

1) a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ es una fracción algebraica y por tanto es continua en su DOMINIO

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

f continua en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

f discontinua en $x = 1, x = -1$

tipo discontin.

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1}{0} \text{ indet.}$$

daudo valores obtenemos

x	y
-1.1	5.8 ⊕
-0.9	-4.3 ⊖
0.9	-4.3 ⊖
1.1	5.8 ⊕

para $x = -1$ $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\}$ discontinuidad inevitable de salto ∞

para $x = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\}$ dis. inevit. de salto ∞

Monotonía (se estudia en el DOMINIO) i.e. $x \neq \pm 1$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2-1} \right)' = \frac{2x(x^2-1) - x^2(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

Igualemos a CERO: $\frac{-2x}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$

A la IZQDA de $x=0$ (i.e. $x < 0$)

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} > 0 \oplus \text{ porque } (x^2-1)^2 > 0 \text{ como } x < 0 \Rightarrow -2x > 0 \left\{ \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \right\} = \oplus$$

$\Rightarrow$ a la IZQDA de 0 f es CRECIENTE
lo escribo así: f creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

A la DCHA de $x=0$ (i.e. $x > 0$)

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} < 0 \ominus \text{ porque } (x^2-1)^2 > 0 \text{ (recuerda } x \neq \pm 1) \text{ y como } x > 0 \Rightarrow -2x < 0 \left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right\} = \ominus$$

Por tanto f decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

CRECE $\nearrow$ 0 $\searrow$ DECRECE

por tanto en $x=0$ la función (2) presenta un MAX. Relativo.

b) $g(x) = x \ln x$ recta tangente a g que es paralela al eje x

* es recta tangente $y - y_0 = m(x - x_0)$ donde $m = g'(x_0)$
 (x_0, y_0) pto de tangencia $y_0 = g(x_0)$

* El eje de abscisas es el eje x , su ecuacion es $y=0$ y por tanto su pendiente es 0, asique $\boxed{g'(x_0) = 0}$

$$* g'(x) = (x \ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \boxed{\ln x + 1}$$

* igualando a 0 calculamos x_0 :

$$\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow e^{-1} = x \text{ (o lo que es lo mismo } \frac{1}{e})$$

$$\boxed{x_0 = \frac{1}{e}}$$

$$* \text{ calculo ahora } y_0 = g(x_0) ; y_0 = g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \left(\underbrace{\ln 1}_0 - \underbrace{\ln e}_1 \right) = \boxed{-\frac{1}{e}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_0 = -\frac{1}{e}}$$

$$* \text{ la recta pedida es: } y - \left(-\frac{1}{e}\right) = 0 \left(x - \frac{1}{e}\right)$$

$$y + \frac{1}{e} = 0 ; \text{ o lo que es lo mismo } \boxed{y = -\frac{1}{e}}$$

c) integral $\rightarrow$ por ahora NO

2) a.1) Teorema Rolle $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.g.

interesante $\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \\ f \text{ derivable en } (a,b) \\ f(a)=f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) \mid \underline{f'(c)=0}$

a.2) $f(x) = x^2|x|$ ¿Rolle en $[-1,1]$? f_1, f_2 cont. deriv en $\mathbb{R}$

* $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geq 0 \quad (f_1(x)) \\ -x^3 & \text{si } x < 0 \quad (f_2(x)) \end{cases}$ f es continua en $\mathbb{R}$

por $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x^3 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 = f(0)$

en particular f continua en $[-1,1]$

* f derivable en $(-1,1)$ por

$\lim_{x \rightarrow 0} f_1'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3)' = \lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f_2'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x^3)' = \lim_{x \rightarrow 0} -3x^2 = 0$ } iguales

por tanto f derivable y $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -3x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

en particular f derivable en $(-1,1)$ t. Rolle

$f(-1) = -(-1)^3 = -(-1) = 1$
 $f(1) = 1^3 = 1$
 $f(-1) = f(1) \Rightarrow \exists c \in (-1,1)$
t.g. $\underline{f'(c)=0}$

b) $g(x) = e^x(x^2 - 4x + c)$

c? para que g tenga un único pto. crítico

$g'(x) = e^x(x^2 - 4x + c) + e^x(2x - 4) =$
 $= e^x [x^2 - 4x + c + 2x - 4] = e^x [x^2 - 2x + c - 4]$

para que $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x [x^2 - 2x + c - 4] = 0$
 $\Leftrightarrow (como e^x \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 - 2x + c - 4 = 0$

Soluciones de $x^2 - 2x + c - 4 = 0$ ec. 2º grado

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (c-4)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4c + 16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{20 - 4c}}{2}$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{20-4c}}{2} = 1 \pm \sqrt{20-4c} = 1 \pm \sqrt{4(5-c)} = \quad (9)$$

$$= 1 \pm 2\sqrt{5-c} \quad \text{pto. críticos de } g(x) \quad (\text{señal } 2)$$

para que el pto sea único $\Rightarrow 5-c=0$

$$\Rightarrow \boxed{c=5} \quad (\text{y el pto } g'(x)=0 \text{ sería } x=1 \pm 0=1 \text{ doble})$$

b.2) el extremo relativo en ese caso sería:

$$\text{si } \underline{c=5} \Rightarrow \boxed{x_0=1} \quad g(1) = e^1(1^2-4+5)$$

