BLOQUE I ANÁLISIS MATEMÁTICO

NOTAS

- Los ejercicios están sacados del Bloque I de Análisis matemático de los exámenes EBAU de todas las comunidades autónomas del curso 2020-21.
- Algunos los he variado porque eran demasiado fáciles y otros ya nos los incluí por el mismo motivo.

ANDALUCÍA 2021

MODELO

1. (MUY COMPLETO) Dada la función $f(x) = (x - a)e^x$
   a. Determina a para que tenga un punto crítico en $x = 0$.
   b. Para $a = 1$, haz un estudio completo de la función (dominio, continuidad, derivabilidad, puntos de corte, asíntotas, monotonía y curvatura) y un esbozo de su gráfica.
   c. Para dicho valor, calcula el área comprendida bajo la gráfica.

2. (INTEGRACIÓN, CAMBIO VARIABLE Y RACIONAL) Calcula la primitiva que pasa por el $(1,1)$ de la función

$$f(x) = \frac{1 + e^x}{1 - e^x} \quad siendo\ x > 0$$

3. (ÁREAS) Dadas las funciones

$$f(x) = \ln(x + 2)$$
$$g(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$$

   a. Esboza el recinto encerrado entre sus gráficas y las rectas $x = 1\ \ y\ \ x = 3$
   b. Determina el área del recinto anterior.

JUNIO

4. (ASÍNTOTAS CON PARÁMETROS SENCILLO) Se sabe que la gráfica de la siguiente función tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto (1, 1) y tiene pendiente 2. Calcula a y b.

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x - 1}$$

5. (PARÁMETROS MUY FÁCIL) Calcula el parámetro para que la siguiente función sea continua. En ese caso, calcula la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa -1

$$f(x) = \begin{cases} (3x - 6)e^x & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{36(\sin x - ax)}{x^3} & si\ x > 0 \end{cases}$$

6. (INTEGRACIÓN SENCILLA PERO INTERESANTE) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa 1.

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t})dt$$

EXTRAORDINARIA

7. (L´HOPITAL CON PARÁMETROS CORTO) Calcula el valor de los parámetros para que el siguiente límite exista y valga 7

$$\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\cos(x))+bsen(x)-2(e^x-1)}{x^2}=7$$

8. (PARÁMETROS CLÁSICO y fácil) Calcula el valor de los parámetros a y b sabiendo que son positivos y que la siguiente función tiene un punto crítico en (1,2) $f(x)=\frac{bx^2}{1+ax^4}$

9. (INTEGRACIÓN POR PARTES FÁCIL Y CURVATURA) Estudia la curvatura de la función

$$f(x)=1+\int_0^x te^t dt$$

10. (INTEGRACION RACIONAL, CLÁSICO) Calcular la primitiva que pasa por el punto (2,4) de la función

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$$

ARAGÓN 2021

ORDINARIA

11. (CLÁSICO PARÁMETROS) Calcula el valor de los parámetros a y b para que la siguiente función sea continua y tenga en x=-1 un extremo relativo, en dicho caso comprueba que tipo de extremo es.

$$f(x)=\begin{cases} x^3+bx+2 & x\le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{ax} & x>0 \end{cases}$$

12. (LÍMITES LOGARÍTMICOS CON L´HOPITAL Y PARÁMETRO, INTERESANTE) Calcular el valor del parámetro a sabiendo que

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin^2 x)^{\frac{a}{x^2}}=2$$

13. (INTEGRACIÓN, RACIONAL, FÁCIL) $\int\frac{x^2-1}{x^3-3x+2}dx$

EXTRAORDINARIA

14. (PARÁMETROS, CONTINUIDAD, ÁREAS) Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} 5-ax^2 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{6}{ax} & si \quad x>1 \end{cases},\quad a\in\mathbb{R}, a\neq 0$$

   a. Calcule los valores de $a \in$ ℝ para que la función (x) sea continua.
   b. Determine justificadamente para qué valor de los anteriores se verifica que el área encerrada por la función (x), el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = e$ sea 6 u^2 .

