

15) a) ver apuntes del A.V.

b i) Se puede hacer de 2 formas distintas: $\textcircled{*}$ y $\textcircled{**}$ (vale cualquiera)

$$\textcircled{*} A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{x - \sqrt{2-x}} = \frac{0}{0} \text{ indet. mult. y div. por conjugado}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{x - \sqrt{2-x}} \cdot \frac{x + \sqrt{2-x}}{x + \sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x + \sqrt{2-x})}{x^2 - 2 + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x + \sqrt{2-x})}{(x-1)(x+2)} \underset{\substack{\text{como} \\ x \neq 1}}{\uparrow} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt{2-x}}{x+2} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{array}{c|cc|c} 1 & +1 & & -2 \\ 1 & & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & & 0 \end{array}$$

 $\textcircled{**}$ por L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(x - \sqrt{2-x})'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \frac{1}{2\sqrt{2-x}}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \text{por L'Hopital } \exists A = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$$

$$\text{bii) } A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \frac{0}{0} \text{ indet.}$$

1º L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + x \frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1+x-1}{1+x}}{\frac{(1+x)\ln(1+x) + x}{(1+x)}} \underset{\substack{x \neq -1 \\ 1+x \neq 0}}{\uparrow} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)\ln(1+x) + x} = \frac{0}{0} \text{ indet.}$$

2º L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x) + (1+x) \frac{1}{(1+x)} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x) + 2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$ por cumplirse las condiciones del th L'Hopital
tenemos garantizado que $\exists A \in \mathbb{R}$ y $A = \frac{1}{2}$

16), $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{Dom } f = (0, +\infty)$

p. 32

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

a) $f(x)$? sabiendo $f(1) = 0 \rightarrow$ se usa para la constante de integración

es una integral $\int f'(x) dx \rightarrow$ más adelante

para el b) se necesita el a) así que este ejercicio es un ejemplo de que sin saber integrar No se puede aprobar ABAU

En realidad piden $f(x) = \int \frac{1 - \ln x}{x^2} dx + k$
la k se obtiene por $f(1) = 0$

17 a) ver apuntes

$$x^2 > 0$$

pag (33)

b) $f(x) = 2x + \frac{5}{2} \ln(1+x^2)$

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

recta tangente a $f(x)$ en el pto $x=0$

Estudiar monotonía

recta tangente: $y - f(x_0) = m(x - x_0)$; $m = f'(x_0)$

En este caso $x_0 = 0$; $f(0) = 2 \cdot 0 + \frac{5}{2} \ln(1+0) = 0 + \frac{5}{2} \cdot 0 = 0$

$m = f'(x_0) = f'(0)$

$f'(x) = 2 + \frac{5}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow f'(0) = 2 + 5 \cdot \frac{0}{1} = \boxed{2}$

recta tangente: $y - 0 = 2(x - 0)$

en $x_0 = 0$, a $f(x)$

$\boxed{y = 2x}$ tangente a f en $(0,0)$

Monotonía

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{5x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{5x}{1+x^2} = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x = -2(1+x^2) \Leftrightarrow 5x = -2 - 2x^2 \Leftrightarrow$

$2x^2 + 5x + 2 = 0$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$

$-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

ptos críticos

$-\frac{8}{4} = -2$

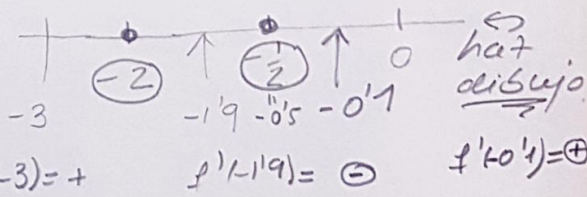
Estudiar signo $f'(x) = 2 + \frac{5x}{1+x^2}$

	$x < -2$	$-2 < x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x$
Signo f'	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
comportamiento f	CRECE $\nearrow$	DECRECE $\searrow$	CRECE $\nearrow$

$\Rightarrow f$ tiene

en $x = -2$ máx. relat.

en $x = -\frac{1}{2}$ mín. relat.