$$g(1) = e \cdot 2 = \boxed{2e}$$

$$\text{ext. relativo } \boxed{(1, 2e)}$$

No es ni máximo ni mínimo

(se llama pto. SILLA o pto. estacionario)

$$\text{porque } g'(x) = e^x(x^2-2x+1) = e^x(x-1)^2 > 0$$

i.e. g es creciente en todo su dominio, así que en el pto crítico $(1, 2e)$ la función no tiene ni máx. ni mínimo (en realidad es un pto de inflexión)

c) integrales $\rightarrow$ aún no (más adelante)

esto no lo pedían, pero es interesante y yo lo podía poner

3) a) integrals $\rightarrow$ aún ND (más adelante) (5)

b) $f(x) = \begin{cases} \ln x & x \in (0, e] \\ ax+b & x \in (e, +\infty) \end{cases}$ a, b f. derivable

$f(x)$ función a trozos $f_1(x) = \ln x, x \in (0, e]$
 $f_2(x) = ax+b, x \in (e, +\infty)$

f_1 func. logarit. neperiano $\Rightarrow$ es cont. y derivable en su dominio $(0, +\infty)$ en particular cont. y derivable en $(0, e]$
 f_2 función polinómica $\Rightarrow$ cont. y derivable en $\mathbb{R}$ en particular en $(e, +\infty)$

$\Rightarrow f$ cont. y deriv. en su dominio $(0, +\infty)$ salvo, a lo sumo, en el pto de unión de ambos trozos que es $x=e$

continuidad

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow e} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow e} \ln x = 1 = f(e) \\ \lim_{x \rightarrow e^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow e} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow e} ax+b = a \cdot e + b \end{aligned} \right\}$$

para f continua en $x=e$ tiene que ocurrir que $\boxed{1 = a \cdot e + b} \quad (1)$ (NOTA: ser continua es una condición NECESARIA para ser derivable)

derivabilidad

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow e} f_1'(x) &= \lim_{x \rightarrow e} (\ln x)' = \lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{x} = \frac{1}{e} \\ \lim_{x \rightarrow e} f_2'(x) &= \lim_{x \rightarrow e} (ax+b)' = \lim_{x \rightarrow e} a = a \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ para que f derivable en $x=e$ tiene que ocurrir $\boxed{\frac{1}{e} = a} \quad (2)$ sustituyendo en (1)
 $1 = 1 + b \Leftrightarrow \boxed{b=0}$
 para ser derivable $\begin{cases} a = \frac{1}{e} \\ b = 0 \end{cases}$

c) integrais $\rightarrow$ agora no, me tarde

6

4) $f(x) = x^2 e^{-x}$

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$ L'Hopital (1º vez)

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$ L'Hopital (2º vez)

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \boxed{0}$ por tanto $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

(y por tanto f tiene una A.H. en $y=0$ i.e. en el eje X)

a.2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x)^2 e^{-(-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = \infty$

$\Rightarrow f$ tiene una rama parabólica o infínita en $x \rightarrow -\infty$

b) 1) Monotonía

$f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 e^{-x} \cdot (-1) = \frac{2x}{e^x} - \frac{x^2}{e^x} =$

$= \frac{1}{e^x} (-x^2 + 2x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} (-x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0$
 como $e^x \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x(-x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$ ext. relativos

para el crecimiento $\ominus \quad \oplus \quad \ominus$ miró el signo de f'
 $\searrow \quad \nearrow \quad \searrow$

$x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$
decreciente	creciente	decreciente

f decrece $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
 f crece $(0, 2)$

$\Rightarrow$ en $x=0$ f tiene MÍNIMO relativo
 en $x=2$ f tiene MÁXIMO relativo

b.2) Curvatura

$f''(x) = \left(\frac{1}{e^x} (-x^2 + 2x) \right)' = \frac{1}{e^x} (-1) (-x^2 + 2x) + \frac{1}{e^x} (-2x + 2) =$

$= \frac{1}{e^x} (x^2 - 2x - 2x + 2) = \frac{1}{e^x} (x^2 - 4x + 2)$

b2) $f''(x) = \frac{1}{e^x} (x^2 - 4x + 2)$. (8)

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$\uparrow$
corro $\frac{1}{e^x} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Signo de f''

	$x < 2 - \sqrt{2}$	$2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$	$x > 2 + \sqrt{2}$
Signo	$f'' > 0 (+)$	$f''(x) < 0 (-)$	$f''(x) > 0 (+)$
curvature	$\cup$ convexa	$\cap$ cóncava	$\cup$ convexa

$= 2 \pm \sqrt{2}$
ptn inflexión
 $\left\{ \begin{array}{l} 3,413 \\ 0,59 \approx \end{array} \right.$
 (aprox)

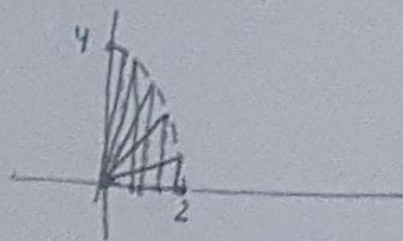
f convexa $\cup$ en $(-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, \infty)$ $\cup \oplus$
 f cóncava $\cap$ en $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ $\cap \ominus$

en $2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}$ tiene ptn. de inflexión

c) integrales $\rightarrow$ ahora no, después

5a) $y = 4 - x^2$ parábola (cónica, vértice (0,4)) (9)
 pto corte (-2,0) y (2,0)

