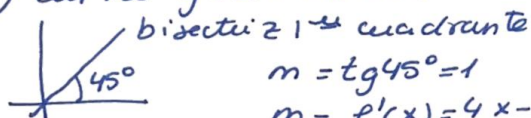


Básicos

Soluciones
Ficha recta tangente
y recta normal

(p.1)

1) Curva $y = 2x^2 - 3x - 1$



$$m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$m = f'(x) = 4x - 3$$

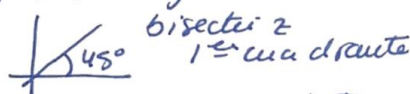
$$\left. \begin{array}{l} m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \\ m = f'(x) = 4x - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = 4x - 3 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow \underline{x = 1}$$

para $x = 1 \Rightarrow$ calculo y sustituyendo en la ecuación de la curva

$$y = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 1 = 2 - 3 - 1 = -2$$

Solución Pto de tangencia $\boxed{(1, -2)}$

2) Curva $y = x^2$



$$m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$m = f'(x) = 2x$$

$$\left. \begin{array}{l} m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \\ m = f'(x) = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow \underline{x_0 = \frac{1}{2}}$$

Calculo y_0 sustituyendo x_0 en la ec. de la curva $y = x^2$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Pto de tangencia: $\boxed{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)}$

Ec. recta tangente: $y - y_0 = m(x - x_0)$; $y - \frac{1}{4} = 1\left(x - \frac{1}{2}\right)$; $\boxed{y = x - \frac{1}{4}}$

Ec. recta normal: $y - y_0 = m'(x - x_0)$
 $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{1} = -1$ $\left\{ \begin{array}{l} y - \frac{1}{4} = -(x - \frac{1}{2}) \\ y = -x + \frac{3}{4} \end{array} \right.$

3) Curva $y = \ln x$

cuerda que pasa
por $(1, 0)$ y $(e, 1)$

$$\Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{e - 1} = \boxed{\frac{1}{e - 1}}$$

por otro lado $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x} = \frac{1}{e - 1} \Rightarrow \boxed{x_0 = e - 1}$

sustituyo x_0 en la curva para obtener y_0 :

$$\ln(e - 1) = y_0$$

Pto de tangencia: $\boxed{(e - 1, \ln(e - 1))}$

4) Curva $y = \operatorname{tg} x$

$$\alpha = ? \text{ en } x_0 = 0 \text{ donde } m = \operatorname{tg} x = f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ para } x = 0$$

$$m = f'(0) = \frac{1}{\cos^2 0} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 1 = \boxed{45^\circ} \text{ solución}$$

5) Curva $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$
 $y' = 3x^2 - 6x - 9$

paralela al eje OX

$$\left. \begin{array}{l} \text{paralela al eje } OX \\ - \text{ --- } m = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$0 = 3x^2 - 6x - 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$$

$$\text{* para } x = 3 \Rightarrow y = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 5 = -27 + 5 = -22$$

$$\text{* para } x = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$$

Ptos. de tangencia $\boxed{(3, -22) \text{ y } (-1, 10)}$

7) Curva $y = x^4 + 7x^3 + 13x^2 + x + 1$; $y' = 4x^3 + 21x^2 + 26x + 1$ (p. 2)
 $m = \tan 45^\circ = 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^3 + 21x^2 + 26x + 1 = 1 \Leftrightarrow 4x^3 + 21x^2 + 26x = 0$

Saco factor común $x \Rightarrow x(4x^2 + 21x + 26) = 0$

* Primera solución $x=0$

* Segunda y tercera: $4x^2 + 21x + 26 = 0$; $x = \frac{-21 \pm \sqrt{441 - 416}}{8} =$

$= \frac{-21 \pm \sqrt{25}}{8} = \frac{-21 \pm 5}{8} \quad \begin{cases} \frac{16}{8} = 2 \\ -\frac{26}{8} = -\frac{13}{4} \end{cases}$

* para $x=0 \Rightarrow y = 0^4 + 7 \cdot 0^3 + 13 \cdot 0^2 + 0 + 1 = 1$

* para $x=2 \Rightarrow y = 2^4 + 7 \cdot 2^3 + 13 \cdot 2^2 + 2 + 1 = 127$

* para $x = -\frac{13}{4} \Rightarrow y = \left(-\frac{13}{4}\right)^4 + 7\left(-\frac{13}{4}\right)^3 + 13\left(-\frac{13}{4}\right)^2 + \left(-\frac{13}{4}\right) + 1 = 6'33203125$

