

Transformables

casos $0 \cdot \infty$ e $\infty - \infty$, podemos transformar las funciones para convertir las en $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty$$

calculo mcm $\rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - x}{x \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{0} \text{ L'Hospital}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x)'}{(x \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \frac{0}{0} \text{ L'Hospital}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0 \cdot (-\infty) \text{ lo convertimos en } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{haciendo } x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = \boxed{0}$$

ahora si, $-\frac{\infty}{\infty}$ L'Hospital

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} (x+3) = 0 \cdot \infty \text{ lo convertimos, aqui el cambio salta a la vista}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} (x+3) = \frac{\infty}{\infty} \text{ L'Hospital}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \infty - \infty$$

hacemos mcm

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x \cdot e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + x e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2e^x + x e^x} = \frac{1}{2+0} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

18) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sec x \cdot \ln x) = 0 \cdot (-\infty)$ (p.5)

lo transformo en L'Hopital
cambiando $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sec x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sec^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sec^2 x}{x \cos x}$$

ahora ya $-\frac{\infty}{\infty}$ L'Hopital $\frac{0}{0}$ L'Hopital (2° vez)

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2 \sec x \cos x}{\cos x + x(-\sec x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2 \sec x \cos x}{\cos x - x \sec x} = \frac{0}{1-0} = \boxed{0}$$

19) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{e}{e^x - e} \right) = \frac{1}{0} - \frac{e}{0} = \infty - \infty$

lo transformo haciendo

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e - e(x-1)}{(x-1)(e^x - e)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e - ex + e}{(x-1)(e^x - e)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - ex}{xe^x - xe - e^x + e} = \frac{e - e}{e - e - e + e} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{e^x + xe^x - e - e^x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{xe^x - e} \uparrow \frac{0}{0} \text{ otra vez}$$

L'Hopital (1° vez)

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{e^x + xe^x} = \frac{e}{e + e} = \frac{e}{2e} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

20) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty$

lo transformo haciendo el mcm

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) - \ln x}{(\ln x)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - \ln x}{(x-1)\ln x} = \frac{0-0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

L'Hopital

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\frac{x-1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x + x-1} = \frac{0}{0} \text{ L'Hopital 2° vez}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{0+2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\cos\left(\frac{1}{x}\right) \right]^x =$$

(p.6)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos 0)^\infty = 1^\infty \text{ tipo } n^\infty \text{ e}$$

$$\Rightarrow e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos(\frac{1}{x}) - 1)x} = e^{(\cos 0 - 1)\infty} = e^{0 \cdot \infty}$$

el $0 \cdot \infty$ lo transformamos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} - 1 \right) x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(\frac{1}{x}) - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

ahora sí, L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-\sin \frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ x \neq 0 \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\sin \frac{1}{x} = -\sin 0 = \boxed{0}$$

Retornamos:

$$e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos(\frac{1}{x}) - 1)x} = e^0 = \boxed{1}$$

22) Empezamos los límites del tipo logarítmico se utilizará este método para las indeterminaciones $0^0, \infty^0$

lo que haremos será aplicar el logaritmo (vale con cualq. base pero a mi me gusta más el $\ln$ para "bajar" el exponente y convertirlo en un caso en el que podamos aplicar L'Hopital. Veámoslo con un ejercicio:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = \infty^0 = \infty^0$$

$$\text{hago } \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^{1/x}) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ L'Hopital}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \xrightarrow{\frac{\infty}{\infty} \text{ L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \boxed{0} \quad (\text{p. 7})$$

Resumiendo: $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}}_A \right) = 0$

$$\ln A = 0$$

$$\Rightarrow A = 1 \quad (\text{el único log. que da 0 es el del 1})$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = 1}$$

23) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^x = 0^0$

le meto un logaritmo para "bajar" el exponente

$$\ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln [(\operatorname{sen} x)^x] = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln (\operatorname{sen} x)$$

$$= 0 \cdot (-\infty) \quad \text{lo puedo transformar en L'Hopital}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln (\operatorname{sen} x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln (\operatorname{sen} x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty} \quad \text{L'Hopital}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen} x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x \cos x - x^2 (-\operatorname{sen} x)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x \cos x + x^2 \operatorname{sen} x}{\cos x} =$$

$$= \frac{0+0}{1} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$$

Retomando: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(A) = 0 \Leftrightarrow A = 1$

$$A = \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^x = 1}$$

24) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \right)^{\cos \frac{\pi}{2}} = \infty^0$

$$\left(\frac{\pi}{2} = 90^\circ \right) \quad \operatorname{tg} 90^\circ = \frac{\operatorname{sen} 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\cos 90^\circ = 0$$

Metemos logaritmo para bajar el exponente

$$A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} \quad \ln(A) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} \right) =$$

24) continuación, llamáramos $A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$ (p.8)

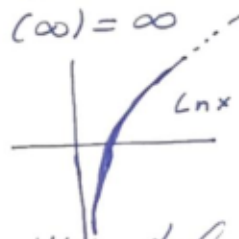
$$\text{hacemos } \ln(A) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{tg} x)^{\cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\operatorname{tg} x) = 0 \cdot \infty \quad \text{lo puedo convertir en L'Hopital}$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \operatorname{tg} 90^\circ = \frac{\operatorname{sen} 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow$$

$$\ln(\infty) = \infty$$



$$\stackrel{\uparrow}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\frac{1}{\cos x}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{aplic. L'Hopital}$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\ln(\operatorname{tg} x))'}{\left(\frac{1}{\cos x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg} x}}{-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left[\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right]}{+\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x \cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$$

Como hicimos $\ln(A) = 0 \Leftrightarrow A = 1$

$$A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} = 1$$

25) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2^x - 1)^{\frac{2}{x+1}} = \infty^0$; hacemos $A = \lim_{x \rightarrow \infty} (2^x - 1)^{\frac{2}{x+1}}$

$$\ln(A) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow \infty} (2^x - 1)^{\frac{2}{x+1}}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left((2^x - 1)^{\frac{2}{x+1}}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x+1} \ln(2^x - 1) \stackrel{\uparrow}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \frac{(2^x - 1)'}{(2^x - 1)}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \frac{2^x \ln 2}{2^x - 1} =$$

$$= 2 \ln 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{2^x - 1} \stackrel{\uparrow}{=} 2 \ln 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2}{2^x \ln 2} = 2 \ln 2 = \ln 2^2 = \ln 4$$

Resumiendo: $\ln(A) = \ln 4 \Rightarrow \underline{A=4}$

(p.9)

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} (2^x - 1)^{\frac{2}{x+1}} = 4$$

26) Con parámetros (típico de ABAU)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - a \operatorname{sen} x + x \cos 3x}{x^2} = \frac{0 - a \cdot 0 + 0 \cdot 1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} - a \cos x + \cos 3x - 3x \operatorname{sen} 3x}{x^2} = \text{L'Hopital}$$

$$= \frac{1 - a \cdot 1 + 1 - 0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow 1 - a + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

para que el límite y sea finito
tenemos que poder aplicar
el L'Hopital
entonces tiene que ser del

Sabiendo que $a=2$
ahora calculamos el límite tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 2 \cos x + \cos 3x - 3x \operatorname{sen} 3x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(x+1)^2} + 2 \operatorname{sen} x - 3 \operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 3x - 3x \cos 3x}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{luego } \ln(A) = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = e^{-1/2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{e}}}$$

el límite que pedían
vale $\boxed{\frac{1}{\sqrt{e}}}$

30) a, b f continua en $x=0$

$$b = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cos x - a e^x}{x^2} = \frac{0 + 1 - a}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

para que el límite
exista y sea finito
tenemos q. aplicar L'Hopital
y para eso tiene q. ser
del tipo $\frac{0}{0}$

$$b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cos x - e^x}{x^2} \xrightarrow{\text{L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{sen} x - e^x}{2x} =$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x - e^x}{2} = \frac{-1 - 1}{2} = -\frac{2}{2} = \boxed{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{b=-1}$$