

TEMA 3. APLICACIONES DAS DERIVADAS

3.1 MONOTONIA E EXTREMOS RELATIVOS

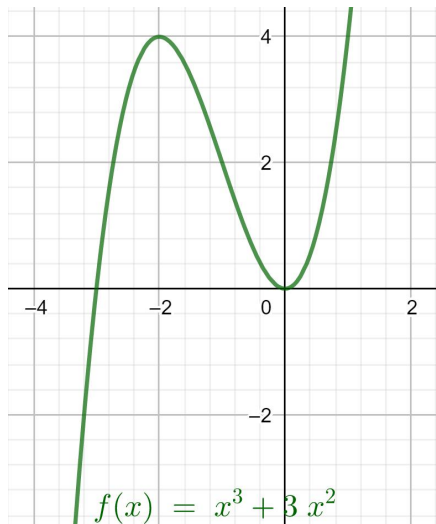
3.2 CURVATURA E PUNTOS DE INFLEXIÓN

3.3 PROPIEDADES. TEOREMAS

3.4 REGRA DE L'HÔPITAL

3.5 OPTIMIZACIÓN

3.1 MONOTONÍA E EXTREMOS RELATIVOS



Crecente en $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$

Decrecente en $(-2, 0)$

Máximo relativo $(-2, 4)$

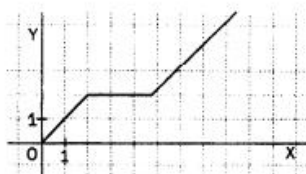
Mínimo relativo $(0, 0)$

MONOTONÍA: CRECEMENTO E DECRECEMENTO

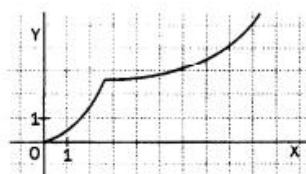
Definición: $y = f(x)$ é crecente no intervalo (a, b) se

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

(estritamente crecente se $x_1 < x_2$ entón $f(x_1) < f(x_2)$)



Función crecente

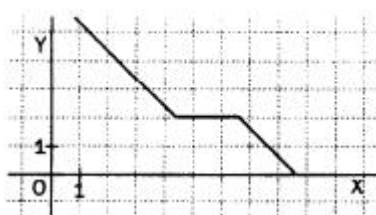


Función estritamente crecente

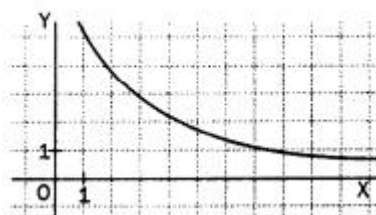
Definición: $y = f(x)$ é decrecente no intervalo (a, b) se

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

(estritamente decrecente se $x_1 < x_2$ entón $f(x_1) > f(x_2)$)



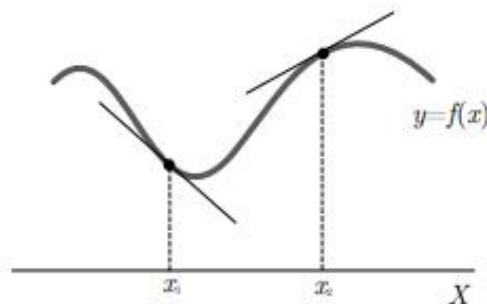
Función decrecente



Función estritamente decrecente

Teorema: Se $y=f(x)$ é derivable en x_0 ,

- a) Se $f'(x_0) > 0$ entón $y=f(x)$ é crecente estritamente en x_0 .
- b) Se $f'(x_0) < 0$ entón $y=f(x)$ é decrecente estritamente en x_0 .



f é estritamente decrecente en x_1 , f é estritamente crecente en x_2

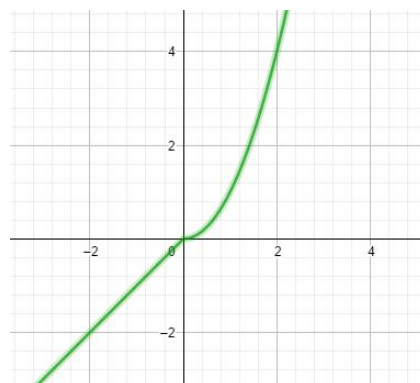
Xeometricamente, $f'(x_0)$ representa a pendente da recta tanxente a f en x_0 , se é positiva a función é crecente e se é negativa a función é decrecente.