$\left(2 + \frac{5(-1/2)}{1+(-1/2)^2} \right) \approx -0.06 \ominus$

En este ejercicio es

fácil confundirse al utilizar la calculadora

18) $f(x) = \begin{cases} ax+2 & x < 1 \\ 3(x-2)^2 & x \geq 1 \end{cases}$

a) f deriv. en $x=1$ para algún a ?

f función a trozos $\begin{cases} f_1(x) = ax+2 & x < 1 \\ f_2(x) = 3(x-2)^2 & x \geq 1 \end{cases}$

f_1 y f_2 por separado son funciones polinómicas y por tanto continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$, por tanto f será cont. y derivable salvo a lo sumo en el pto de unión $x=1$

f continua en $x=1$ (p.g. para ser deriv. 1º tiene que ser continua)

* $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax+2 = \boxed{a+2}$
 * $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3(x-2)^2 = 3 \cdot (-1)^2 = \boxed{3}$ $\Rightarrow$
 $a+2=3 \Leftrightarrow a=1$

para f cont. en $x=1 \Leftrightarrow \boxed{a=1}$

f derivable en $x=1$ a tiene que ser $a=1$ (Si no sería continua y por tanto tampoco derivable)

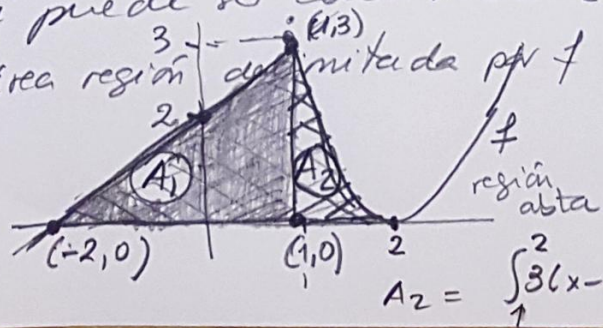
* derivada de f a la dcha de 1 : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_2'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [3(x-2)]' =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 = \boxed{3}$

* derivada lateral de f a la izqda de 1 : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_1'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a \cdot x + 2)' =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^-} a = \boxed{1}$ $a=1$

$3 \neq 1$ ¡imposible! $\nexists a \in \mathbb{R}$ tq f derivable en $x=1$

si puede ser continua si $a=1$

b) área región delimitada por f y eje OX



$A = A_1 + A_2$
 $A_1 = \text{área triángulo rectáng.}$
 $y = x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
 base = 3 $\left(A_1 = \frac{9}{2} \right)$
 altura = 3 $\rightarrow$ más adelante
 $A_2 = \int_1^2 3(x-2)^2 dx$

19) a) apuntes

b) $f(x)$ tq $f(-1)=1$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ e^{2x}-2 & x \geq 0 \end{cases}$$

ec rectas tangentes en los pto $x=-2$, $x=\frac{\ln 2}{2}$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$x_0 = -2$; $f(-2) \rightarrow$ hay que calcular $f(x) = \int f'(x) dx$, es también una función a trozos

$$f'(-2) = 2(-2) - 1 = -4 - 1 = -5$$

Ec. recta tangente en $x_0 = -2$

$$y - f(-2) = -5(x + 2)$$

$$y - 5 = -5(x + 2); \quad y - 5 = -5x - 10; \quad \boxed{y = -5x - 5}$$

$x_0 = \frac{\ln 2}{2}$, $f(x_0) \rightarrow 1^\circ$ calcular $f(x)$ *

pendiente $f'(\frac{\ln 2}{2}) = e^{2(\frac{\ln 2}{2})} - 2 = 2 - 2 = 0$

$$y - f(\frac{\ln 2}{2}) = 0; \quad y = f(\frac{\ln 2}{2})$$

$$y = \begin{cases} y = -\frac{1}{2} - \ln(2) & \text{si } f \text{ cont. en } 0 \\ y = -1 - \ln 2 + k' & \text{si } f \text{ no cont. en } 0 \end{cases}$$