15. (LÍMITES LOGARÍTMICOS Y L´HOPITAL) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}$$

16. (OPTIMIZACIÓN) Se desea construir un depósito con forma de prisma regular de base cuadrada. Además, el depósito es abierto (sin tapa superior). La capacidad total debe ser de 64 m^3. El material de construcción de los laterales tiene un precio de 70 euros por m^2, mientras que el de la base, más resistente, es de 140 euros por m^2. Halle las dimensiones del depósito para que tenga el menor coste posible.

17. Para la siguiente función

$$f(x) = \frac{e^x}{x^3 - x}$$

   a. Estudie la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas. Calcúlelas cuando existan.
   b. Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x = 2$.

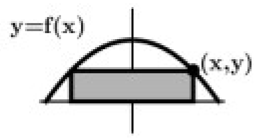
ASTURIAS 2021

ORDINARIA

18. (PARÁMETROS, ÁREAS, SENCILLO) Sean las parábolas:
   $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = ax^2 + b$
   a. Calcula los valores de a y b para que en el punto de abscisa x = 2 las dos parábolas tengan la misma recta tangente. Calcula dicha recta tangente.
   b. Para a = 1, b = 1 esboza el recinto limitado por las parábolas entre el eje Y y el punto de corte entre ellas. Calcula el área del mismo.
19. (OPTIMIZACIÓN) Sean tres números reales positivos cuya suma es 90 y uno de ellos es la media de los otros dos. Determina los números de forma que el producto entre ellos sea máximo.

EXTRAORDINARIA

20. (OPTIMIZACIÓN) En un salón de actos se quiere instalar una pantalla de cine en el escenario. La pared en esa zona es curva y se ajusta a la gráfica de la función $3y = 36 - x^2$ Calcula los valores que optimizan el área de la pantalla y la superficie máxima.



ASTURIAS

ORDINARIA

21. (ÁREAS FÁCIL) Dada la función $y=x^2$ calcula el área de la región limitada por su gráfica, la recta tangente a la misma en el punto de abscisa x=1 y los ejes.

22. (PARÁMETROS, CONTINUIDAD ORIGINAL) En una población, la proporción de personas infectadas por una determinada enfermedad en función del tiempo, I(t), viene dada por la función:

$$I(t)=\begin{cases} ke^{2t} & si \ \ t<1 \\ \dfrac{t^2}{3t^2+1} & si \ \ t\geq 1 \end{cases}$$

Siendo k una constante real, t el tiempo en años desde el inicio de la epidemia y t= 1 el inicio de la vacunación

a. Calcula el valor de k para que I(t) sea continua.
b. Calcula la proporción de personas infectadas cuando t→∞.
c. Calcula la velocidad de crecimiento de I(t) para el instante t = 0.5
d. Calcula la velocidad de crecimiento de I(t) para el instante t =2

CASTILLA-LA MANCHA 2021

ORDINARIA

23. (PARÁMETROS, MUY FÁCIL)
    a. Determina razonadamente los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x)=ax^3-2x^2-x+b \text{ con } a,b\in\mathbb{R}$. pase por el punto (1, 2) y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.
    b. Determina razonadamente los valores de a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en x = 0

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1 & x<0 \\ be^x & x\geq 0 \end{cases}$$

24. (LÍMITES LHOPITAL, CONTINUIDAD, DISCONTINUIDADES, DEMASIADO FÁCIL) Calcula razonadamente:
    a. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x-2}-1}{2x-4}$
    b. Estudia continuidad y derivabilidad de la función siguiente, calcula dominio y si los tiene, puntos y tipos de discontinuidad.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & \text{si} & x<1 \\ \frac{2x-1}{x-2} & \text{si} & 1\leq x\leq 3 \\ 2e^x & \text{si} & x>3 \end{cases}$$

EXTRAORDINARIA

25. (INTEGRACIÓN,SENCILLO) Resuelve las integrales

$$\int x\cdot cos(3x)dx \qquad \int \frac{dx}{2x^2+1}$$

26. (ROLLE, ESTUDIO DE FUNCIONES, ATÍPICO)
    a. Sea la función $f(x)=ax^3+bx^2+x-1$, con a, b ∈ R. Determina los valores de a y b para que la gráfica pase por el punto (1, 1) y tenga aquí un punto de inflexión.
    b. Sea la función $f(x)=x\ \text{sen}(x)-\cos(x)$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función f(x) tiene al menos un extremo relativo en el intervalo [−1, 1].