Observacións:

- a) Unha función pode ser crecente ou decrecente sen ser derivable.

Exemplo:

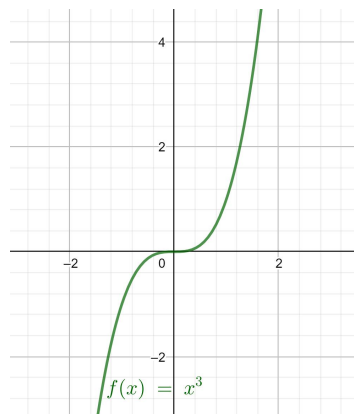
$$f(x) = \begin{cases} x & , x \leq 0 \\ x^2 & , x > 0 \end{cases}$$



Sempre crecente pero non é derivable en $x=0$.

b) Unha función poder ser crecente(decrecente) e derivable pero a súa derivada non ser nin positiva nin negativa.

Exemplo: $f(x)=x^3$



Función continua, derivable e crecente en $x=0$ pero $f'(0)=0$.

Teorema: Se $y=f(x)$ é crecente (decrecente) e derivable nun intervalo aberto (a, b) entón $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$.

Exemplo:

Estuda o crecemento e decrecemento de $f(x) = x^2 \cdot e^x$

Función continua e derivable.

1º Calculamos a función derivada:

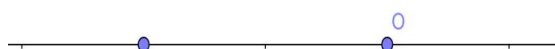
$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot (2x + x^2)$$

2º Resolvemos $f'(x)=0$:

$$e^x(x^2 + 2x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0$$

$$x \cdot (x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$$

3º Dividimos a recta en intervalos segundo os puntos que anulan a primeira derivada ou non existe:



4º Analizamos o signo da primeira derivada nos distintos intervalos:

$$f'(-3) > 0 \Rightarrow (-\infty, -2) \text{ crecente}$$

$$f'(-1) < 0 \Rightarrow (-2, 0) \text{ decrecente}$$

$$f'(1) > 0 \Rightarrow (0, +\infty) \text{ crecente}$$

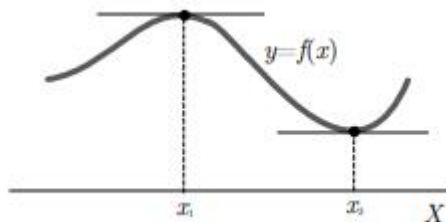
Entón a función é crecente en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

decrecente en $(-2, 0)$

Exercicio:

1. Estuda o crecemento e decrecemento de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$
2. Exercicio número 2 da páxina 272

EXTREMOS: MÁXIMOS E MÍNIMOS RELATIVOS



Definición: $y=f(x)$ ten un máximo en $x=a$, se existe un intervalo centrado en a , que verifica que $f(x) < f(a)$ para todo punto de ese intervalo.

$y=f(x)$ ten un mínimo en $x=b$, se existe un intervalo centrado en b , que verifica que $f(x) > f(b)$ para todo punto de ese intervalo.

EXTREMOS ABSOLUTOS

Definición: $y = f(x)$ ten un máximo absoluto en $x_0 \Leftrightarrow f(x_0) > f(x), \forall x$.

$y = f(x)$ ten un mínimo absoluto en $x_0 \Leftrightarrow f(x_0) < f(x), \forall x$.

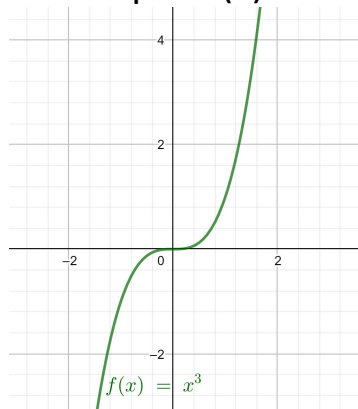
CONDICIÓN NECESARIA DE EXTREMO EN FUNCIONES DERIVABLES

Se $y=f(x)$ é derivable e ten extremo en $x = x_0$, entón $f'(x_0) = 0$.

Observacións:

a) Se a derivada se anula nun punto, non implica que sexa extremo.