* Cálculo de $f(x)$ (suponiendo f continua)

para $x < 0$ $\int (2x-1) dx = x^2 - x + k$; como $f(-1)=1$
 $f(-1) = 1 + 1 + k = 1 \Rightarrow k = -1$

para $x \geq 0$ $\int (e^{2x} - 2) dx = \frac{e^{2x}}{2} - 2x + k'$; para la constante de integración k' no tenemos datos hay que utilizar que f continua en 0

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & x < 0 \\ \frac{e^{2x}}{2} - 2x + k' & x \geq 0 \end{cases}$$

para f continua en $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2} - 0 + k'$$

$$-1 = \frac{1}{2} + k' \Rightarrow k' = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 1 = 4 + 2 - 1 = 5$$

$$f(\frac{\ln 2}{2}) = \frac{e^{2 \cdot \frac{\ln 2}{2}}}{2} - 2(\frac{\ln 2}{2}) - \frac{3}{2} = \frac{2}{2} - \ln 2 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} - \ln 2$$

clásico fácil
integración

20)

$$y = x(x-2)$$

eje X
recta $y=x$

$$y = x^2 - 2x$$

parábola

con vértice

por $a = 1 > 0$

ptn corte

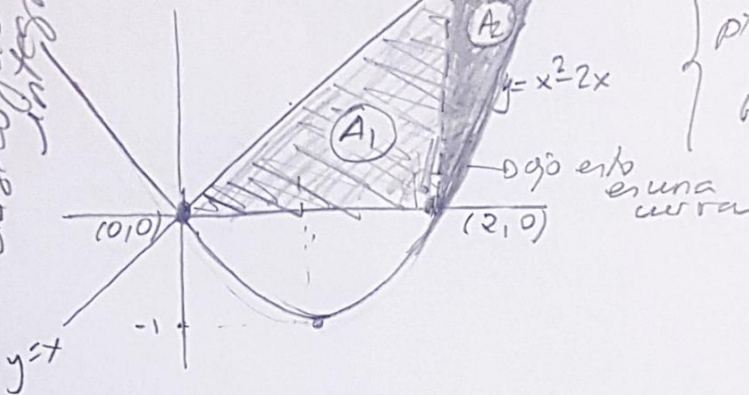
$$x=0 \quad \begin{cases} (0,0) \\ (2,0) \end{cases}$$

vértice

$$\frac{2}{2} = 1 \quad (1, -1)$$

$$y = x^2 - 2x$$

0 qd esto es una curva



pto de corte

$$y=x$$

$$y=x(x-2)$$

$$x = x(x-2)$$

$$1 = x-2$$

$$x=3$$

$$(3,3)$$

3

$$A = A_1 + A_2$$

A1) puede calcularse como área de triángulo rectángulo de base 2 y altura 2

$$A_1 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \text{ u}^2$$

también se podría por cálculo integral
área bajo la gráf. $(y=x)$
y el eje X

$$\int_0^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 2$$

A2) Área comprendida entre las gráficas entre 2 y 3

$$f_1: y=x$$

$$f_2: y=x(x-2)$$

$$\Rightarrow \left| \int_2^3 f_1 - f_2 dx \right| = \int_2^3 x - x^2 + 2x = \int_2^3 -x^2 + 3x =$$

$$\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_2^3 = -9 + \frac{27}{2} + \frac{8}{3} - \frac{12}{2} = \frac{7}{6} \text{ u}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 2 + \frac{7}{6} = \frac{19}{6} \text{ u}^2$$

21). $f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$

a) $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / (x-2)^2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\} =$
 $= (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

b) $x=0 \Rightarrow y = 1 + \frac{2}{4} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$(0, \frac{3}{2})$

$y=0 \Rightarrow 0 = 1 + \frac{2}{(x-2)^2} \Leftrightarrow \frac{2}{(x-2)^2} = -1 < 0$ imposible
 la sol. no es real, $\notin \mathbb{R}$

c) A.V.