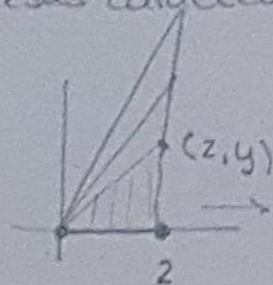
Nos restringimos al primer cuadrante $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$



- 1) (0,0) → uno de los vértices
- 2) otro vértice $(x, 4 - x^2)$
- 3) un cateto en el eje X
- 4) otro cateto PARALELO eje Y

(El problema tiene un error en el enunciado: se olvidaron de quitar el pto (2,0))

sobre ese pto podemos construir ∞ triángulos con esas características



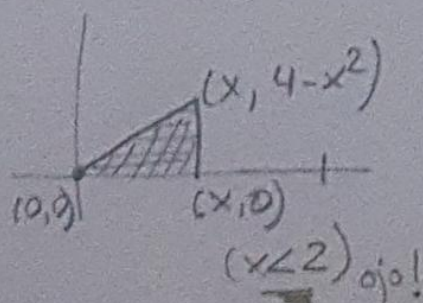
$y \rightarrow \infty$ por tanto Área $\rightarrow \infty$
 todos esos triángulos cumplen que (0,0) es un vértice

tienen (2,0) como otro vértice y por tanto cumplen 2ª condición
 cumplen la 3ª y la 4ª

por tanto NO habría máximo y el problema no tendría solución

Esta respuesta se daba por válida si estaba bien razonada, y se puntuaba igual, aunque sea más o menos

El problema estaba pensado para que el alumno diera esta solución:



$$\begin{aligned} \text{condición } y &= 4 - x^2 \\ \text{función } S(x) &= \frac{x(4 - x^2)}{2} = \frac{4x - x^3}{2} \\ S'(x) &= 2 - \frac{3x^2}{2} \\ S'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 - \frac{3x^2}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x^2}{2} = 2 \\ 3x^2 &= 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

($x < 2$) ojo!

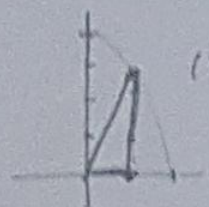
como $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} \pm 115 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)$ bien $y = 4 - x^2$ (10)

calcula máx.

$$S''(x) = -3x$$

$$S''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -3 \frac{2}{\sqrt{3}} < 0 \Rightarrow \text{MÁX.}; y = 4 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

piden catetos e hipotenusa



$$(x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{8}{3} \right)$$

longitud de los catetos $\frac{2}{\sqrt{3}}$ y $\frac{8}{3}$

longitud hipotenusa: $\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{64}{9}} =$

$$= \sqrt{\frac{12+64}{9}} = \sqrt{\frac{76}{9}} = \frac{\sqrt{76}}{3} \text{ longitud hipotenusa}$$

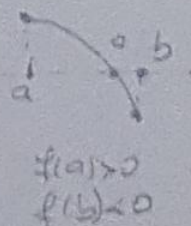
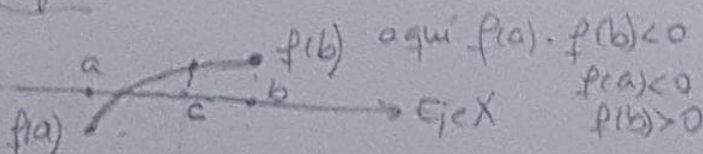
Solución: catetos $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{8}{3}$ e hipot $\frac{\sqrt{76}}{3}$

5b) el de Rolle (ya está en pág 8)

Bolzano

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $\left. \begin{array}{l} f \text{ cont. } [a, b] \\ f \text{ deriv. en } (a, b) \\ f(a)f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a, b) \text{ t.q. } f(c) = 0$

int. gráfica



NOTAS

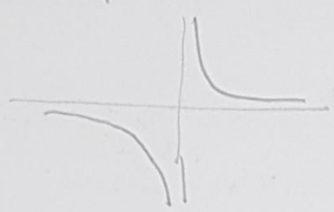
* Es una condición NECESARIA pero NO suficiente



aquí $f(a)f(b) > 0$
y sin embargo también $\exists c$
(de hecho hay 2 pts
que cortan al eje x)

* Bolzano garantiza la existencia, pero el pto. no tiene que ser ÚNICO

* Ejemplo de función No continua
con $f(a) \cdot f(b) < 0$ donde No hay pto de corte



$\frac{1}{x}$ cont en $\mathbb{R} - \{0\}$
en cualq intervalo
de la forma $[-a, a]$
ocurre que $f(-a) \cdot f(a) < 0$
y no hay pto de corte

* Qué nos dice Bolzano? que si f continua en el
int. cerrado $[a, b]$ y derivable en el int. abierto
 (a, b)
y además hay un cambio de signo entre $f(a)$
y $f(b) \Rightarrow$ en algún pto. intermedio la función
se tiene que anular ($\exists c \in (a, b) / f(c) = 0$)
i.e. (no puede pasar de valores $-a$ a $+$ (o viceversa de $+$ a $-$)
sin pasar por el cero, en caso contrario no sería
continua y/o derivable.