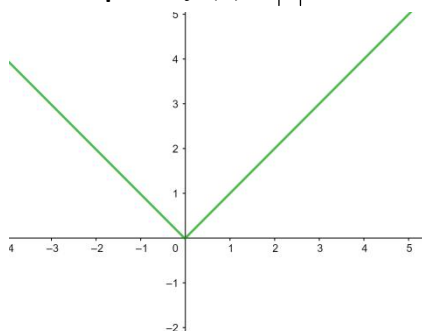
Exemplo: $f(x)=x^3$



$f'(x=0) = 0$, pero en $x=0$ non hai extremo.

b) Poden existir extremos en funcións que non sexan derivables.

Exemplo: $f(x) = |x|$



Ten un mínimo en $x=0$ pero non é derivable en $x=0$

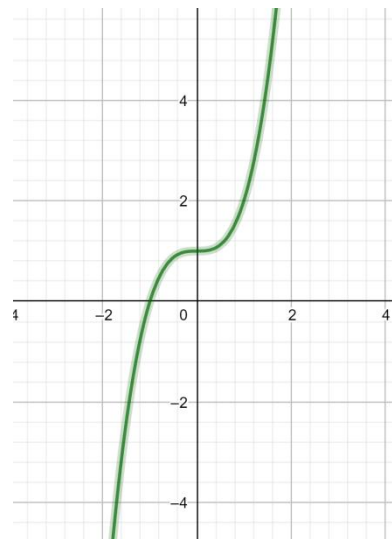
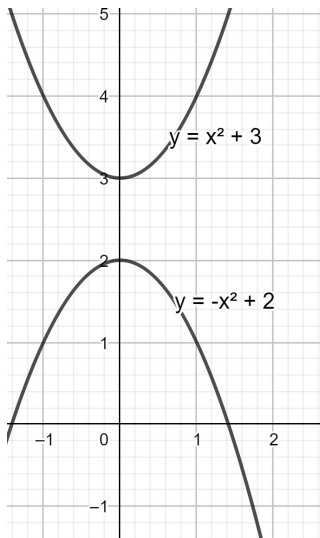
Teorema: Se $y=f(x)$ é derivable en x_0 , verifícase que:

- a) Se $f'(x_0)=0$, $f''(x_0) > 0$ entón f ten un mínimo relativo en x_0 .
- b) Se $f'(x_0)=0$, $f''(x_0) < 0$ entón f ten un máximo relativo en x_0 .

Abreviadamente:

$$\text{Se } f'(x_0) = 0, \begin{cases} f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ máximo relativo de } f \\ f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ mínimo relativo de } f \end{cases}$$

Exemplos: $f(x) = x^2 + 3$ $g(x) = -x^2 + 2$ $h(x) = x^3 + 1$

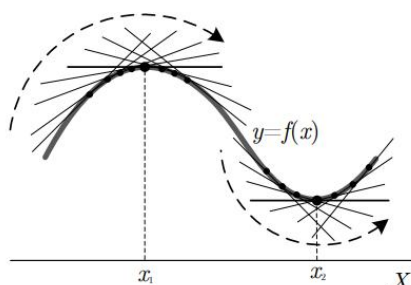


A función $y=f(x)$ ten un mínimo no $(0, f(0))$, a función $y=g(x)$ ten un máximo no $(0, f(0))$, en ambas a derivada se anula en $x=0$.

A derivada de $y=h(x)$ anúlase en $x=0$ pero a función non ten extremo en $x=0$.

Observación: se $f'(x_0) = 0$ entón a recta tanxente a f en x_0 é horizontal. É dicir:

Se $f''(x_0) > 0$ entón f' é crecente, o cal implica que as rectas tanxentes van aumentando a súa inclinación, segundo aumenta x , entón hai un mínimo relativo en x_0 .



Se $f''(x_0) < 0$ entón f' é decrecente, o cal implica que as rectas tanxentes van diminuindo a súa inclinación, segundo aumenta x , entón hai un máximo relativo en x_0 .

Aclaración: Para calcular os extremos podemos facer de dúas maneiras:

- i) Se $y=f(x)$ en x_0 pasa de crecer a decrecer (ou viceversa) entón hai extremo, sempre que o punto pertenza ao dominio da función.
- ii) Calculamos derivadas sucesivas, ata atopar unha distinta de cero, se

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0 \begin{cases} n \text{ par e } f^{(n)} > 0 \Rightarrow \text{mínimo en } x_0. \\ f^{(n)} < 0 \Rightarrow \text{máximo en } x_0. \\ n \text{ impar, non hai extremo, hai un punto de inflexión.} \end{cases}$$

Exemplo:

Estuda os extremos de $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

Solución:

$$\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$$

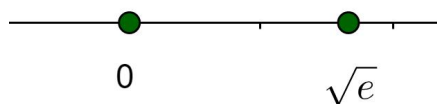
1º Calculamos a función derivada:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

2º Resolvemos $f'(x)=0$:

$$1 - 2 \ln x = 0 \Rightarrow 1 = 2 \ln x \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\frac{1}{2}} = x$$

3º Analizamos o signo da primeira derivada: Dividimos a recta en intervalos segundo os puntos que anulan a primeira derivada ou non existe:



$$f'(1) = \frac{1 - 2 \ln 1}{1^3} = \frac{1 - 2 \cdot 0}{1} > 0 \Rightarrow \text{Crecente en } (0, \sqrt{e})$$

$$f'(2) = \frac{1 - 2 \ln 2}{2^3} = \frac{-0.386...}{8} < 0 \Rightarrow \text{Decrecente en } (\sqrt{e}, +\infty)$$

$$\text{Máximo relativo en } (\sqrt{e}, f(\sqrt{e})) = \left(\sqrt{e}, \frac{1}{2e} \right)$$

Exemplo:

Estuda os extremos de $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

Solución:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

1º Calculamos a función derivada:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

2º Resolvemos $f'(x)=0$:

$$x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \text{ posibles extremos}$$

3º Calculamos a segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

4º Analizamos os signos da segunda derivada nos posibles extremos:

$$f''(0) < 0 \Rightarrow (0, f(0)) \text{ hai un máximo relativo, no } (0,0).$$

$$f''(2) > 0 \Rightarrow (2, f(2)) \text{ hai un mínimo relativo, no } (2,4).$$

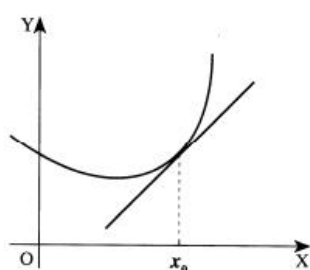
Exercicio:

3. Estuda a monotonía e extremos da seguinte función

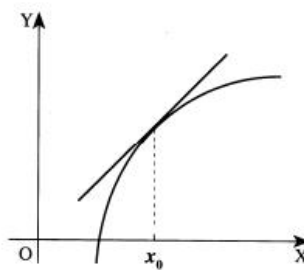
$$f(x) = e^{-x}(x+1)$$

4. Exercicio 29 da páxina 294.

3.2 CURVATURA E PUNTOS DE INFLEXIÓN



Convexa



Cóncava

Definición: Se unha función é derivable nun intervalo aberto, a función é convexa se para calquera punto do intervalo aberto á tanxente á gráfica da función está por debaixo da gráfica.

$$y = f(x) \text{ convexa en } (a, b), \text{ se } \forall x \in (a, b), t(x) > f(x).$$

Teorema: Sexa $y = f(x)$ derivable en x_0 :

a) Se $f''(x_0) > 0$, entón a función é convexa en x_0 .

b) Se $f''(x_0) < 0$, entón a función é cóncava en x_0 .

c) Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0)$ distinto de cero, entón a función ten un punto de inflexión en x_0 .

Exemplo:

Estuda a curvatura de $f(x) = x^3 + 3x^2$

Solución:

1º Calculamos a segunda derivada:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 6x + 6$$

2º Resolvemos $f''(x) = 0$: $6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$.

3º Dividimos a recta en intervalos segundo os puntos que anulan a segunda derivada:



4º Analizamos o signo da segunda derivada nos intervalos:

$$f''(-2) < 0 \Rightarrow a \text{ función é cóncava en } (-\infty, -1).$$

$$f''(0) > 0 \Rightarrow a \text{ función é convexa en } (-1, +\infty).$$

Exemplo:

Calcula os puntos de inflexión de $f(x) = xe^x$

1º Calculamos a segunda derivada:

$$f'(x) = e^x(x+1) \Rightarrow f''(x) = e^x(x+2)$$

2º Resolvemos $f''(x)=0$:

$$e^x(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ posible punto de inflexión.}$$

3º Calculamos a terceira derivada : $f'''(x) = e^x(x+3)$.