pto. de no dominio $x=2$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} (1 + \frac{2}{(x-2)^2}) = \infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (1 + \frac{2}{(x-2)^2}) = \infty$

$\Rightarrow \boxed{x=2}$ A.V. tanto a dcha como a izqda

A.H.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{2}{(x-2)^2}) = 1 + 0 = 1$

recta $\boxed{y=1}$ Asint. Horizontal cuando $x \rightarrow \infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{2}{(x-2)^2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{2}{(x-2)^2}) = 1 + 0 = 1$

Como tiene A.V. $\rightarrow$ ~~oblicua~~ ^{A.}

$(-x-2)^2 > 0$ A.V. cuando $x \rightarrow -\infty$

d) Monotonía

$f'(x) = -\frac{2 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = -\frac{4}{(x-2)^3} \quad x \neq 2$

ptos. críticos

el pto. de no dominio $x=2$

y los pto. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{(x-2)^3} = 0 \Leftrightarrow -4 \neq 0$ No hay

	$x < 2$	$x > 2$
signo f'	$\oplus$	$\ominus$
comport. f	CRECE $\uparrow$	DECRECE $\downarrow$

f creciente $(-\infty, 2)$
 f decreciente en $(2, +\infty)$

en $x=2$ tiene un pto crítico (no dominio) que No es ni máx. ni mín.

e) Curvatura

$f''(x) = \frac{4 \cdot 3(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{12}{(x-2)^4}$

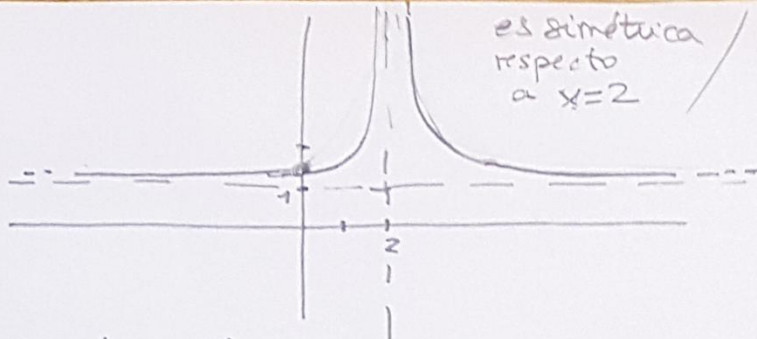
$f(2) = \infty$
 (la función no alcanza a máx. porque está fuera de su dominio)

Pto. de no dominio $x=2$

$f''(x) = 0$ No tiene soluciones reales

f convexa $\forall x \in \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$
 No tiene pto. inflexión

	$x < 2$	$x > 2$
signo f''	$\oplus$	$\oplus$
comp. f	$\cup$ convexa	$\cup$ convexa



es simétrica
respecto
a $x=2$

posición relativa p. 38
a simétricas

para A.H: $y=1$

$f(x)$ queda

por encima
de la asíntota

$$f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2} > 1$$

NOTA: no lo pedían pero

el dibujo de f se puede obtener por las transformaciones elementales:

$$\frac{1}{x^2}$$

→ desplazar
2 unidades
a la DCHA

$$\frac{1}{(x-2)^2}$$

"estirarla"
mult. por 2

$$\frac{2}{(x-2)^2}$$

hipérbola PAR

$$1 + \frac{2}{(x-2)^2}$$

→ "subirla" 1 unidad
sobre el eje x

(22) Todo de integración

Básico conjetura

23) $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$

a) $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid x-1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\}$
 $= (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

b) $f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)-1} = \frac{2x^2}{-x-1} = -\frac{2x^2}{x+1} \neq -f(x)$
 $-f(x) = -\frac{2x^2}{x-1} = \frac{2x^2}{-x+1}$
 $\neq f(-x)$

