

APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS PARA LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

En las siguientes funciones estudia sus características (dominio, puntos de corte, asíntotas, máximos, mínimos, curvatura etc.) y luego haz una gráfica aproximada de su gráfica según los resultados que has obtenido:

1. $f(x) = x^5 + x^3$

2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

3. $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$

4. $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

5. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$

6. $f(x) = \frac{2-x^2}{x^2-1}$

7. $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+1}$

8. $f(x) = \frac{4x^2-5x}{2x^2+7}$

9. $f(x) = \frac{x^2}{2x-3}$

10. $f(x) = \frac{x^2+3x}{x-1}$

FUNCIONES II

Aplicación de las derivadas para la representación gráfica de funciones (Boletín 1)

Nombre: SOLUCIONES Nº:

1. Dada la función $f(x) = x^5 + x^3$ estudia los siguientes puntos
- Dominio, continuidad y derivabilidad
 - Puntos de corte con los ejes
 - Asíntotas
 - ~~¿Corta la gráfica a alguna de las asíntotas?~~ NO, Simetría
 - Derivada de la función
 - Crecimiento y decrecimiento
 - Máximos y mínimos
 - Segunda derivada
 - Concavidad y convexidad, ptos de inflexión
 - Con los datos obtenidos en los apartados anteriores dibuja de forma aproximada la gráfica de la función.

- a) Dominio: es una función polinómica por tanto $D(f) = \mathbb{R}$ y continua en $\mathbb{R}$ y derivable
- b) Ptos corte:
 eje X: $x^5 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (raíz triple)} \\ x=\pm\sqrt{-1}=\pm i \notin \mathbb{R} \end{cases}$ (0,0)
 eje Y: $0^5 + 0^3 = 0 \Rightarrow$ único pto de corte (0,0)
- c) horizontales $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 + x^3 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 + x^3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^5 - x^3 = -\infty$
no hay asíntotas horizontales, si hay 2 ramas parabólicas o ∞
verticales: ¿ $\exists$ "a" tal que $\lim_{x \rightarrow a} x^5 + x^3 = \pm \infty$? NO, no hay asíntotas verticales (no hay pto. cte. No dominio)
oblicuas: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^5 + x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 + x^2 = \infty$
No hay asíntotas oblicuas
- d) $f(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 = -x^5 - x^3 = -f(x)$ Simetría IMPAR
la gráfica es simétrica con respecto al (0,0)
- e) $f'(x) = (x^5 + x^3)' = 5x^4 + 3x^2$
- f) $f'(x) = 0 \Rightarrow 5x^4 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(5x^2 + 3) = 0$
 $x=0$ (doble) x=0 (doble)
 $x=\pm\sqrt{-\frac{3}{5}} \notin \mathbb{R}$
- en x=0 $\rightarrow$ pto. crítico.
 $f'(x)=0$, miramos el signo de f' a la dcha e izda del 0
- * si $x < 0 \Rightarrow f'(x) = x^2(5x^2 + 3) > 0$ crece
 * si $x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ crece
- g) no hay máximos ni mínimos ya que la función es creciente en todo $\mathbb{R}$. También podemos verlo haciendo $f''(x) = 20x^3 + 6x$; $f''(0) = 0$ No es extremo relativo.

h) $f''(x) = (5x^4 + 3x^2)' = \boxed{20x^3 + 6x} = 2x(10x^2 + 3)$ (2)

i) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(10x^2 + 3) = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{x=0} \\ x = \pm \sqrt{-\frac{3}{10}} = \pm \sqrt{\frac{3}{10}} i \notin \mathbb{R} \end{array} \right.$
 $f'''(x) = 60x^2 + 6$; $f'''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

* En el pto $\boxed{x=0}$ la función tiene un pto de inflexión. $f'''(0) = 6 \neq 0$

* Estudiamos concavidad y convexidad para ello miramos el signo de f'' a la drcha e izqda del $x=0$ $f''(x) = 2x(10x^2 + 3)$

• Si $x < 0 \Rightarrow$ p.ejemplo $x = -1$
 $2(-1)(10 \cdot (-1)^2 + 3) < 0 \quad \left\} \Rightarrow f''(x) < 0 \quad \underline{\text{CONCAVA}} \quad \cap$