⑥ a) $f(x) = x^2 \ln x$
NOTA: Dom $f = (0, +\infty)$ porque Dom $\ln x = (0, +\infty)$

Así que $x > 0$ en todo el estudio de f ; $\begin{pmatrix} x > 0 \\ \forall x \end{pmatrix}$ en
en $(0, +\infty)$ f es continua y derivable

Derivada
 $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$
 $\uparrow$
 $x \neq 0$

$f''(x) = 2 \ln x + 1 + x(2 \frac{1}{x}) = 2 \ln x + 1 + 2 = 2 \ln x + 3$
 $\uparrow$
 $x \neq 0$

Pto. críticos

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 \ln x + 1) = 0$
 $\Rightarrow (2 \ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x = -1$
Como $x > 0$
por $x \in \text{Dom } f$
 $\ln x = -\frac{1}{2}$
 $\boxed{\frac{1}{\sqrt{e}}} = e^{-1/2} = x$

calculamos el valor de y para $x = e^{-1/2}$

(12)

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{-\frac{1}{2e}}$$

Pto crítico en $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$

Monotonía estudio signo de f'

<u>$0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$</u>	<u>$x > \frac{1}{\sqrt{e}}$</u>
signo $-$	$+$
comportamiento decrece	crece

f decrece $(0, \frac{1}{\sqrt{e}})$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{en } \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right) \text{ tiene} \\ f \text{ crece } \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right) \end{array} \right.$ un mínimo relativo

Curvatura $f''(x) = 2\ln x + 3$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\ln x = -3 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-3/2} = x \quad \left(x = \frac{1}{\sqrt{e^3}} = \frac{1}{e\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e \cdot e} = \frac{\sqrt{e}}{e^2} \right)$$

(aprox. 0'22)

cualquiera

Miramos signo de f''

	<u>$0 < x < e^{-3/2}$</u>	<u>$x > e^{-3/2}$</u>
signo	$-$	$+$
curvatura	$\cap$ cóncava	$\cup$ convexa

$\Rightarrow f$ cóncava en $(0, e^{-3/2})$

f convexa en $(e^{-3/2}, \infty)$

f pto inflexión

en

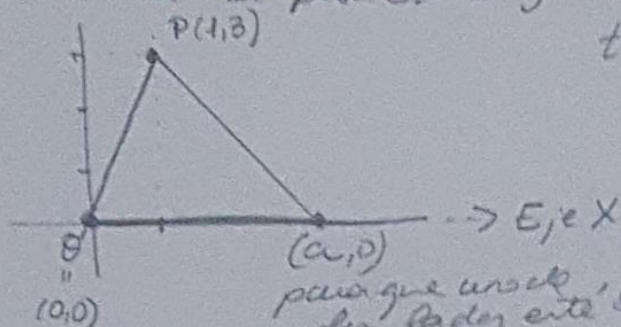
$$\left(e^{-3/2}, -\frac{3}{2e^3}\right)$$

aprox. (0'22, -0'02)

$$\left(\text{para } x = e^{-3/2} \Rightarrow f(e^{-3/2}) = (e^{-3/2})^2 \ln(e^{-3/2}) \right. \\ \left. = e^{-3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2e^3} \right)$$

aprox. -0'02

6b) + triángulo

+ dos de sus vértices $O(0,0)$ y $P(1,3)$ + uno de sus lados está sobre el eje X - **otro** sobre la tangente en $P(1,3)$ a la gráfica de la parábola $y=4-x^2$ (ser "otro" no quiere decir que sea el otro lado)

tenemos que calcular esa recta tangente para averiguar quien es a !

para que uno de los lados esté sobre el eje X un vértice tiene que ser $Q(a,0)$

Recta tangente a $y=4-x^2$ en el pto $x=1$

$y=f(x)=4-x^2$, derivamos

$$y' = -2x$$

$$f'(1) = -2 \cdot 1 = -2 = m$$

$$x_0 = 1 \quad y_0 = f(1) = 4 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \checkmark$$

recta tangente a $y=f(x)$ en $x=1$ es:

$$y - 3 = -2(x - 1)$$

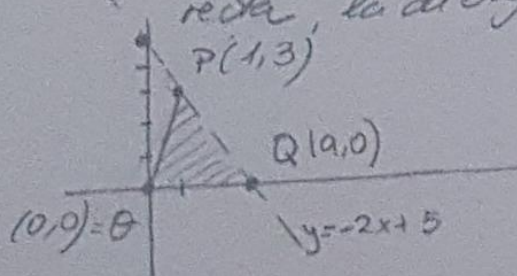
$$y - 3 = -2x + 2$$

$$\boxed{y = -2x + 5}$$

el tercer vértice tiene que estar sobre esa recta, la dibujamos

$$y = -2x + 5$$

x	y
0	5
1	3



no puedo tomar P como el vértice que está sobre la recta $y = -2x + 5$ porque entonces la palabra "otro" no tendría sentido

