FUNCIONES ELEMENTALES I

1. FUNCIONES LINEALES

Llamamos funciones lineales a las funciones polinómicas de grado uno o cero cuya expresión es de la forma

$$y = f(x) = mx + n. \quad **$$

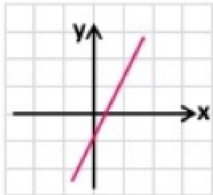
Su dominio es Dom (f) = IR

La representación gráfica de estas funciones es una recta.

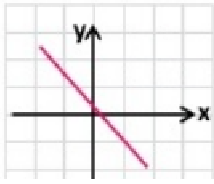
En la expresión anterior $y = f(x) = mx + n$, *m es la pendiente de* la recta y *n es la ordenada en el origen*, es decir, la recta pasa por el punto (0, n).

Según el valor de m, se tiene que:

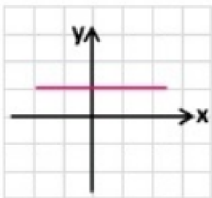
- ✓ si m > 0 la función es **creciente**



- ✓ si m < 0 la función es **decreciente**



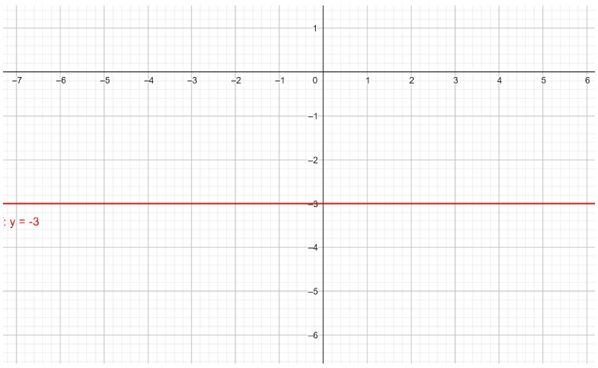
- ✓ si m = 0 la función es **constante**



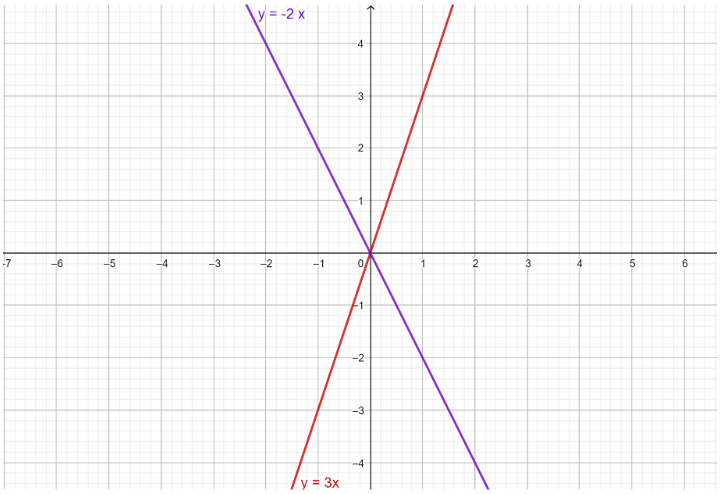
*** A veces se utiliza el término función lineal para las funciones que pasan por el origen de coordenadas, es decir, de la forma f(x) = mx, y se llama función afin a la que es de la forma f(x) = mx + n, con n ≠ 0*

Según su expresión analítica se tiene:

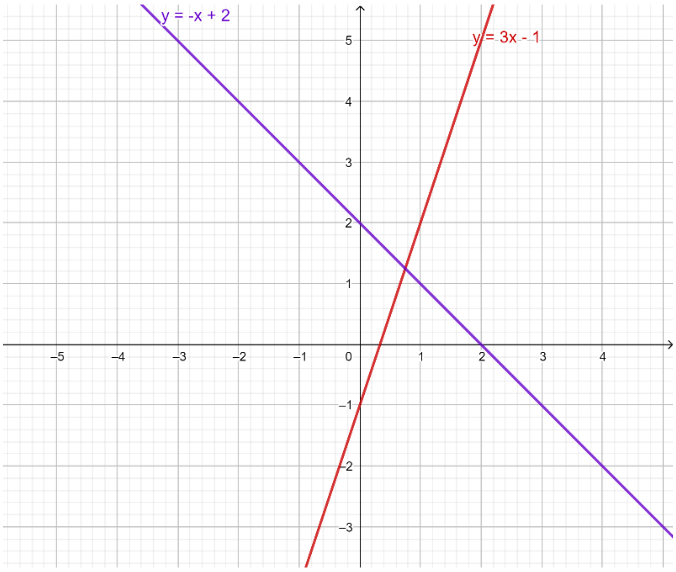
- m= 0 → $y = f(x) = k;\ k \in \Re$: **FUNCIÓN CONSTANTE**.
  Su gráfica es una recta paralela al eje OX.