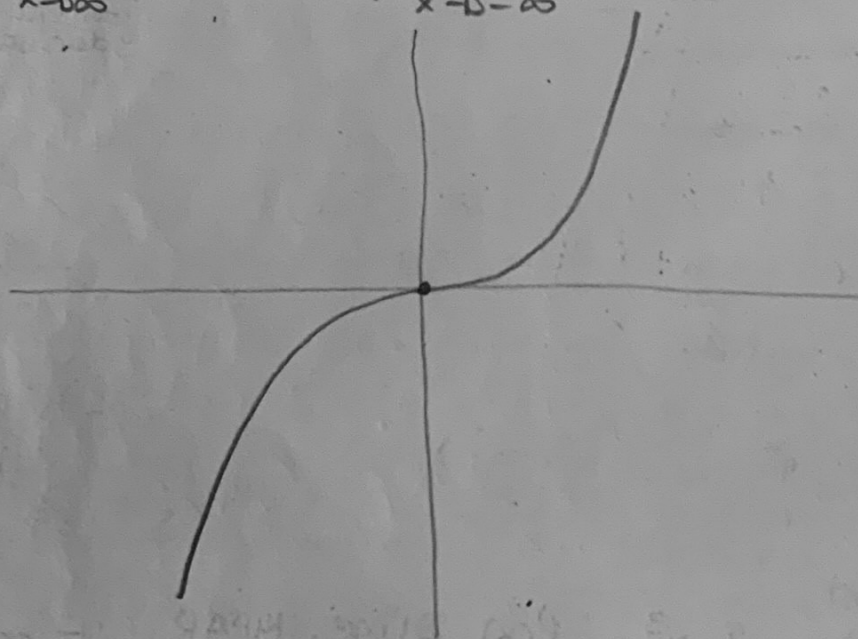
• Si $x > 0 \Rightarrow$ p.ejemplo $x = 1$
 $2 \cdot 1(10 \cdot 1 + 3) > 0 \quad \left\} \Rightarrow f''(x) > 0 \quad \underline{\text{CONVEXA}} \quad \cup$

Resumen para el dibujo:

d) $(0,0)$ pto de corte y también pto de inflexión.
 f creciente en todo $\mathbb{R}$, cont. derivable, simetría IMPAR

$\cap$ en $(-\infty, 0)$ y $\cup$ en $(0, +\infty)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (ramas parabólicas)



2. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ estudia los siguientes puntos

- Dominio, continuidad, derivabilidad
- Puntos de corte con los ejes
- Asíntotas
- ¿Corta la gráfica a alguna de las asíntotas? ~~NO~~, Simetría
- Derivada de la función
- Crecimiento y decrecimiento
- Máximos y mínimos
- Segunda derivada
- Concavidad y convexidad y pto de inflexión
- Con los datos obtenidos en los apartados anteriores dibuja de forma aproximada la gráfica de la función.

a) $f(x)$ es una función polinómica $\Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$ y es continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable

b) eje x : $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$; Ruffini.

$$x^2 - 2x - 2 = 0; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-2)}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}$$

$$x_1 = 1 \quad (1, 0)$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73$$

$$x_3 = 1 - \sqrt{3} \approx -0.73$$

$$(1, 0), (2.73, 0), (-0.73, 0)$$

eje y : $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 = 2 \Rightarrow (0, 2)$

c) Asíntotas

* horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^3 - 3x^2 + 2 = \pm \infty$ (no hay asíntota, es una rama parabólica infinita)
 $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(-x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} -x^3 - 3x^2 + 2 = \mp \infty$ (no hay asíntota, es otra rama parabólica infinita)

* verticales: ¿ $\exists$ pto. tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$? NO, no hay asíntotas verticales (no hay pto. de no dominio)

* oblicuas: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x} = \pm \infty \Rightarrow$ no hay asíntotas oblicuas

d) Ni par, ni impar, hay una simetría con respecto al pto de inflexión, se ve en la gráfica

e) $f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2)' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

f) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ posibles máximos y/o mínimos pto críticos

$$f''(x) = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6$$

$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow x = 0$ Máximo relativo $(0, 2)$

para $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 = 2$

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 12 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow (2, -2)$ es mínimo relativo

además $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2 < 0$

también se puede ver que

$f'(x) > 0$

Drda 0 e izqda $\nearrow$ 0 $\searrow$ 2
Drda 2

$$f'(x) = (3x^2 - 6x) = \boxed{6x - 6} = \boxed{6(x-1)}$$

i) Ptos de inflexión: $6(x-1) = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$ Pto de inflexión
estudiamos los signos de f'' a la izquierda y derecha de $x=1$ para conocer la concavidad y convexidad.