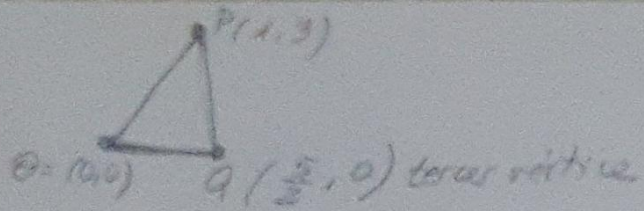
así que la única posibilidad si uno de los lados tiene que estar sobre el eje X es que $Q = (a,0)$ sea pto de corte de $y = -2x + 5$ con el eje X

$$y = -2a + 5 = 0$$

$$-2a = -5$$

$$a = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

$$Q\left(\frac{5}{2}, 0\right)$$



El área $\rightarrow$ requiere $\cdot$ (11)
integración...
más adelante

7 a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$ (12)
 f cont. y deriv. en $\mathbb{R} - \{0\}$
 $f'(x) = \frac{x^2 - (x-1)2x}{x^4} = \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} = \frac{-x^2 + 2x}{x^4} = \frac{x(-x+2)}{x^4}$

Como $x \neq 0$ por $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x+2}{x^3}$
 $f''(x) = \frac{-x^3 - (-x+2)3x^2}{x^6} = \frac{-x^3 + 3x^3 - 6x^2}{x^6} = \frac{2x^3 - 6x^2}{x^6}$

Como $x \neq 0$ por $x \in \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x-6}{x^4}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x+2}{x^3} = 0 \Rightarrow -x+2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=2}$
 $x=0$ por $0 \notin \text{Dom } f$
 $f(2) = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$ pto crítico $(2, \frac{1}{4})$

Monotonía en la rama el signo de f' ; $\frac{0}{3}$ no $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
Signo	-	+	-
Comport	DECRECE	CRECE	DECRECE
	↘	↗	↘

f decrece $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
 f crece $(0, 2)$
 en $(2, \frac{1}{4})$ tiene **MÁX. RELAT.**
 $0 \notin \text{Dom } f$

Curvatura $f''(x) = \frac{2x-6}{x^4} = 0 \Leftrightarrow 2x-6=0$
 por $x \neq 0$ $2x=6$
 $x=3$
 $f(3) = \frac{3-1}{3^2} = \frac{2}{9}$ pto inflex en $(3, \frac{2}{9})$

Signo de f'' ↘

	$x < 0$	$0 < x < 3$	$x > 3$
	⊖	⊖	⊕
	concava	concava	convexa

f concava $\cap$ en $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$
 f convexa $\cup$ en $(3, +\infty)$
 en $(3, \frac{2}{9})$ tiene pto. inflexión

7b) $\text{d'ora} \rightarrow \text{integrals} \dots \text{después}$

(16) .

clásico
con solución
interrogante

a) $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + ax + b & x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 + 2) & x \geq 0 \end{cases}$

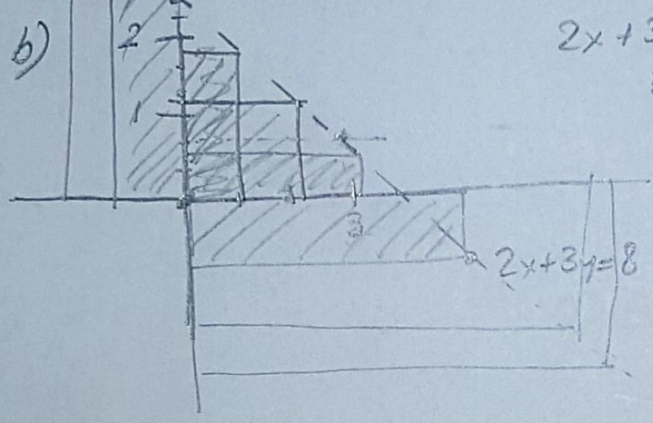
cont. y deriv. en $x=0$.

cont
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{2x} + ax + b = 1 + b$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}(x^2 + 2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 = f(0)$

Para f cont. en $x=0 \Leftrightarrow 1+b=1 \Leftrightarrow \boxed{b=0}$

deriv
 $\lim_{x \rightarrow 0} f_1'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + ax + b)' = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} \cdot 2 + a) = 2+a$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f_2'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}(x^2 + 2) \right)' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}(2x) = 0$

Para que f deriv. en $x=0 \Rightarrow 2+a=0 \Rightarrow \boxed{a=-2}$



$2x + 3y = 8$
 $3y = 8 - 2x$
 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

x	y
0	$\frac{8}{3}$
3	$-\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$

Mal enunciado

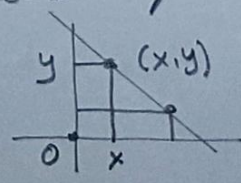
tal y como
está podíamos
construir ∞
rectángulos
con área $\rightarrow \infty$

les falta indicar:
que rectángulos en el 1º cuadrante

- tal y como está el problema no tendría
solución por que podíamos construir rectángulos
tan grandes como se quisieran, en el 2º y 4º cuadrante

El problema está pensado para que el alumno
responda así:

1º cuadrante



$y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ condición
 $A(x) = x \left(-\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \right)$
 $= -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x$ función $x \geq 0$

$$A(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x$$

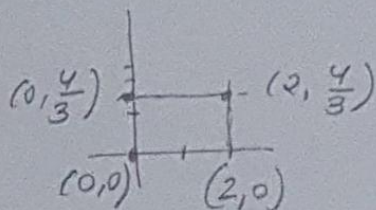
(18)

$$A'(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} ; A'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow \boxed{x=2}$$

$$A''(x) = -\frac{4}{3} < 0 \text{ (va a ser MAX)}$$

$$x=2$$

$$y = \frac{8-2x}{3} ; \quad \frac{8-2 \cdot 2}{3} = \frac{8-4}{3} = \frac{4}{3}$$



vértices $(0,0)$ $(2,0)$ $(0,\frac{4}{3})$ $(2,\frac{4}{3})$

c) integral $\rightarrow$ m'aire

interesante

9) a) Rolle $\rightarrow$ ya está hecho de antes

a.2) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & x < 1 \\ bx + c & x \geq 1 \end{cases}$ a, b, c cumple th Rolle en $[0, 2]$ y calcular el pto en el que exista

f función a trozos

$$\begin{cases} f_1(x) = 2x^2 + ax & x < 1 \\ f_2(x) = bx + c & x \geq 1 \end{cases}$$

f_1 polinómica $\Rightarrow$ cont. y deriv en todo $\mathbb{R}$

f_2 polinómica $\Rightarrow$ cont. y derivable en todo $\mathbb{R}$

f cont. y deriv. en $\mathbb{R}$, salvo a lo sumo en el pto de unión de ambas funciones $x=1$ (ojo, $1 \in [0, 2]$)

* f cont. en 1?

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 + ax = \boxed{2+a}$$
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} bx + c = \boxed{b+c}$$

$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} bx + c = \boxed{b+c}$

que f cont. en $x=1 \Rightarrow \boxed{2+a = b+c}$

* f deriv. en 1?

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f_1'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 + ax)' = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x + a) = \boxed{4+a}$$
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f_2'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (bx + c)' = \lim_{x \rightarrow 1^+} b = \boxed{b}$$

$\Rightarrow$ para que f derivable en $x=1 \Rightarrow \boxed{4+a = b}$

$\begin{cases} 4+a = b \\ 2+a = b+c \end{cases}$ falta una condición más

* para que cumpla todas las hipot. de Rolle en $[0, 2] \Rightarrow f(0) = f(2)$

$$f(0) = f_1(0) = 2 \cdot 0^2 + a \cdot 0 = \boxed{0}$$
$$f(2) = f_2(2) = b \cdot 2 + c = \boxed{2b+c}$$

Juntando las tres:

$$\begin{cases} 4+a = b \\ 2+a = b+c \\ 2b+c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 4 + a + c \\ 8 + 2a + c = 0 \\ \underline{c = -2} \\ 2a = 2 - 8 \\ \underline{a = -3} \end{cases}$$

$b = 4 - 3 = 1 \quad \boxed{b=1}$

$$\Rightarrow a = -3, b = 1, c = -2$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x & x < 1 \\ x - 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} f \text{ cont. } [0, 2] \\ f \text{ deriv. } (0, 2) \\ f(0) = f(2) \end{array} \quad \Rightarrow$$

por th. Rolle $\exists \alpha \in (0, 2)$ t.q. $f'(\alpha) = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 3 & x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \neq 0 \text{ siempre}$$

la única posibilidad es que $\alpha < 1$ y $4x - 3 = 0$
sea soluc. $\uparrow$ de esa ecuación

$$4x = 3 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{3}{4}} \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{4}\right) = 2\frac{9}{16} - \frac{9}{4}$$

$$= \frac{18 - 36}{16} = -\frac{18}{16} = \boxed{-\frac{9}{8}}$$

$\Rightarrow$ el pto donde se anula la derivada es $\left(\frac{3}{4}, -\frac{9}{8}\right)$
que es un ext. relativo de f

b) integrals $\rightarrow$ luego

$$10) a) A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + mx^2 - 1}{\sin x^2} = 3 \quad m?$$

(21)

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + mx^2 - 1}{\sin x^2} = \frac{1 + 0 - 1}{0} = \frac{0}{0} \text{ indet.}$$

* 1ª vez L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin 2x + 2mx}{2x \cos x^2} = \frac{0 + 0}{0} = \frac{0}{0} \text{ indet.}$$

* 2ª vez L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cdot 2 \cos 2x + 2m}{2 \cos x^2 + 2x(-\sin x^2) \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \cos 2x + 2m}{2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2}$$

$$= \frac{-4 \cdot 1 + 2m}{2 \cdot 1 - 0} = \frac{-4 + 2m}{2} = \boxed{-2 + m} \in \mathbb{R}$$

* por L'Hôpital $\exists A = -2 + m$; como $A = 3$

$$\Rightarrow -2 + m = 3 \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{m = 5}$$

b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pto inflexión en $(0,5)$ y la tangente a su gráfica en $(1,1)$ sea paralela al eje x

* por el enunciado $(0,5), (1,1) \in$ gráfica de f

$$\Rightarrow f(0) = 5 \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{d = 5}$$

$$f(1) = 1 \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{a + b + c + d = 1} \quad (*)$$

* por $(0,5)$ pto inflexión $\Rightarrow f''(0) = 0$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(0) = 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

la ecuación (*) queda

$$a + c + 5 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a + c = -4} \quad (**)$$

* por tangente a la gráfica en $(1,1)$ tener pendiente $m = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{f'(1) = 0}$$

$$3a + 2b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{3a + c = 0} \quad (***)$$

como $b = 0$

$$\begin{cases} a + c = -4 \\ 3a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - c = 4 \\ 3a + c = 0 \end{cases}$$

$$2a = 4$$

$$\boxed{a = 2}$$

$$c = -3 \cdot 2 = \boxed{-6}$$

Soluții $a=2$, $b=0$, $c=-6$, $d=5$

(p. 22)

c) integrala $\rightarrow$ mai adelante

11) a) lim $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - \cos 2x} = \frac{0}{0}$ indeterminado