Ptos de tangencia buscados: $(0, 1), (2, 127), \left(-\frac{13}{4}, 6'33203125\right)$

COMPLETOS

8) Curva $y = \ln(\tan 2x)$ } $y' = \frac{(\tan 2x)'}{(\tan 2x)} = \frac{\frac{2}{\cos^2 2x}}{\tan 2x} = \frac{\frac{2}{\cos^2 2x}}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}} = \frac{2 \cos 2x}{\cos^2 2x \cdot \sin 2x} = \frac{2}{\cos 2x \cdot \sin 2x}$
 pto. absueto $x_0 = \frac{\pi}{2}$

en $x_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow m = \frac{2}{\cos 2\frac{\pi}{2} \cdot \sin 2\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\cos \pi \cdot \sin \pi} \uparrow = \frac{2}{-1 \cdot 0} = -\frac{2}{0} = -\infty$

$\pi = 180^\circ \rightarrow \begin{cases} \cos 180^\circ = -1 \\ \sin 180^\circ = 0 \end{cases}$

Por tanto la recta que estamos buscando es una recta perpendicular (paralela al eje Y), las ecuaciones de

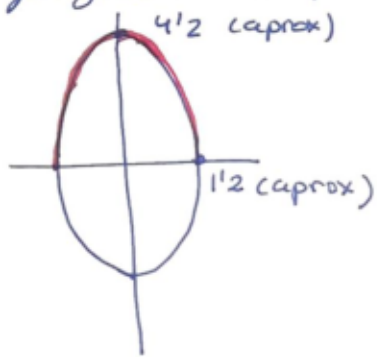
estas rectas son de la forma $x = \text{número}$, como pasa

por $x_0 = \frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$ Ec. recta tangente a y (curva) en el pto $x_0 = \frac{\pi}{2}$

No podemos alcanzar el pto de tangencia, que sería $y_0 = \ln(\tan 2\frac{\pi}{2}) = \ln(\tan \pi) = \ln(0) \rightarrow (-\infty)$
 la recta normal tendría que ser $\perp$ a la recta tangente como la $\perp$ es una recta horizontal (paralela al eje x) su ecuación sería de la forma $y = y_0$ pero y_0 no es alcanzable por lo visto antes ($\ln(0) = -\infty$)

Así que no tenemos recta normal

9) Curva $9x^2 + y^2 = 18$
¿pero qué curva es esta? si la dibujamos con
geogebra: elipse con centro en (0,0) $\frac{D}{2} = 4'2$ y $\frac{d}{2} = 1'2$



No se trata de una función, sino
de 2 funciones $\neq$

Despejamos y en la ec. de la curva

$$y^2 = 18 - 9x^2$$

$$y_1 = + \sqrt{18 - 9x^2}$$

$$y_2 = - \sqrt{18 - 9x^2}$$

Todo esto NO es necesario saberlo, ni siquiera verlo, sim-
plemente os lo cuento para que entendáis que y_1 va
a tener 1 pto de tangencia e y_2 otro, vamos
que no van a salir 2 pto de tangencia, 2 rectas
tangentes y 2 rectas normales, no nos asustemos que
el ejercicio es fácil. Primero la pendiente: $3x - y + 7 = 0$
 $\Rightarrow y = 3x + 7 \Rightarrow \underline{\underline{m=3}}$

Primera función

$$y_1 = \sqrt{18 - 9x^2} \Rightarrow y_1' = \frac{(18 - 9x^2)'}{2\sqrt{18 - 9x^2}} = \frac{-18x}{2\sqrt{18 - 9x^2}} = \frac{-9x}{\sqrt{18 - 9x^2}}$$

$$\text{como } m = 3 \Rightarrow 3 = \frac{-9x}{\sqrt{18 - 9x^2}} \Rightarrow -9x = 3\sqrt{18 - 9x^2}$$

$$81x^2 = 162 - 81x^2 ; 81x^2 + 81x^2 = 162 ; 162x^2 = 162 ; \text{OJO, muy IMPORTANTE}$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Tenemos que comprobar si las dos} \\ \text{son válidas para } y_1 : \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} 3 = \frac{-9(1)}{\sqrt{18-9}} \text{ NO } \downarrow \\ 3 = \frac{-9(-1)}{\sqrt{18-9}} \text{ SI } \end{array} \right.$$