• Si $x < 1 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ CONCAVA $\cap$

• Si $x > 1 \Rightarrow f''(x) = 6(x-1) > 0 \Rightarrow$ CONVEXA $\cup$

j) Recopilamos la información f cont y derivable

Ptos de corte: $\underline{(1,0)}$, $(2.73, 0)$, $(-0.73, 0)$, $(0,2)$

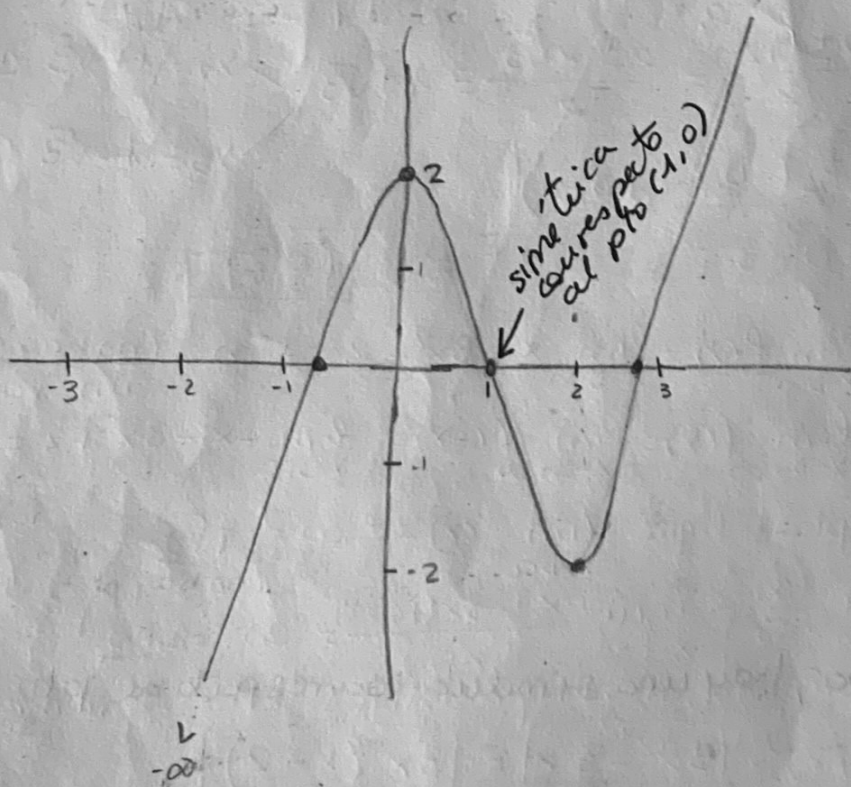
MÁXIMO en $x=0$; $f(0)=2 \Rightarrow \boxed{(0,2)}$ máximo

MÍNIMO en $x=2$; $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2 \Rightarrow \boxed{(2,-2)}$ mínimo

f creciente en $(-\infty, 0)$ y $(2, +\infty)$

f decreciente en $(0, 2)$

en $(1,0)$ Pto de inflexión; a su izquierda es $\cap$ y a su derecha es $\cup$
y tiene 2 ramas parabólicas, simétrica con respecto a ese pto.



3. Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$ estudia los siguientes puntos

- Dominio, continuidad, derivabilidad
- Puntos de corte con los ejes
- Asíntotas
- ¿Corta la gráfica a alguna de las asíntotas? NO, simétrica
- Derivada de la función
- Crecimiento y decrecimiento
- Máximos y mínimos
- Segunda derivada
- Concavidad y convexidad, pto de inflexión
- Con los datos obtenidos en los apartados anteriores dibuja de forma aproximada la gráfica de la función.

a) es una fracción algebraica, su dominio será $\mathbb{R}$ menos los pto que anulen el denominador.

