1. Calcula, utilizando la definición, la derivada de $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ en $x = 2$.

2. Usando la definición de derivada, calcula el valor de $\boldsymbol{m}$ para que $f'(1) = 0$, con $f(x) = \frac{mx^2-1}{x}$.

3. Aplica la definición de derivada para hallar $f'(x)$ en cada caso:

(a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

4. Prueba, utilizando la definición de derivada, que la función $f(x) = (1-x) \cdot \sqrt{1-x^2}$ es derivable en $x = 1$ y no lo es en $x = -1$.

5. Consideremos la función $f(x) = x \cdot g(x)$. Sabiendo que g es continua en $x = 0$, probar que f es derivable en dicho punto y calcular su derivada, $f'(0)$.

NOTA: *No se puede suponer que g es derivable, ya que puede no serlo.*

6. La ecuación del espacio (en km) recorrido por un móvil, en función del tiempo (en horas), viene dada por $e(t) = 3t^2 - t + 1$. Calcula la velocidad instantánea en $t = 2$.

7. El número de personas afectadas cada día por una determinada enfermedad viene dado por la función $f(x) = -x^2 + 40x + 84$, donde x representa el número de días transcurridos desde que se descubrió la enfermedad. Calcula:

(a) El número de enfermos en el momento de darse a conocer la dolencia.
(b) El número de días que deben pasar para que desaparezca la enfermedad.
(c) La tasa de propagación de la enfermedad al cabo de 5 días.
(d) El crecimiento medio de la enfermedad durante el primer mes.
(e) El momento en el que la enfermedad deja de propagarse.

8. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3^{2x^2+1}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

9. Determina los puntos de la curva $y = x^3 + 9x^2 - 9x + 15$ en los que la tangente a la gráfica es paralela a la recta $12x - y + 5 = 0$, y obtén las ecuaciones de dichas tangentes.

10. Encuentra los puntos de la curva $y = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + x + 1$ en los que la tangente a la gráfica forma un ángulo de $45°$ con la horizontal.

11. Prueba que existe un punto de la curva $f(x) = e^x + arc\ tg\ x$, cuya tangente en ese punto es paralela a la recta $y = 3x + 2$.

12. Obtén las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la curva $y = (x+1) \cdot \sqrt[3]{3-x}$ en el punto $P(2,3)$.

13. Dada $y = sen\ x$, halla un punto en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en el que la tangente sea paralela a la cuerda que pasa por $(0,0)$ y $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

14. Escribe la ecuación de la recta normal a la curva $y = ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ en el punto de abscisa $x = -3$.

15. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones, definiendo su derivada, cuando sea posible:

(a) $f(x) = \begin{cases} e^x & si\ \ x \leq 0 \\ 1 & si\ \ 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & si\ \ x \geq 3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x^2} & si\ \ x \leq 0 \\ 1 - \sqrt[3]{x^2} & si\ \ x > 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} -1 & si\ \ x = 0 \\ \frac{2x\,(x-3)}{x^2-9} & si\ \ x \neq 0\ \ y\ \ x \neq 3 \\ 1 & si\ \ x = 3 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot sen\ \frac{1}{x} & si\ \ x \neq 0 \\ 0 & si\ \ x = 0 \end{cases}$

(e) $f(x) = \frac{|x|}{x^2-1}$

(f) $f(x) = |x+1| + |x-3|$

16. Determinar, si es posible, el valor del parámetro $\boldsymbol{a}$, para que la función f sea derivable en todo su dominio de definición:

$$f(x) = \begin{cases} x\ ln\,x & si\ \ 0 < x \leq 1 \\ a\,(1 - e^{1-x}) & si\ \ x > 1 \end{cases}$$

17. ¿Existen valores de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ para los cuales la siguiente función es continua y derivable?:

$$f(x) = \begin{cases} -x(x-a) & si\ \ 0 \leq x < 15 \\ b & si\ \ 15 \leq x < 30 \\ 100 - \frac{5}{c}x & si\ \ 30 \leq x < 60 \end{cases}$$

18. Deriva y simplifica:

(a) $f(x) = \sqrt{ln[tg\,(x^2+1)]}$

(b) $f(x) = arc\ tg\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $f(x) = (1 - cos\,x) \cdot cotg\ x$

(d) $f(x) = 5\ tg^3(3x^2+1)$

(e) $f(x) = ln\,\sqrt{\frac{1+sen\,x}{1-sen\,x}}$

(f) $f(x) = ln[x + 1 + \sqrt{x^2+2x+1}]$

(g) $f(x) = e^{ln\,sen^2 x}$

(h) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

(i) $f(x) = arc\ sen\,(x^{cos^2 x})$

(j) $f(x) = arc\ sen\,(2x\,\sqrt{1-x^2})$

(k) $f(x) = x^3\,log_2\,x - \frac{x^3}{3}$

(l) $f(x) = ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)$

(m) $f(x) = arc\ tg\ \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(n) $f(x) = arc\ cotg\ \frac{1+x}{1-x}$

19. Deriva las siguientes funciones, utilizando los métodos alternativos de derivación:

(a) $f(x) = (x^2 + cos\,x)^{sen\,x}$

(b) $f(x) = arc\ tg\ x$

(c) $\frac{(x-1)^2}{8} - \frac{(y+3)^2}{14} = 1$

(d) $x^2y + y^2\cos x = 2$

(e) $f(x) = \left(\frac{sen\,x}{x}\right)^x$

(f) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = -9$

(g) $f(x) = sen^3x \cdot cos^2x$

(h) $f(x) = \sqrt{x^2+1}\ \cdot\ \sqrt[3]{x^2}$

20. Calcula:

(a) $(f \circ f)'(0)$, siendo $f(x) = (1+x)^{-1}$.

(b) $g'(1)$, siendo $g(x) = e^{f(x)} + x^2f(x) + [f(x)]^2$, y sabiendo que f es una función derivable, tal que $f(1) = 0$ y $f'(1) = -2$.