Segunda función

$$y_2 = -\sqrt{18 - 9x^2} \Rightarrow y_2' = \frac{-(18 - 9x^2)'}{2\sqrt{18 - 9x^2}} = \frac{9x}{\sqrt{18 - 9x^2}}$$

$$\text{como } m = 3 \Rightarrow 3 = \frac{9x}{\sqrt{18 - 9x^2}} \Rightarrow 9x = 3\sqrt{18 - 9x^2}$$

$$\Rightarrow 81x^2 = 9(18 - 9x^2) ; 162x^2 = 162 ; \boxed{x = \pm 1}$$

tenemos que comprobar si valen para la ecuación del
principio $x=1 \Rightarrow \dot{3} = \frac{9 \cdot 1}{\sqrt{18-9 \cdot 1}} ?$ Si, VALE

$$x=-1 \Rightarrow \dot{3} = \frac{-9}{\sqrt{18-9}} ? \text{ NO, no vale}$$

Entonces los pto de tangencia son :

* para la curva $y_1 = + \sqrt{18-9x^2}$, $x_0 = -1$
 calculo y_0 sustituyendo en la función $\nearrow$: $\sqrt{18-9(-1)^2} = \sqrt{9} = 3$

Pto de tangencia para $y_1 \Rightarrow \boxed{(-1, 3)}$

* para la curva $y_2 = - \sqrt{18-9x^2}$, $x_0 = 1$, sustituyo
 -1 en la curva $y_2 \nearrow$ y obtengo $y_0 = -\sqrt{18-9(1)^2} = -3$

Pto de tangencia para la curva $y_2 \Rightarrow \boxed{(1, -3)}$

Rectas tangentes

$m=3$ en todos los casos

* para pto $(-1, 3) \rightarrow y-3 = 3(x+1)$
 $y-3 = 3x+3$; $\boxed{y = 3x+6}$

* para pto $(1, -3) \rightarrow y+3 = 3(x-1)$
 $y+3 = 3x-3$; $\boxed{y = 3x-6}$

Rectas normales

$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{3}$ en todos los casos.

* para pto $(-1, 3) \rightarrow y-3 = -\frac{1}{3}(x+1)$
 $y-3 = -\frac{x}{3} - \frac{1}{3}$; $\boxed{y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}}$

* para pto $(1, -3) \rightarrow y+3 = -\frac{1}{3}(x-1)$
 $y+3 = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$; $\boxed{y = -\frac{1}{3}x - \frac{8}{3}}$

Este ejercicio es válido para un FINAL pero NO
 para este parcial (no hemos tenido tiempo)
 lo haremos en clase después del parcial y antes del
 Final.

10 - Muy completo, ideal para un examen

FINAL, pero NO para este parcial porque, no hemos tenido tiempo, lo haremos en clase DESPUÉS del parcial y ANTES del final (¿se entiende?) i)

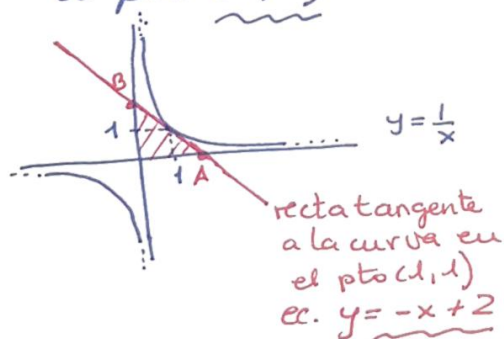
Curva $\boxed{xy=1}$ OJO! hay que despejar $y = \frac{1}{x}$

pto de abscisa $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{1} = 1$

Pto de tangencia $\boxed{(1,1)}$

No podemos el área de un triángulo, pero ANTES tendremos que poder DIBUJARLO (fundamental)

Calculamos la ec. recta tangente a la curva $y = \frac{1}{x}$ en el pto $\underline{(1,1)}$

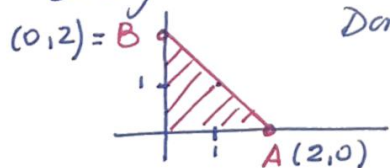


$$m = y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \Bigg|_{x_0=1} \Rightarrow m = -\frac{1}{1^2} = \boxed{-1}$$