$$2x-3=0; \quad 2x=3; \quad \boxed{x=\frac{3}{2}}$$

$$D(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\} \quad \text{continua y derivable en su dominio.}$$

b) Ptos corte; $\frac{x+1}{2x-3} = 0 \Rightarrow x+1=0; \quad \boxed{x=-1}$ pto $\boxed{(-1, 0)}$

eje y: $\frac{0+1}{0-3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow$ pto $\boxed{(0, -\frac{1}{3})}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x-3} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+1}{-2x-3} = \frac{1}{2}$

tiene una asíntota horizontal en $\boxed{y = \frac{1}{2}}$ tanto cuando $x \rightarrow +\infty$ como $x \rightarrow -\infty$

vertical pto. de no dominio $x = \frac{3}{2}$
 $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{x+1}{2x-3} = \frac{\frac{3}{2}+1}{0} = \pm \infty$ tenemos que mirar el límite a la derecha y a la izquierda del $\frac{3}{2}$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} \frac{x+1}{2x-3} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} \frac{x+1}{2x-3} &= +\infty \end{aligned} \right\}$$

tiene una asíntota vertical en $x = \frac{3}{2}$ a su izquierda $\rightarrow -\infty$, a su derecha $\rightarrow +\infty$

oblicua (no va a tener pendiente lo vemos)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x+1}{2x-3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x^2-3x} = 0 \quad \text{No tiene}$$

d) $f(-x) = \frac{-x+1}{-2x-3} \neq \frac{-x-1}{2x-3}$ ni par, ni impar, es una hipérbola, es simétrica con respecto al pto $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

e) $\left(\frac{x+1}{2x-3} \right)' = \frac{2x-3 - (x+1)2}{(2x-3)^2} = \frac{2x-3-2x-2}{(2x-3)^2} = \frac{-5}{(2x-3)^2}$

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \text{Dom } f \Rightarrow$ decreciente en todo su dominio

$$(2x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

No hay extremos relativos

$$h) f''(x) = \left(\frac{-5}{(2x-3)^2} \right)' = \frac{-(-5) \cdot 2(2x-3) \cdot 2}{(2x-3)^4} = \frac{20(2x-3)}{(2x-3)^4} = \frac{20}{(2x-3)^3}$$

i) No hay pts de inflexión porque ningún pto anula a $f''(x)$

$$\nexists \text{ pto tal que (t.q.) } \frac{20}{(2x-3)^3} = 0$$

importante

Signos de la f'' miramos a la dcha y a la izqda de su asíntota vertical ($x = \frac{3}{2}$) es decir, estudiamos la curvatura en cada una de sus dos ramas infinitas por separado

$$* \text{ si } x < \frac{3}{2} \Rightarrow \text{p.ejemplo } 1.4 \Rightarrow f''(1.4) < 0$$

$$\Rightarrow f''(x) < 0 \text{ cóncava}$$

$$+ \text{ si } x > \frac{3}{2} \Rightarrow \text{por ejemplo } 1.6 \Rightarrow f''(1.6) > 0$$

$$\Rightarrow f''(x) > 0 \text{ cóncava}$$

no existen pts de inflexión ya que $\frac{3}{2} \notin D(f)$

j) recopilamos información: 1) $D(f) = \mathbb{R} - \{ \frac{3}{2} \}$

2) $(-1, 0), (0, -\frac{1}{3})$ pts de corte

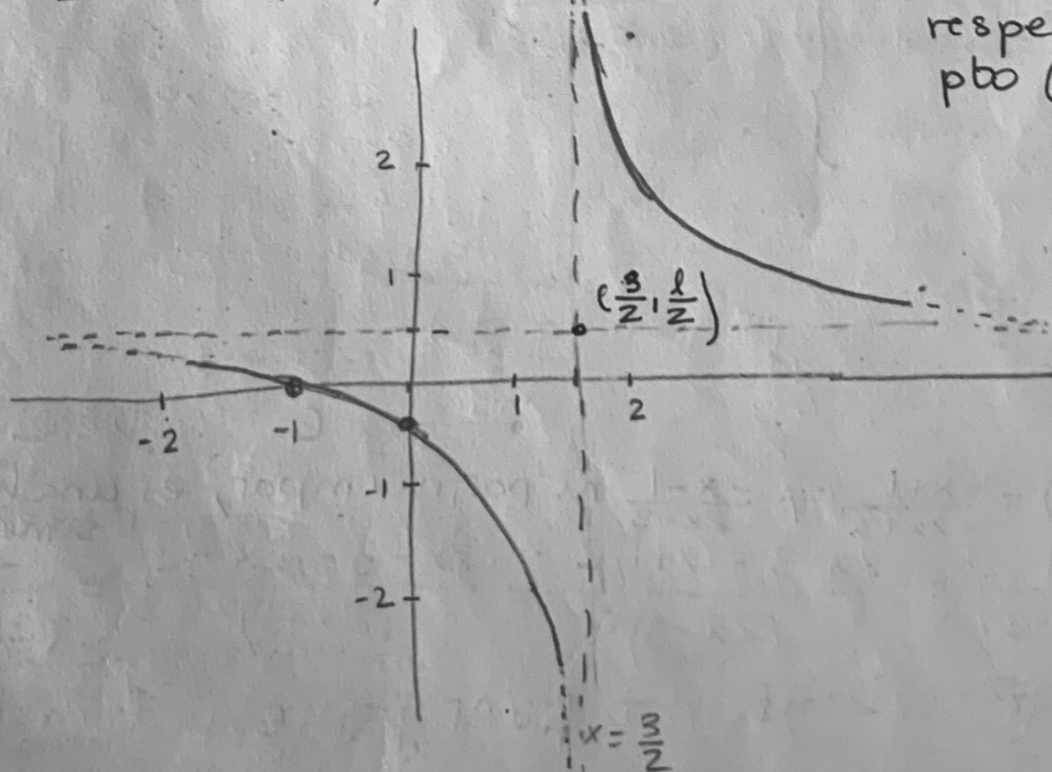
3) $y = \frac{1}{2} \Rightarrow$ asíntota horizontal, tanto en $\rightarrow +\infty$ como $\rightarrow -\infty$