No es ni par ni impar

c) $x=0 \Rightarrow f(0) = \frac{0}{-1} = 0$ (0,0) pto. corte

$\frac{2x^2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x=0$ único pto. corte con los ejes

faltan Asintotas $\rightarrow$ 1º Domf
 e) monotonía

$\forall x \in \text{Dom } f \Rightarrow f'(x) = \frac{4x(x-1) - 2x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2} =$
 $= \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x(x-2)=0$
 $x \neq 1$ ojo! $\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

Estudiamos signos: (hay que incluir el pto. de No dominio)

ptos críticos: $x=1$ (no dominio)

$f'(x) = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$ $\begin{matrix} x=0 \\ x=2 \end{matrix}$ posibles máx y/o mínimos o pto silla

	$x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 2$
Signo f'	+	-	-	+
comport. f	CRECE $\nearrow$	DECRECE $\searrow$	DECRECE $\searrow$	CRECE $\nearrow$

en $\begin{cases} x=0 & \text{máximo relativo} \\ x=1 & \text{pto. de No dominio} \\ x=2 & \text{mínimo relativo} \end{cases}$

f crece $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
 f decrece $(0, 1) \cup (1, 2)$

f) Curvatura $f'(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$

$f''(x) = \frac{(4x-4)(x-1)^2 - (2x^2-4x)2(x-1)}{(x-1)^4} =$
 $= \frac{(x-1)[(4x-4)(x-1) - 2(2x^2-4x)]}{(x-1)^4} = \frac{(4x-4)(x-1) - 2(2x^2-4x)}{(x-1)^3}$
 $= \frac{4x^2 - 4x - 4x + 4 - 4x^2 + 8x}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3}$

$x \neq 1$
 1º Domf

$$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$$

pts. singulares

$x=0$ (máx)
 $x=1$ no dominio
 $x=2$ (mín)

$f''(x) \neq 0 \forall x \in \text{Dom}(f)$
 No hay pts. inflexión

Signo f'' $x < 0$ $0 < x < 1$ $1 < x < 2$ $x > 2$
 Comport. f $\ominus$ $\ominus$ $\oplus$ $\oplus$
 concava concava convexa convexa

f concava en $(-\infty, 1)$

f convexa en $(1, +\infty)$

d) faltaban las asíntotas (se me olvidaron)

A.V. pts. de no dominio $x=1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2}{x-1} = +\infty \end{array} \right. \quad x=1 \text{ A.V.}$$

A.H.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x-1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{-x-1} = -\infty$$

no hay A.H.
 si no ramas
 parabólicas o ∞

$$y = mx + n$$

A.O.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1} = \boxed{2}$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{x-1} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x^2 + 2x}{(x-1)} = \boxed{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{y = 2x + 2} \text{ A.O. para } x \rightarrow +\infty$$

Como $f(x)$ es. fracción algebraica, en $x \rightarrow -\infty$
 obtendremos también la misma A.O.

Resumen: $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{1\}$

pg. 42

$$x=1 \text{ A.V.} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f = +\infty \end{array} \right.$$

A.O. en $y=2x+2$ (tanto $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$)

pt corte $(0,0)$

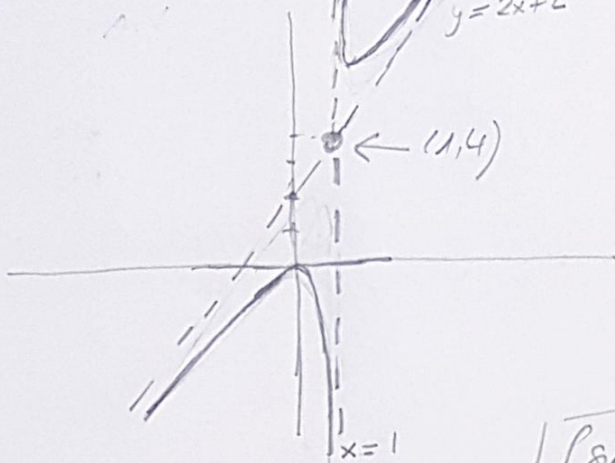
f crece $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, f decrece $(0, 1) \cup (1, 2)$

$x=0 \rightarrow$ máx. relat.