- $y = f(x) = m \cdot x; m \in \Re - \{0\}$: **FUNCIÓN LINEAL**.
  Su gráfica es una recta que pasa por el punto $O(0,0)$.



- $y = f(x) = m \cdot x + n; m, n \in \Re - \{0\}$: **FUNCIÓN AFÍN**.
  Su gráfica es una recta que no pasa por el punto $O(0,0)$.



2. FUNCIONES CUADRÁTICAS

Llamamos funciones cuadráticas a las funciones polinómicas de grado dos cuya expresión viene dada por:

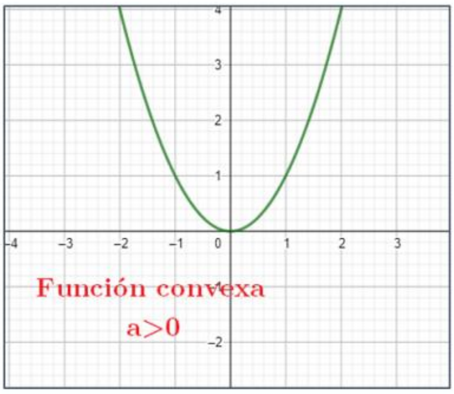
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c.$$

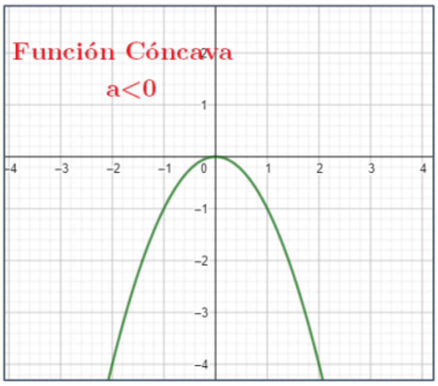
Su dominio es Dom (f) = IR

Su gráfica es una **parábola** de eje paralelo al eje Y, y su vértice es un punto cuya abscisa es $x_v = \frac{-b}{2a}$.

Del estudio de su gráfica deducimos que :

- ✓ Si a > 0 la función es convexa, es decir, las ramas van hacia arriba, lo que implica que el vértice es un mínimo.
- ✓ Si a < 0 la función es cóncava, es decir, las ramas son hacia abajo, lo que implica que el vértice es un máximo.





Representación gráfica de $y = f(x) = ax^2 + bx + c$**:**

1. Orientación: $a > 0 \Rightarrow$ parábola hacia arriba; $a < 0 \Rightarrow$parábola hacia abajo.
2. Cálculo del vértice $V(x_v, y_v)$:

$$x_v = \frac{-b}{2a}\,;\, y_v = f(x = x_v) = f(x_v).$$

3. Ecuación del eje de simetría: $x = \frac{-b}{2a}$.
4. Puntos de corte con los ejes OX y OY.

   Eje OY: $x = 0$

   Sustituyendo $x = 0$ en $y = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c \Rightarrow (0, c)$

   Eje OX: $y = 0$

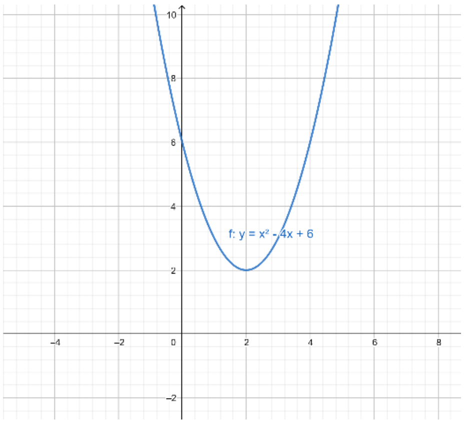
   Sustituyendo $y = 0$ en $y = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c$ se obtiene una ecuación de segundo grado $0 = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c \Rightarrow \begin{cases} (x_1, 0) \\ (x_2, 0) \end{cases}$

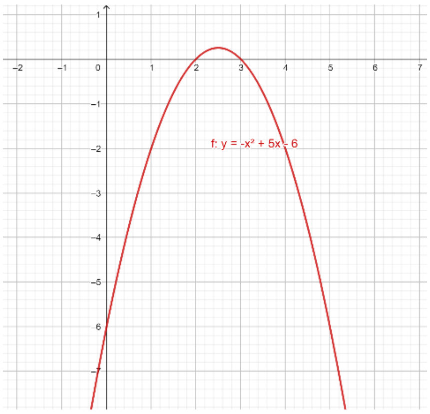
5. Se puede utilizar además una tabla auxiliar de valores.