$m = -1$, pto tangencia $(1,1)$

Ec. recta tangente $y - y_0 = m(x - x_0)$
 $y - 1 = -1(x - 1)$; $\boxed{y = -x + 2}$

Dibujamos el triángulo:



Donde A y B son los pto de corte de la recta $y = -x + 2$ con los ejes coordenados:

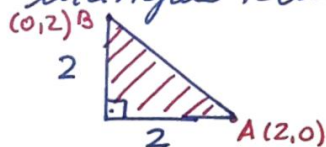
$$A \rightarrow \text{corte de } y = -x + 2 \text{ con eje } X: y = 0 \left\{ \begin{array}{l} 0 = -x + 2 \\ \boxed{x = 2} \end{array} \right.$$

$$\boxed{A = (2, 0)}$$

$$B \rightarrow \text{pto corte de } y = -x + 2 \text{ con eje } Y: x = 0 \left\{ \begin{array}{l} y = 0 + 2 \\ \boxed{y = 2} \end{array} \right.$$

$$\boxed{B = (0, 2)}$$

Así que tenemos un triángulo rectángulo de base 2 y de altura 2



$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = \boxed{2u^2}$$

Ejercicios con parámetros (tipicos ABNU)

(P.6)

(NO entran en parcial, SI entran en FINAL)

los haremos en clase después del parcial y ANTES del final,

11º Curva $y = b^2x^2 + 3x + 4$ { calcular b para que
ptos $x=1$ { las rectas tangentes a
 $x=2$ { la curva sean paralelas

Recta tangente en $x=1$ $y' = 2b^2x + 3$

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y' = 2b^2x + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow m_1 = \text{pendiente de la recta tg a } y \text{ en } x_0 = 1 = 2b^2(1) + 3 = \boxed{2b^2 + 3}$$

Recta tangente en $x=2$

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = 2 \\ y' = 2b^2x + 3 \end{array} \right\} m_2 = 2b^2(2) + 3 = \boxed{4b^2 + 3}$$

Para que ambas sean paralelas, entre sí: $\boxed{m_1 = m_2}$

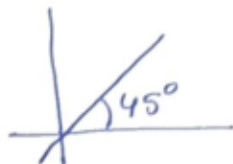
$$2b^2 + 3 = 4b^2 + 3 \quad ; \quad 2b^2 = 0 \quad ; \quad \boxed{b = 0}$$

Solución $\boxed{b = 0}$

12) Curva $y = ax^2 + bx + c$
pasa por los pto $(2, 3)$ y $(3, 13)$

↑
9º
me confundí de orden
luego hago el 12

la recta tangente a y en el pto $x_0 = 1$, es paralela a la bisectriz del primer cuadrante, es decir



$$m = \tan 45^\circ = \boxed{1} \quad \boxed{x_0 = 1} ; \quad \begin{array}{l} y' = 2ax + b \\ m = 2a(1) + b \\ 1 = 2a + b \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{l} y_0 = a(1)^2 + b(1) + c \\ y_0 = \boxed{a + b + c} \quad \text{No hace falta} \end{array} \right)$$

Utilizaremos los datos

1º que la curva $y = ax^2 + bx + c$ pase por $(2, 3)$

$$3 = a(2)^2 + b(2) + c \quad ; \quad \boxed{3 = 4a + 2b + c}$$

2º que la curva $y = ax^2 + bx + c$ pase por $(3, 13)$

$$13 = a(3)^2 + b(3) + c ;$$

$$\boxed{13 = 9a + 3b + c}$$

13) Continuación

(p.7)

Tenemos:
$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 13 \end{cases}$$

Por $m=1$ en $x_0=1 \Rightarrow 1=m=2a(1)+b \mid \Rightarrow 2a+b=1$
 $y' = 2ax + b \quad 1=m=2a+b$

Con esto formamos un SISTEMA de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 13 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{despejo } b \text{ en la } 3^{\text{a}} \text{ ecuación y sustituyo} \\ \text{en las otras dos:} \end{array} \right\} \quad b = 1 - 2a$$

$$\begin{cases} 4a + 2(1-2a) + c = 3 \\ 9a + 3(1-2a) + c = 13 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \cancel{4a} + 2 - \cancel{4a} + c = 3 \\ 9a + 3 - 6a + c = 13 \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} 2 + c = 3 \\ 3a + c = 13 - 3 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} c = 3 - 2 \\ 3a + c = 10 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{c = 1} \\ 3a = 10 - c \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 3a = 10 - 1; \\ 3a = 9 \end{array}$$

$$3a = 9 \quad ; \quad \boxed{a = 3} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} b = 1 - 2a \\ b = 1 - 2 \cdot 3 \end{array} \quad ; \quad b = 1 - 6 \quad ; \quad \boxed{b = -5}$$