$x=1$ no dominio

$x=2 \rightarrow$ mínim. relativo

$$y=2x+2$$



por su función algebraica
función sea simétrica
con respecto
al pt de de
int. de ambas
asíntotas

$$\left. \begin{array}{l} x=1 \\ y=2x+2 \end{array} \right\} 2+2=4$$

f simét. con resp. $(1, 4)$

24) a) apuntes

b) $f(x) = ax^3 + bx + c$

$y=2x+1$ tangente a f en $x=0$

$$\int_0^1 f(x) dx = 1$$

$f'(0) = 2$ (por $m=2$ pendiente de $y=2x+1$ en pt $x=0$)

$f'(x) = 3ax^2 + b$; por otro lado $f(0) = y(0) = 1$ (pt de tangencia)

$$f(0) = \boxed{b = 2}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 1}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (ax^3 + bx + c) dx = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 1$$

$$\boxed{a + 2b + 4c = 4} \text{ como } \left. \begin{array}{l} b=2 \\ c=1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$a + 4 + 4 = 4$$

$$\boxed{a = -4}$$

$$\boxed{f(x) = -4x^3 + 2x + 1}$$

función interesante

interesante
se puede hacer
b) sin tener

25) a) ver apuntes

$$b) f(x) = \begin{cases} \ln(e+x^2) & x < 0 \\ x^2+bx+c & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{b.c? para } f \text{ deriv. en } 0$$

* f continua en $x=0$ (si no es continua tampoco es derivable)
 si continua es una condición NECESARIA para ser derivable

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(e+x^2) = \ln(e) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2+bx+c = c = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{c=1}$$

* f deriv en $x=0$

$$\left. \begin{aligned} \text{derivada en } 0^- : \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e+x^2))' &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e+x^2} = \frac{0}{e} = \boxed{0} \\ \text{derivada en } 0^+ : \lim_{x \rightarrow 0} (x^2+bx+c)' &= \lim_{x \rightarrow 0} (2x+b) = b \end{aligned} \right\}$$

$$f \text{ derivable en } x=0 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

26) $f(0)=0$
 $f'(x) = (2-x)e^{3x}$ { ej: integración
 $f(x) = \int (2-x)e^{3x} dx =$
 int por partes

ALPES
 Arc log pol exp
 $u=2-x; du=-dx$
 $dv=e^{3x}; v=\frac{e^{3x}}{3}$

$$= (2-x) \frac{e^{3x}}{3} - \int -\frac{e^{3x}}{3} dx =$$

$$= (2-x) \frac{e^{3x}}{3} + \frac{1}{3} \int e^{3x} dx =$$

$$= \left[(2-x) \frac{e^{3x}}{3} + \frac{1}{3} \frac{e^{3x}}{3} + k \right] = \frac{3(2-x)e^{3x} + e^{3x}}{9} + k =$$

$$= \frac{e^{3x}(6-3x+1)}{9} + k = \left[\frac{e^{3x}(7-3x)}{9} + k \right] = f(x)$$

$$f(0)=0 \Rightarrow 0 = 1 \cdot \left(\frac{7-0}{9} \right) + k \Rightarrow k = -\frac{7}{9}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{e^{3x}(7-3x)}{9} - \frac{7}{9}} = \left[e^{3x} \left(\frac{7}{9} - \frac{x}{3} \right) - \frac{7}{9} \right]$$

Curvatura (Esta parte se podía hacer sin conocer f)
 $f''(x) = (-1)e^{3x} + (2-x) \cdot e^{3x} \cdot 3 = -e^{3x} + (6-3x)e^{3x}$

$$= e^{3x}(-1+6-3x) = \boxed{e^{3x}(5-3x)}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^{3x}(5-3x)=0 \xrightarrow{e^{3x} \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}} 5-3x=0 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{5}{3}}$$