4º

$$f'''(-2) = e^{-2}(-2+3) \neq 0 \Rightarrow (-2, f(-2)) = (-2, -2e^{-2}) \text{ é un punto de inflexión}$$

Exercicios:

5. Números 10 b) c) e), 11 b) d) f), 12 c) e) da páxina 293.

6. Da ficha ANÁLISE ABAU:

MODELO 1.a) b)

2019 números: 3b), 4a) b), 6a)

2018 números: 7a), 8a), 10a) b)

2016 número 15b) i)

2015 número 25b)

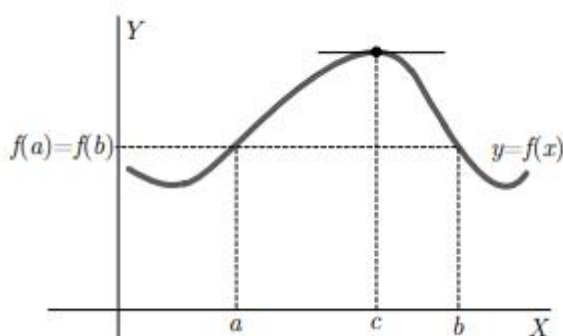
3.3 PROPIEDADES DAS FUNCIÓNS DERIVABLES: TEOREMAS

TEOREMA DE ROLLE

Teorema:

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \text{ continua en } [a, b] \\ y = f(x) \text{ derivable en } (a, b) \\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a, b) / f'(c) = 0.$$

Interpretación xeométrica:



Se unha función cumpre as hipóteses do teorema, entón existe polo menos un punto no intervalo aberto, no que a recta tanxente é paralela ao eixe de abscisas.

Exercicio:

Comprobar que a seguinte función verifica as hipóteses do teorema de Rolle, e calcula o punto no que se cumpre o teorema:

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 16 \text{ no intervalo } [2, 5].$$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 16 \\ f \text{ continua no intervalo } [2,5] \\ f(2) = f(5) = 34 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (2,5) / f'(c) = 0$$

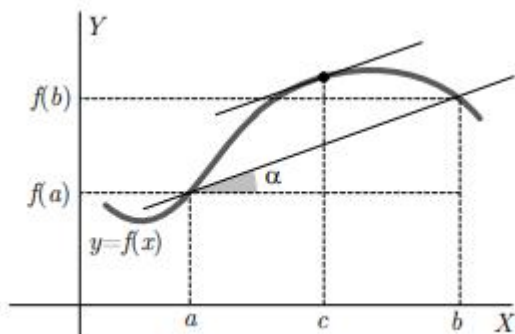
$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45 \Rightarrow 3x^2 - 24x + 45 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \notin (2,5) \\ \text{ou} \\ x = 3 \in (2,5) \end{cases}$$

TEOREMA DO VALOR MEDIO

Teorema:

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \text{ continua en } [a,b] \\ y = f(x) \text{ derivable en } (a,b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) / f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretación xeométrica:



Se unha función cumpre as hipóteses do teorema, entón existe polo menos un punto no intervalo aberto, no que a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ é paralela á recta que une os puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

Exercicio:

Comprobar que a seguinte función verifica as hipóteses do teorema do Valor Medio, e calcula o punto no que se cumpre o teorema:

$$f(x) = x^2 - 5x + 2 \text{ no intervalo } [2,5]$$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 5x + 2 \\ f \text{ continua no intervalo } [2,5] \\ f \text{ derivable no intervalo } (2,5) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (2,5) / f'(c) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2}$$

$$\text{Calculamos: } f(5) = 2, f(2) = -4,$$

Substituímos en $f'(c)$:

$$\left. \begin{array}{l} f'(c) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{2 + 4}{3} = 2 \\ f'(x) = 2x - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 5 = 2 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \in (2,5)$$

Entón o punto no que $c=2.5$

Exercicios: (para facer na clase)

7. Números 1, 2 e 3 da páxina 279.

8. Números 5 e 6 da páxina 281.

9. Números 17, 18, 19 e 20 da páxina 294.

3.4 REGRA DE L'HÔPITAL

REGRA DE L'HÔPITAL

Teorema(Regra de L'Hôpital): Sexan f e g dúas funcións que verifican unha das seguintes condicións:

$$\lim f(x) = \lim g(x) = 0, \text{ ou}$$

$$\lim f(x) = \pm \lim g(x) = \pm \infty$$

$$\text{Se existe } \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} (\text{finito ou infinito}) \Rightarrow \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemplos:

$$1) \left[\frac{0}{0}, \frac{\pm \infty}{\pm \infty} \right]$$

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sin(2x-2)} = \left[\frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2 \cdot \cos(2x-2)} = \frac{1}{2 \cdot \cos 0} = \frac{1}{2}$$