Ejercicio: Representa gráficamente las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = x^2 - 4x + 6$ b) $y = -x^2 + 5x - 6$

Solución:





3.- FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Las funciones de proporcionalidad inversa son funciones racionales cuya expresión viene dada por: $y = f(x) = \frac{k}{x}, k \in \mathbb{R}$

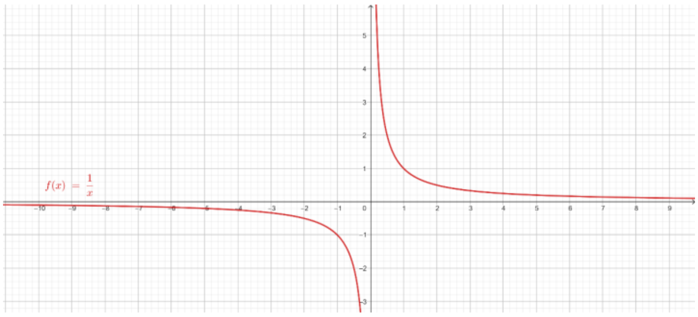
Su dominio es $Dom\ (f) = \ IR - \{0\}$.

La representación gráfica es una **hipérbola**:

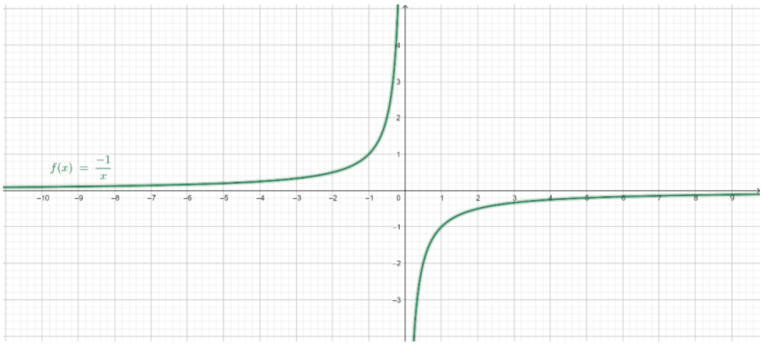
- Si $k > 0 \Rightarrow$ la función es decreciente en todo su dominio y las ramas de la hipérbola están en el primer y tercer cuadrantes.
- Si $k < 0 \Rightarrow$ la función es creciente en todo su dominio y las ramas de la hipérbola están en el segundo y cuarto cuadrantes.

La función tiene dos asíntotas, una horizontal (en y = 0) y otra vertical (en x=0).

Ejemplo: Representación de y= 1/x



Ejemplo.- Representación de y = - 1/x



Representación gráfica de $y = f(x) = \frac{k}{x}$**, para cualquier k**

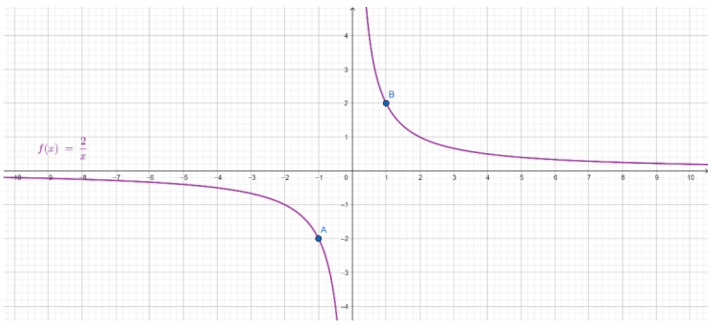
- ✓ Si k>0, te servirá de modelo la gráfica de $y = f(x) = \frac{1}{x}$ Haz, para ello, una tabla de valores y ten en cuenta que Domf $= \Re - \{0\}$.
- ✓ Si k< 0, te servirá de modelo la gráfica de $y = f(x) = \frac{-1}{x}$

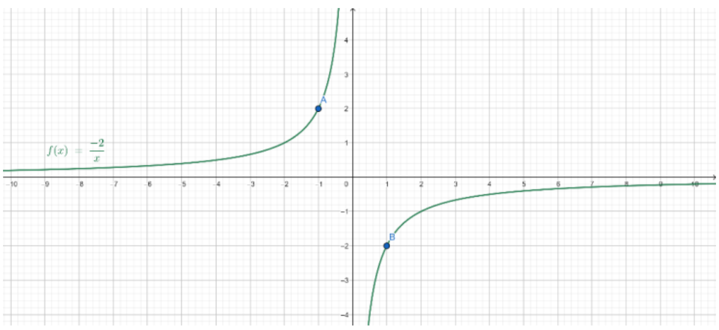
Puedes ayudarte de una tabla de valores teniendo en cuenta que Domf $= \Re - \{0\}$. Lleva los valores obtenidos a un sistema de coordenadas cartesianas.

