$\downarrow$ Este denominador NO se anula nunca en $[1,3]$ lo vimos en el

apdo a)

$\Rightarrow f'$ está bien definida en $(1,3)$ y f deriv en $(1,3)$

15) $f(x) = \sqrt{x + \sin \frac{\pi x}{2}}$ en $[1, 3]$

Navarra EXT 2021 Ej 7 (Optimal)

- a) f es composición de funciones continuas y el radicando es suma de funciones continuas $\Rightarrow$ será continua donde esté bien definida i.e. donde el radicando sea positivo.

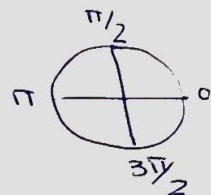
$$\left. \begin{array}{l} x \in [1, 3] \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \\ \sin \frac{\pi x}{2} \in [-1, 1] \Rightarrow -1 \leq \sin \frac{\pi x}{2} \leq 1 \text{ siempre} \end{array} \right\} 0 \leq x + \sin \frac{\pi x}{2} \leq 4$$

por tanto el radicando es positivo en $[1, 3]$

y f cont en $[1, 3]$

- b) Vamos a aplicar el th. de Rolle ya vimos q f cont $[1, 3]$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ cont } [a, b] \\ f \text{ deriv } (a, b) \\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a, b) \text{ tq } f'(c) = 0$$



$\Rightarrow f$ continua en $[1, 2]$ y en $[2, 3]$

$$f(1) = \sqrt{1 + \sin \frac{\pi}{2}} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$f(2) = \sqrt{2 + \sin \pi} = \sqrt{2 + 0} = \sqrt{2}$$

$$f(3) = \sqrt{3 + \sin \frac{3\pi}{2}} = \sqrt{3 - 1} = \sqrt{2}$$

Sólo faltaría ver que f derivable en $(1, 2)$ y en $(2, 3)$

$$f'(x) = \frac{1 + (\cos \frac{\pi x}{2}) \cdot \frac{\pi}{2}}{2 \sqrt{x + \sin \frac{\pi x}{2}}} = \frac{1 + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}}{2 \sqrt{x + \sin \frac{\pi x}{2}}} \text{ en } [1, 3]$$

El radicando es positivo (lo vimos en apdo a) y el denominador NO se anula en $[1, 3]$

$$x \in [1, 2] \rightarrow \sin \frac{\pi x}{2} \in [0, 1] \Rightarrow x + \sin \frac{\pi x}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq \sin \frac{\pi x}{2} \leq 1 \end{array} \right\} 1 \leq x + \sin \frac{\pi x}{2} \leq 3 \rightarrow \text{es } > 0$$

$$x \in [2, 3] \rightarrow \sin \frac{\pi x}{2} \in [-1, 0] \Rightarrow 1 \leq x + \sin \frac{\pi x}{2} \Rightarrow \text{es } > 0$$

continuación Ej 15

(p.14)

$\Rightarrow$ el radicando es positivo y el denominador nunca se anula $\Rightarrow$ la función está bien definida en $[1,3]$

$\Rightarrow f$ derivable en $(1,3)$

en particular $\left. \begin{array}{l} f \text{ cont } [1,2] \\ f \text{ deriv } (1,2) \\ f(1) = f(2) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{por el Th Rolle}$
 $\exists \alpha \in (1,2) \text{ t.q. } f'(\alpha) = 0$

$\left. \begin{array}{l} f \text{ cont } [2,3] \\ f \text{ deriv } (2,3) \\ f(2) = f(3) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{por Th. Rolle}$
 $\exists \beta \in (2,3) \text{ t.q. } f'(\beta) = 0$
c.q.d.