$x = \frac{5}{3}$ posible pto inflexión

$f''(x) = e^{3x(5-3x)}$ pág. (44)

	$x < \frac{5}{3}$	$x > \frac{5}{3}$
signo f''	⊕	⊖
comp. f	convexa	cóncava

f tiene en $x = \frac{5}{3}$ pto inflexión

f convexa en $(-\infty, \frac{5}{3})$
f cóncava en $(\frac{5}{3}, +\infty)$

27) a) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & x \leq 1 \\ \frac{2\ln x + 2}{x^2} & x > 1 \end{cases}$ a, b f deriv. $x=1$

para ser deriv. es necesario que sea continua

* f cont. en $x=1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + bx) = a + b = f(1)$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\ln x + 2}{x^2} = \frac{2 \cdot 0 + 2}{1^2} = 2$

$\boxed{a + b = 2}$

* f deriv. en $x=1$

$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2ax + b) = 2a + b$
 $f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \cdot \frac{1}{x} x^2 - (2\ln x + 2) 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - (2\ln x + 2) 2x}{x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x [1 - 2\ln x - 2]}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 [-1 - 2\ln x]}{x} = \frac{2(-1 - 0)}{1} = -2$

$\Rightarrow \boxed{2a + b = -2}$

Hacemos un sistema

$a + b = 2$
 $2a + b = -2$

$\begin{cases} a + b = 2 \\ -2a - b = 2 \end{cases}$
 $-a = 4 \Rightarrow \boxed{a = -4}$

$b = 2 - a ; b = 2 + 4 = 6$

$\Rightarrow \boxed{b = 6}$

b) $f(x) = \begin{cases} -4x^2 + 6x & x \leq 1 \\ \frac{2\ln x + 2}{x^2} & x > 1 \end{cases}$

estudiar monotonía

$$f'(x) = \begin{cases} -8x+6 & x \leq 1 \\ -\frac{2(1+2\ln x)}{x} & x > 1 \end{cases}$$

para $x \leq 1$

$$-8x+6=0 \Leftrightarrow -8x=-6 \Leftrightarrow x=\frac{6}{8}=\left(\frac{3}{4}\right) \leq 1$$

para $x > 1$

$$\frac{-2(1+2\ln x)}{x}=0 \Leftrightarrow -2(1+2\ln x)=0 \Leftrightarrow 1+2\ln x=0$$

$\uparrow$
 $x \neq 0$
por $x > 1$

$$\Leftrightarrow 2\ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-1/2} = x \text{ No VALE}$$

porque $x = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.61 < 1$

El único pto donde $f'(x)=0$ es $x = \frac{3}{4}$

	$x < \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} < x \leq 1$	$x > 1$
signo f'	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$
comport. f	CRECIENTE $\nearrow$	DECRECIENTE $\searrow$	DECRECIENTE $\searrow$

en $x = \frac{3}{4}$ f tiene un máx. relat.

$f \text{ creciente } (-\infty, \frac{3}{4})$
 $f \text{ decreciente } (\frac{3}{4}, +\infty)$

(28) $f(x) = 4x - x^2$ y rectas tangentes a f en $x=0$, $x=2$

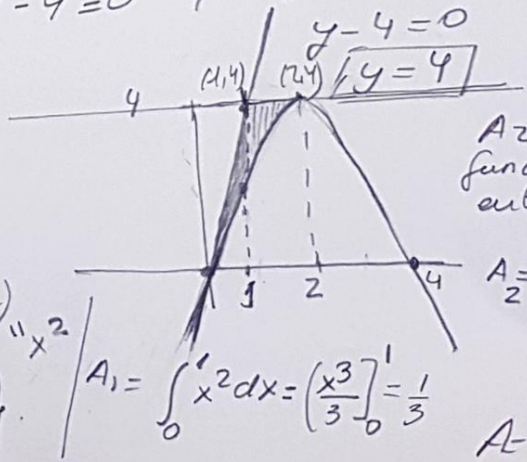
* $x=0 \Rightarrow f(0)=0$; $m = f'(0) = 4$ $\left\{ \begin{array}{l} y-0=4(x-0) \\ y=4x \end{array} \right.$