Cuanto mayor es el valor absoluto de **k,** más separada está la curva de sus asíntotas.

Ejercicio: Representa las siguientes hipérbolas:

a) $y = f(x) = \frac{2}{x}$ b) $y = f(x) = \frac{-2}{x}$





4.- FUNCIONES EXPONENCIALES

Las funciones exponenciales son funciones cuya expresión algebraica viene dada por:

$$y = f(x) = a^x \text{ con } a \neq 1,\ a > 0.$$

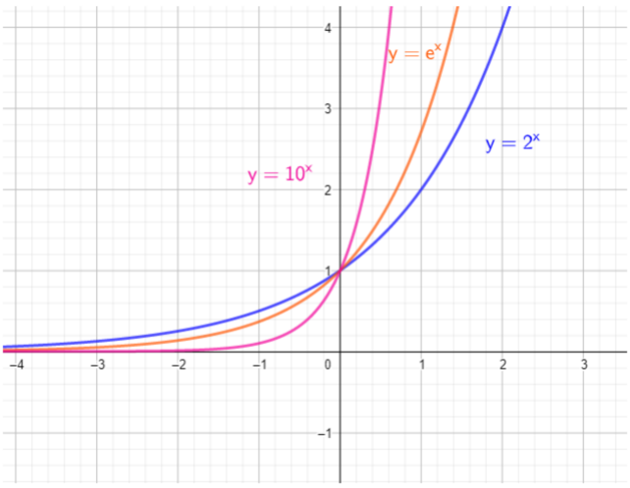
Su dominio es $Dom\,(f) = IR$

Su gráfica pasa siempre por el punto (0,1) ya que $f(0) = a^0 = 1$ y por el punto (1,a) ya que $f(1) = a^1 = a$

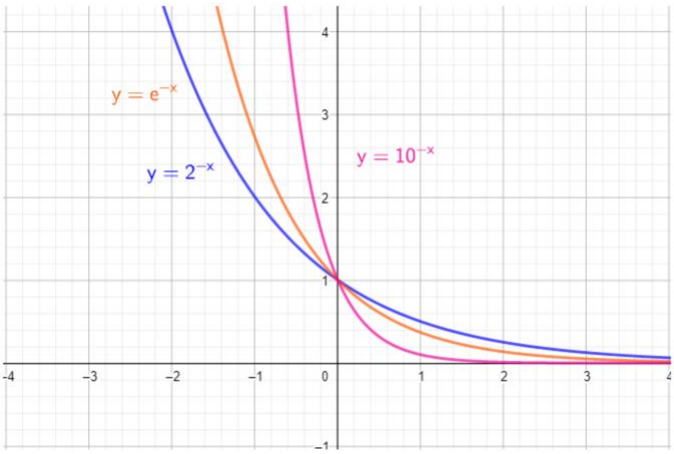
Tienen una asíntota horizontal en ***y = 0*** y además:

- ✓ **Si a> 1**, es una función **creciente**
- ✓ **Si 0< a< 1,** es una función **decreciente**

Ejemplos: Las siguientes gráficas representan algunas de las funciones exponenciales más usadas.



Fíjate cómo al aumentar la base la función crece de forma más rápida.

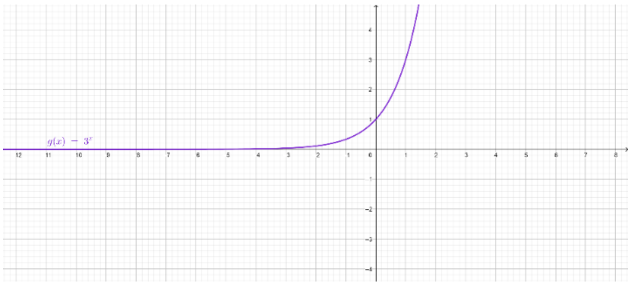


Fíjate cómo decrece cuando la base está entre 0 y 1

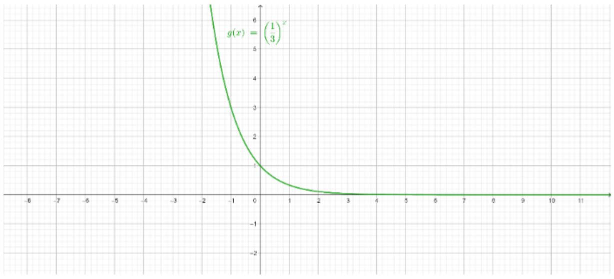
$$y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ y = e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x,\ y = 10^{-x} = \left(\frac{1}{10}\right)^x$$