CASTILLA – LEÓN 2021

MODELO

27. (ESTUDIO FUNCIONES, UTILIZACIÓN DE BOLZANO, MONOTONÍA, DIFÍCIL DE VER) Dada la función:
$f(x)=3x^4+x^3-1$ Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el **número total de puntos en los que (x) se anula**. (Téngase en cuenta la monotonía de la función y los valores que toma en los extremos relativos previamente calculados).

28. (INTEGRACIÓN Y ÁREAS SIN DIBUJAR) Dada la función f(x)= x cos(x)
    a. Demuestre que $f(x)$ es no negativa en el intervalo [0,π/2]
    b. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje de las x, cuando x pertenece al intervalo [0,π/2]

29. (INTEGRACIÓN CAMBIO DE VARIABLE) b) Calcular la integral $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

ORDINARIA

30. (LÍMITE L´HOPITAL BÁSICO) Calcular el límite $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-\cos(3x)}{sen^2(x)}$

31. (ÁREAS SIN DIBUJAR, MUY FÁCIL) Dadas las funciones $f(x)=x^2,\ g(x)=-x^2+8$
    a. hallar los valores de x para los que g(x) ≥ f(x)
    b. Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones f(x) y g(x)

32. (PARÁMETROS CLÁSICO) Halla los coeficientes de un polinomio de grado 2 de forma que el polinomio pasa por el (0,1), la recta tangente a la gráfica en dicho punto es paralela a la bisectriz del primer cuadrante y el área comprendida entre la gráfica, el eje Y y la recta x=2, es 12.

EXTRAORDINARIA

33. (PARÁMETROS CON L´HOPITAL, FÁCIL) sabiendo que m>0 calcúlalo para $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(mx)}{x^2}=2$
34. (INTEGRACIÓN POR PARTES, INTERESANTE, CON CONTINUIDAD)
    a. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x}, & si\ \ x\neq 0\\ 0, & si\ \ x=0\end{cases}$
    b. Calcula $\int x\ln(x^2)dx$

35. (BOLZANO CON MONOTONÍA) Se considera la función f(x) = x - cos(x)
    a. Demostrar que la ecuación f(x) = 0 tiene al menos una solución en el intervalo [0, π/2].
    b. Probar que la ecuación f(x) = 0 solo puede tener una solución en el intervalo [0, π/2] , de modo que la solución del apartado anterior es la única.

MADRID

ORDINARIA

36. (ÁREAS, SIN DIBUJAR) Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$f(x)=2+x-x^2,\quad g(x)=2x^2-4x$$

37. (COMPLETO, CONTINUIDAD, DERIVABILIDAD, BOLZANO, CRECIMIENTO, INTEGRACIÓN, INTERESANTE) Dada la función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} senx & si \quad x<0 \\ xe^{x} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

   a. Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función.
   b. Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento en el intervalo $(-\pi,2)$.
   c. Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0,1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.
   d. Calcule

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx$$

EXTRAORDINARIA

38. (INTEGRACIÓN Y LÍMITES CON L´HOPITAL, MUY BUENO) Calcule si es posible:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-senx} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{sen\frac{1}{x}}\right)$$

$$\int_0^1 x^2e^{-x}dx \qquad \int\frac{x}{x^2-1}dx$$

39. (COMPLETO, MUY LARGO, DIFÍCIL, CONTINUIDAD, MONOTONÍA, ÁREAS) Sea la función

$$f(x)=x^3-|x|+2$$

   a. Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en x = 0.
   b. Determine los extremos relativos de f(x) en la recta real.
   c. Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas, y las rectas x = –1 y x = 1.