Comproba aplicando a Regra de L'Hôpital:

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{\sin(2x-2)} = 0$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4}{3 \ln x} = \infty$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{1 - \cos x} = -2$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 2}{x^3 + 3} = 0$$

2) $[0 \cdot \pm \infty, \infty - \infty]$ Transformamos en cociente:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - \sin x}{x \sin x} \right) = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \operatorname{sen} \frac{2}{x} \right) &= [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{2}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{2}{x} \cdot \left(-\frac{2}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cos \frac{2}{x} = 2 \cos 0 = 2 \end{aligned}$$

3) $[1^{\pm\infty}, 0^0, \infty^0]$ Aplicamos Logaritmos neperianos, transformamos en cociente e aplicamos a Regra de L'Hôpital:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = [\infty^0] = L$$

Aplicamos Ln :

$$\operatorname{Ln} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = \operatorname{Ln} L$$

$$\operatorname{Ln} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Ln} \left(x + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \operatorname{Ln} \left(x + \frac{1}{x} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Ln} \left(x + \frac{1}{x} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x + \frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x^2 + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{6x} = 0 \Rightarrow 0 = \operatorname{Ln} L \Rightarrow e^0 = L \Rightarrow L = 1$$

$$(b) \text{Comproba que } \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{1}{2x}} = \sqrt{e}$$

3.5 OPTIMIZACIÓN

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Trátase de problemas nos que se desexa calcular certo valor óptimo, segundo un criterio determinado. Por exemplo: optimizar un volume, unha área, un beneficio, etc.

O procedemento para resolver os problemas de optimización, é o seguinte:

1. Determinar a función a optimizar, da que se quere conseguir o máximo ou mínimo.
2. Utilizando os datos do problema expresar a función utilizando unha soa variable.
3. Calcular o valor máximo ou mínimo da función, segundo o indique o enunciado do problema.
4. Discutir os resultados, comprobando que o valor calculado é o valor óptimo.

Exemplo:

1) Cal é o número positivo que sumado co seu inverso dá o menor valor posible?

Solución:

1º Esquema cos datos:

Número x , inverso $1/x$

2º Determinar a función a optimizar $F(x) = x + \frac{25}{x}$

3º Calcular o mínimo da función: $F'(x) = 1 - \frac{25}{x^2}$

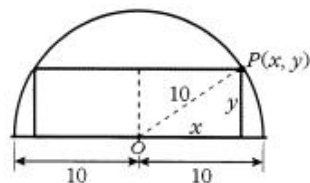
$F'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{25}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{25}{x^2} = 1 \Rightarrow x = \pm 5$. A solución negativa non é válida.

4º Comprobar que o valor calculado correspóndese co enunciado do problema:

$$F''(x) = \frac{25 \cdot 2 \cdot x}{x^4} = \frac{50}{x^3} \Rightarrow F''(x=5) = \frac{50}{5^3} > 0 \Rightarrow \text{para } x = 5 \text{ hai un mínimo}$$

2) Nun xardín con forma de semicírculo de radio 10m, vaise instalar unha maceta rectangular. Un dos lados está sobre o diámetro e o oposto a el, ten os seus extremos na parte curva. Calcula as dimensións da maceta para que a súa área sexa máxima:

Solución:



1º Chamámoslle $2x$ á base e y á altura.

O punto O é o centro da circunferencia, entón $OP=10$,

$$x^2 + y^2 = 10^2 \Rightarrow \text{Despexamos } y = \sqrt{100 - x^2}$$

A área é $A=2x \cdot y$

2º Función a optimizar

$$A = 2x \cdot y = 2x \cdot \sqrt{100 - x^2}$$

3º Calculamos o máximo da función:

$$A'(x) = 2 \cdot \sqrt{100 - x^2} + 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{2(100 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{200 - 4x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 200 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2}$$

4º Comprobemos que se $x = 5\sqrt{2}$ a área é máxima:

$$\left. \begin{array}{l} A'(0) > 0 \\ A'(10) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{a área é máxima para o valor calculado, } x = 5\sqrt{2}$$

Entón as dimensión son $10\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$, a súa área máxima será 100m^2 .

Exercicios:

10. Exercicios números 2,3,4 da páxina 277.
11. Exercicio número 59 da páxina 296.
12. Exercicios números 8, 9 a), b), 15 e 16 da páxina 293.