Ejercicio: Representa gráficamente las siguientes funciones exponenciales:

a) $y = 3^x$



$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



5.- FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Las funciones logarítmicas son funciones cuya expresión algebraica viene dada por:

$$y = f(x) = \log_a x;\ a \neq 1,\ a > 0.$$

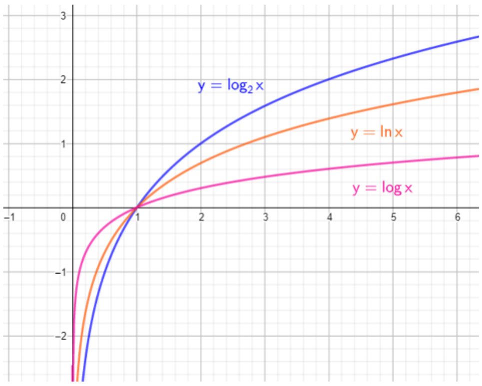
El dominio de estas funciones es **Dominio f=** (0, +∞)

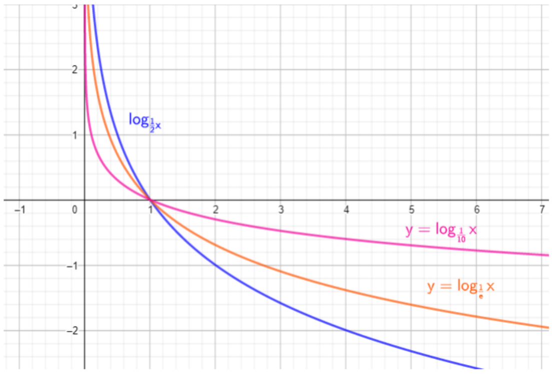
Su gr´afica pasa siempre por (1, 0) porque $f(1) = \log_a 1 = 0$ y también pasa por (a, 1) porque $f(a) = \log_a a = 1$.

Tienen una asíntota vertical en ***x = 0*** y además

- ✓ **Si a> 1**, es una función **creciente**
- ✓ **Si 0< a< 1,** es una función **decreciente**

Ejemplos: Las siguientes gráficas representan algunas de las funciones logarítmicas más usadas.

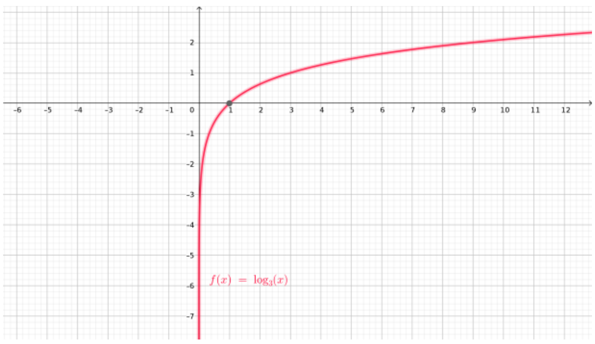


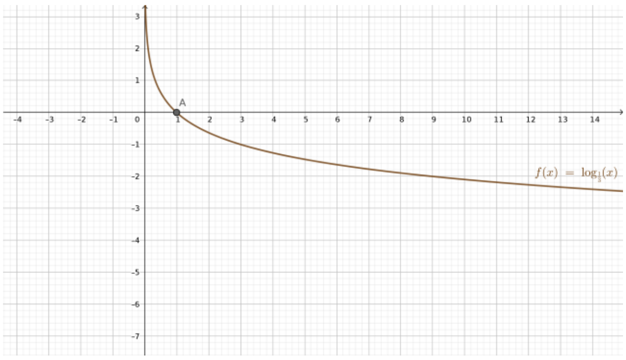


.

Ejercicio: Representa las siguientes funciones logarítmicas:

a) $y = f(x) = \log_3 x$ b) $y = f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$





La función logarítmica y la función exponencial son funciones inversas. Sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y el tercer cuadrantes.