NAVARRA 2021

ORDINARIA

En Navarra el 50% del examen es análisis matemático, por lo que el alumno debe elegir forzosamente 1 pregunta de las 4 (valen cada una 2.5 ptos.) es obvio que están forzados a elegir la segunda y que no podrán aprobar selectividad sin conocimientos de análisis.

40. (TEORÍA, CONTINUIDAD, MUY DIFÍCIL, LARGO, BOLZANO, LÍMITES, REQUIERE DOMINIO DE LOGARITMOS Y TRIGONOMETRÍA) En la siguiente función

$$f(x)=\left(x^2-3x+10\right)^{\log\left[2^{x-1}\sin\frac{\pi(x+2)}{6}\right]}$$

   a. Demuestra que es continua en el intervalo [1, 3]
   b. Demuestra que existe $\alpha \in (1,3)$ tal que $f(\alpha)=3/2$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

41. (ASÍNTOTAS COMPLETO Y FÁCIL) Calcula las asíntotas de esta función y estudia la posición de la curva respecto a ellas:

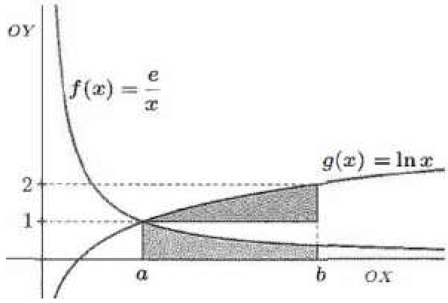
$$f(x)=\frac{x^3-4x-1}{x^2-4}$$

42. (TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL, TEORÍA, MUY DIFÍCIL, FUNCIÓN COMPLICADA, CONTINUIDAD, REQUIERE DOMINIO DE LOGARITMOS Y TRIGONOMETRÍA) Sea la función:

$$f(x)=\ln\left(\frac{5x-2-x\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}\right)$$

   a. Demuestra que la función es continua en el intervalo [1,3].
   b. Demuestra que existe $\alpha \in(1,3)$ tal que $f'(\alpha) = 3 / 2 \ln 2$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

43. (AREAS, INTEGRACION, DOMINIO DE LOGARITMOS, ASEQUIBLE, INTIMIDA PERO NO ES DIFICIL) Calcula los valores de las abscisas a y b que aparecen en el gráfico, y, después, comprueba que las áreas de las dos regiones sombreadas son iguales:



EXTRAORDINARIA

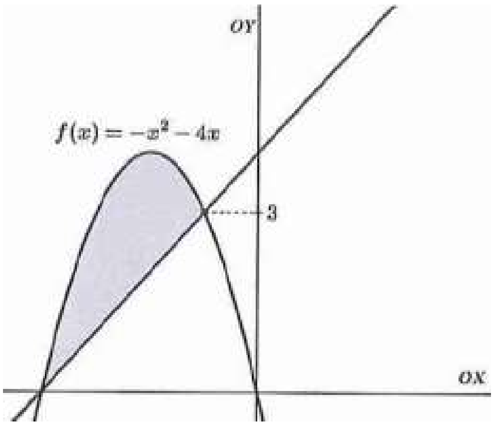
44. (LÍMITES, L´HOPITAL, CONJUGADO, FÁCILES) Calcula los límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}} \qquad \lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x}$$

45. (DOMINIOS DEFINICIÓN, DOMINIO TRIGONOMÉTRICAS, TEORÍA, TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL Se considera la función: $f(x)=\sqrt{x+\sin\frac{\pi x}{2}}$

   a. Demuestra que la función es continua en el intervalo [1,3].
   b. Demuestra que existen dos valores $\alpha \in(1,2)$ y $\beta \in(2,3)$ tal que $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

46. ,(ÁREAS, INGENIOSO, CORTO, ASEQUIBLE) Teniendo en cuenta los datos que aparecen en el siguiente gráfico, calcula el área de la región sombreada.


OY
$f(x) = -x^2 - 4x$
3
OX