Solución $\boxed{a = 3, b = -5, c = 1}$

12) Curva $y = ax^2 + bx + c$
 pasa por $(0, 3)$ y $(2, 1)$
 y en el pto $(2, 1)$ su $m = 3$

* por pasar por $(0, 3) \rightarrow 3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow \boxed{c = 3}$
 * por pasar por $(2, 1) \rightarrow 1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Rightarrow 1 = 4a + 2b + c$
 si sustituyo que $c = 3$
 $1 = 4a + 2b + 3$

$4a + 2b = -2$

$\boxed{2a + b = -1}$

* por tener $m=3$ su recta tangente en el pto $(2, 1)$

curva $y = ax^2 + bx + c$

$y' = 2ax + b$

$3 = m = f'(2) \Rightarrow$

$3 = 2a \cdot 2 + b$

$\boxed{3 = 4a + b}$

$-2a - b = 1$

$4a + b = 3$

$2a = 4 \rightarrow \boxed{a = 2}$

* junto las 2 ecuaciones

$2a + b = -1$

$4a + b = 3$

{ por reducción

$$c=3, a=2$$

$$2a+b=-1$$

$$2 \cdot 2 + b = -1; 4+b=-1; \boxed{b=-5}$$

(p.8)

$$\boxed{\text{Solución } a=2, b=-5, c=3}$$

14) Curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (4 incógnitas, necesito 4 ecuaciones)

* condición 1: pasa por $(-1, 2) \Rightarrow 2 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d$

$$\boxed{2 = -a + b - c + d}$$

* condición 2: para por $(2, 3) \Rightarrow 3 = a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d$

$$\boxed{3 = 8a + 4b + 2c + d}$$

* condición 3:

recta tangente a y en el pto $x_0=1$ paralela al eje OX

$$\left. \begin{array}{l} m=0 \\ y' = 3ax^2 + 2bx + c \\ \text{en } x=1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{0 = 3a + 2b + c}$$

* condición 4:

recta tangente a la curva y en el pto $x_0=-2$ paralela eje OX

$$\left. \begin{array}{l} m=0 \\ y' = 3ax^2 + 2bx + c \\ \text{en } x=-2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$0 = 3a(-2)^2 + 2b(-2) + c; \boxed{0 = 12a - 4b + c}$$

Juntaudo las 4 ecuaciones hacemos un sistema:

$$\begin{array}{rcl} -a + b - c + d = 2 & \xrightarrow{x(-1)} & a - b + c - d = -2 \\ 8a + 4b + 2c + d = 3 & \xrightarrow{x(-1)} & 8a + 4b + 2c + d = 3 \\ 3a + 2b + c = 0 & & \\ 12a - 4b + c = 0 & & \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \boxed{9a + 3b + 3c = 1} \end{array}$$

Así me queda un sist. de 3 ec. 3 incógnitas:

$$\begin{array}{rcl} 9a + 3b + 3c = 1 & \xrightarrow{x(-3)} & 9a + 3b + 3c = 1 \\ 3a + 2b + c = 0 & \xrightarrow{x(-3)} & -9a - 6b - 3c = 0 \\ 12a - 4b + c = 0 & & \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ -3b = 1 \rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{3}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3a + 2(-\frac{1}{3}) + c = 0 \\ 12a - 4(-\frac{1}{3}) + c = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3a + c = \frac{2}{3} \\ 12a + c = -\frac{4}{3} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} -3a - c = -\frac{2}{3} \\ 12a + c = -\frac{4}{3} \end{array} \right\}$$

$$9a = \frac{6}{3} = -2$$

$$9a = -2$$

$$\boxed{a = -\frac{2}{9}}$$

$$3a + c = \frac{2}{3}$$

$$3a - \frac{2}{3} = -c$$

$$c = -3a + \frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{3} = \frac{6}{9} + \frac{2}{3} = \frac{6+6}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{d = \frac{3}{9}}$$