* $x=2 \Rightarrow f(2)=8-4=4$
 $m = f'(2) = 4-4=0$ $\left\{ \begin{array}{l} y-4=0(x-2) \\ y=4 \end{array} \right.$

Dibujamos

$4x-x^2$ parábola $\cap$ cóncava
 ptn de corte $x=0, x=4$
 vértice $\frac{-4}{-2} = 2, (2,4)$

A₁ tomamos la función $4x - (4x - x^2)$ entre 0 y pto de corte de $y=4x$
 $y=4x \Rightarrow x=1$



A₂ tomamos la función $4 - (4x - x^2)$ entre 1 y 2

$$A_2 = \int_1^2 (4 - 4x + x^2) dx = \left[4x - \frac{4x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{2}{3}$$

$$A_1 = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

my fol

29 a) Apuntes

b) $f(x) = 2e^{-x}(x+1)$ monotonía ; $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2e^{-x}(-1)(x+1) + 2e^{-x}(1) = -\frac{2}{e^x}(x+1) + \frac{2}{e^x}$$

$$= -\frac{2}{e^x}x - \frac{2}{e^x} + \frac{2}{e^x} = \boxed{-\frac{2x}{e^x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$$

$$e^x \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

pto. crítico

$$f(0) = 2 \cdot 1(0+1)$$

$$\boxed{(0, 2)}$$

Signo f'

$x < 0$	$x > 0$
$\oplus$	$\ominus$
f CRECIENTE	f DECREC.

f tiene en $(0, 2)$ un máximo relativo

f crece $(-\infty, 0)$
 f decrece $(0, +\infty)$

my, my fol

30 a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2 - \frac{x}{4}}{x^2} = \frac{\sqrt{4} - 2}{0} = \frac{0}{0}$ indeterminado

L'Hôpital 1-vez

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}} - \frac{1}{4}}{2x} = \frac{0}{0} \text{ indeterminado}$$

L'Hôpital 2-vez

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}(-\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{(4+x)^3}}}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{8\sqrt{(4+x)^3}} = -\frac{1}{8\sqrt{4^3}} = \boxed{-\frac{1}{64}}$$

b) $\int x \sin x \, dx$, t.q. $F(\pi) = 0$; $F'(x) = x \sin x$

ALPES

$$u = x \quad du = dx$$

$$dv = \sin x \, dx ; v = -\cos x$$

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) + \int \cos x \, dx =$$

$$= [-x \cos x + \sin x + k]$$

$$F(\pi) = -\pi \underbrace{\cos \pi}_{-1} + \underbrace{\sin \pi}_0 + k = 0$$

$$\pi + k = 0 \Rightarrow \boxed{k = -\pi}$$

$$\boxed{F(x) = -x \cos x + \sin x - \pi}$$

importante

3.1) a) apuntes

$$b) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)} \quad \uparrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+2}{x} \quad \text{si } x \neq 2 \quad (47) \\ \cancel{\frac{x+2}{x}} \quad \text{si } x = 2 \end{array} \right.$$

Siempre que $x \neq 2$ ocurre que $x-2 \neq 0$
 $\Rightarrow$ podemos simplificar en otro caso nos daría $\frac{0}{0}$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

(*) $2 \notin \text{Dom } f$, pero

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{(x^2 - 2x)} =$$

$$\uparrow \quad = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x} = \boxed{2}$$

como $x \rightarrow 2^-$

$x \neq 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{(x^2 - 2x)} \uparrow \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x} = \boxed{2}$$

$\uparrow$
 si $x \rightarrow 2^+$
 $\Rightarrow x \neq 2$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ pero $\nexists f(2)$

$x=2$ discontinua entable que se salvaría definiendo $f(x) = \frac{x+2}{x}$

(**) si $x=0$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2}{0}$ indeterminado

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

discontinua inevitable de salto ∞

— 0 —