(23)

1. L'Hopital

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x - 6x}{e^{x^2} 2x + 2 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 6x}{2x e^{x^2} + 2 \sin 2x} = \frac{0}{0}$

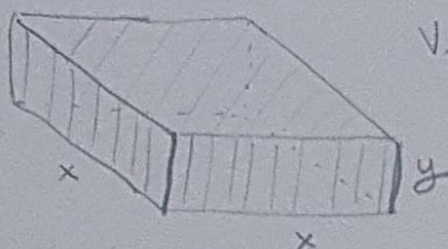
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

2. L'Hopital

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x - 6}{3e^{x^2} + 2x e^{x^2} \cdot 2x + 2 \cdot 2 \cos 2x} = \frac{2 - 6}{2 \cdot 1 + 0 + 4 \cdot 1} = \frac{-4}{6}$

$= \left[-\frac{2}{3} \right] \Rightarrow \boxed{A = -\frac{2}{3}}$

b)



$V = 80 \text{ dm}^3$

tapas laterales $\rightarrow 2 \text{ €/dm}^2$

base $\rightarrow 3 \text{ €/dm}^2$

* CONDICIÓN $\boxed{x^2 \cdot y = 80}$

* despejo y en condición

$y = \frac{80}{x^2}$

* función de coste de la caja: $(\underbrace{4xy + x^2}_{\text{tapas y laterales}})2 + \underbrace{x^2 \cdot 3}_{\text{base}}$

* sustituyo en función de coste: $C(x) = (4x \frac{80}{x^2} + x^2)2 + x^2 \cdot 3$

* opero y simplifico: $C(x) = \left(\frac{320}{x} + x^2 \right) 2 + 3x^2 =$

$x \neq 0, x > 0$
la caja es real
tiene que tener
volumen

$= \frac{640}{x} + 2x^2 + 3x^2 = \left(\frac{640}{x} + 5x^2 \right)$ función Coste de la caja

* derivamos función:

$C'(x) = -\frac{640}{x^2} + 10x$

* igualamos a 0: $-\frac{640}{x^2} + 10x = 0 \Rightarrow x \neq 0$

$-640 + 10x^3 = 0 \Leftrightarrow 10x^3 = 640 \Leftrightarrow x^3 = 64$

$x = \sqrt[3]{64} = \boxed{4}$

Sustituimos en la condición:

$$\begin{aligned}x^2 y &= 80 \\16y &= \frac{80}{x^2} \\y &= \frac{80}{16} = \boxed{5}\end{aligned}$$

(24)

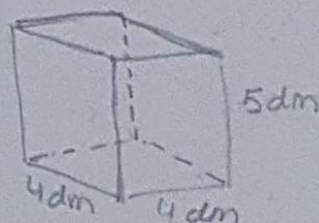
* Comprobar que es mínimo

$$C''(x) = -640 \left(\frac{-2x}{x^4} \right) + 10 = \frac{1280}{x^3} + 10 > 0 \text{ mínimo.}$$

$\uparrow$
 $x \neq 0$
 $x > 0$

$\uparrow$
 $x > 0$
ya que no
podemos construir
cajas de lados
negativos

* Solución, la caja tiene
de medidas



c) integral

$$12) a) f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x < 3 \\ \ln(x-2) & x \geq 3 \end{cases}$$

25

Tipolo, pero muy interesante

a1) f derivable en $x=3$

a2) determinar x_0 t.q. $f'(x_0) = -\frac{1}{3}$

(paralela a $x+3y=0 \Leftrightarrow 3y = -x \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x$)

m = pendiente

a1) + para derivar primero tiene que ser continua en $x=3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} ax^2 + b = 9a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x-2) = 0 = f(3)$$

$$\Rightarrow \boxed{9a+b=0}$$

+ para derivar en $x=3$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (ax^2 + b)' = \lim_{x \rightarrow 3} 2ax = 6a$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\ln(x-2))' = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\Rightarrow 6a = 1 \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{1}{6}} \text{ con lo que } \frac{9}{6} + b = 0$$

$$b = -\frac{9}{6} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

a2) para $a = \frac{1}{6}$ $b = -\frac{3}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{6} - \frac{3}{2} & x < 3 \\ \ln(x-2) & x \geq 3 \end{cases}$$

calcular el pto en que $f'(x_0) = -\frac{1}{3}$

* si $x < 3 \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{6} = \left(\frac{x}{3}\right); \frac{x}{3} = -\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \boxed{x = -1} \text{ que efectivamente } < 3$$

* si $x \geq 3 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x-2}; \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3 = -x+2$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ no vale el caso (por } -1 \nless 3)$$

Sólo tenemos

una posibilidad $x_0 = -1$ y en ese caso $f'(-1) = -\frac{1}{3}$

falta calcular $y_0 = f(x_0)$

$$y_0 = f(-1) = \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = \frac{1-9}{6} = -\frac{8}{6} = \boxed{-\frac{4}{3}}$$

El pto de la gráfica

$$\text{buscado es } \boxed{\left(-1, -\frac{4}{3}\right)}$$

12.5) integrales, pero hay una parte que ya podemos adelantar:

(26)

$$\begin{cases} * P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d & (\text{polinomio grado 3}) \\ * (0,5) \in \text{gráfica de } y=P(x) \text{ i.e. } P(0)=5 \\ * (0,5) \text{ es pt. inflexión i.e. } P''(0)=0 \\ * (1,1) \in \text{gráfica de } y=P(x) \text{ i.e. } P(1)=1 \\ * (1,1) \text{ es ext. relativo i.e. } P'(1)=0 \end{cases}$$

Lo que todo esto calcula a, b, c, d

$$P(0)=5 \Leftrightarrow \boxed{d=5}$$

$$P''(x) = 6ax + 2b ; \quad P''(0)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2b=0} \\ \boxed{b=0} \end{cases}$$

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$P(1)=1 \Leftrightarrow a+b+c+d=1 \xrightarrow{\substack{d=5 \\ b=0}} a+c+5=1$$

$$P'(1)=0 \Leftrightarrow 3a+2b+c=0 \quad \left\{ \begin{array}{l} a+c+5=1 \\ \boxed{a+c=-4} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{como } b=0} \boxed{3a+c=0}$$

$$a = -4 - c$$

$$3(-4-c)+c=0 \Leftrightarrow -12-3c+c=0 \Leftrightarrow -2c=12$$

$$c = -\frac{12}{2} = -6$$

$$\boxed{c=-6}$$

$$a = -4 - (-6) = -4+6 = \boxed{2}$$

$$\boxed{P(x) = 2x^3 - 6x + 5} \text{ el polinomio buscado.}$$

falta calcular $\int_0^1 (2x^3 - 6x + 5) dx$

$$13) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-x)+3e^{2(-x)}}{-x+e^{2(-x)}} \quad (27)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+3e^{-2x}}{-x+e^{-2x}} = \frac{-\infty+3 \cdot 0}{-\infty+0} = \frac{-\infty}{-\infty} \text{ indet}$$

L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1+3e^{-2x} \cdot (-2)}{-1+e^{-2x} \cdot (-2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1-6e^{-2x}}{-1-2e^{-2x}} = \frac{-1-0}{-1-0} =$$

$$\text{por tanto } \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}} = \boxed{1} = \boxed{1}$$

$$\text{a ii) } A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}} = \frac{\infty+\infty}{\infty+\infty} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet}$$

1º L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+3 \cdot e^{2x} \cdot 2}{1+e^{2x} \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+6e^{2x}}{1+2e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet}$$

2º L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 \cdot e^{2x} \cdot 2}{2 \cdot e^{2x} \cdot 2} = \boxed{3} \quad \text{por tanto } \exists A = \underline{\underline{3}}$$

↑
se puede simplificar
por que $e^{2x} \neq 0$

(En resumen, la función $f(x) = \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}}$ tiene
2 asíntotas horizontales $y=1$ en $x \rightarrow -\infty$
 $y=3$ en $x \rightarrow +\infty$)

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\text{Dom } f = (0, \infty)$, $f'(x) = 1 + \ln x$
calcular f teniendo en cuenta que $(1, 4) \in \text{gráfica}$
i.e. $f(1) = 4$ $f(x) = \int (1 + \ln x) dx$
(integral $\rightarrow$ después)

c) max y min de $f(x)$; $f'(x) = 1 + \ln x$
 $1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow e^{-1} = x$ entonces

tiene ext. relativo en $x = \frac{1}{e}$

$$f''(x) = \frac{1}{x} ; f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0 \Rightarrow \text{en } x = \frac{1}{e} \text{ tiene un MÍNIMO}$$

(No hay máximo)

$$14) \quad f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & x < 0 \\ \frac{x}{1+x} & x \geq 0 \end{cases}$$

(29)

a) f cont. en $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-x} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+x} = \frac{0}{1} = \boxed{0} = f(0)$$

$\Rightarrow$ f cont. en $x=0$

f deriv. en $x=0$

derivada a la 0^- : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} =$

regla $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1-x)^2} = 1$

derivada en 0^+ : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{1+x} \right)' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x)^2} = 1$

a la deriva

$\Rightarrow f'(0) = 1$

f deriv. en $x=0$

b) recta tangente paralela a $x-4y=0$

buscamos

$f'(x_0) = \frac{1}{4}$

$-4y = -x$

$4y = x$

$y = \frac{1}{4}x \Rightarrow m = \frac{1}{4}$

pendiente

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & x < 0 \\ \frac{1}{(1+x)^2} & x \geq 0 \end{cases}$$

Si: $x_0 < 0$

$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{4}$

$x \neq 1$

$4 = (1-x)^2 \Rightarrow 4 = 1 - 2x + x^2$

$x^2 - 2x - 3 = 0$; $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$

(No puede ser la sol 3 porque estamos considerando $x_0 < 0$)

(-1)

may interesante

$$\Rightarrow \underline{x_0 = -1} \quad \text{recta tangente} \quad y_0 = f(-1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

$$m = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{y + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x+1)} \quad \text{y} = \frac{1}{4}(x-1)$$

$$* \text{ Si } x \geq 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4 = (1+x)^2$$

$$4 = 1 + 2x + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \quad \text{①}$$

~~no~~ citamos
en el
caso $x \geq 0$.

$$\underline{x_0 = 1}$$

recta tangente

$$y_0 = f(1) = \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{1}{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x-1)} \\ \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}(x+1)} \end{array} \right.$$

c) integral