4) $x = \frac{3}{2} \Rightarrow$ asíntota vertical $\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{3}{2}^- \Rightarrow \lim = -\infty \\ x \rightarrow \frac{3}{2}^+ \Rightarrow \lim = +\infty \end{array} \right.$

5) f decreciente en todo el Dominio

6) si $x < \frac{3}{2} \Rightarrow$  ; si $x > \frac{3}{2} \Rightarrow$ 

simétrica con respecto al pto $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$



4. Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$ estudia los siguientes puntos

- Dominio, continuidad y derivabilidad
- Puntos de corte con los ejes
- Asíntotas
- ¿Corta la gráfica a alguna de las asíntotas? *simetría*
- Derivada de la función
- Crecimiento y decrecimiento
- Máximos y mínimos
- Segunda derivada
- Concavidad y convexidad, pto de inflexión
- Con los datos obtenidos en los apartados anteriores dibuja de forma aproximada la gráfica de la función.

a) Es una fracción algebraica, su dominio será todo $\mathbb{R}$ menos los pto que anulan el denominador: $x^2 = 0$; $\boxed{x=0}$ $\Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, en su dominio es continua y derivable

b) Ptos de corte

• eje X: $\frac{x+1}{x^2} = 0 \Rightarrow x+1=0 \Leftrightarrow \boxed{x=-1}$ $\boxed{(-1,0)}$

• eje Y: para estudiar pto de corte $f(0) = ?$ pero $0 \notin D(f)$, no hay pto de corte con el eje Y

c) Asíntotas

• horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2} = 0$ Asíntota horizontal en $\boxed{y=0}$

• verticales: buscamos un pto que haga que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ (pto de No dominio)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2} = \pm\infty$ tenemos que estudiar los límites laterales

• a la dcha del 0 $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x^2} = +\infty$ $\left(\frac{+}{+} = +\right)$

• a la izqda del 0 $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x^2} = +\infty$ $\left(\frac{-}{+} = -\right)$

Asíntota vertical en $\boxed{x=0}$ tanto a dcha. como a la izqda.

• Asíntota oblicua $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x+1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^3} = 0$, no hay oblicuas ($m=0$)

d) $f(-x) = -\frac{x+1}{x^2} \neq f(x)$ y $\neq f(-x)$ ni par, ni impar

e) $f'(x) = \frac{1(x^2) - (x+1)2x}{x^4} = \frac{x^2 - 2x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-x^2 - 2x}{x^4} = \boxed{-\frac{x+2}{x^3}}$
 f) g) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x+2}{x^3} = 0 \Rightarrow \uparrow \begin{matrix} x \neq 0 \\ -(x+2) = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow -x-2=0 \Leftrightarrow -x=2 \Leftrightarrow \boxed{x=-2}$

Para estudiar el signo de la 1ª derivada tenemos que mirar a los lados de los pto. conflictivos: $\underline{x=-2}$ y $\underline{x=0}$ el -2 por que es un pto crítico y el 0 por que tiene una

$f'(x) = \frac{-x-2}{x^3}$
 $f'(-3) < 0$ f DECRECE $(-\infty, -2)$
 $f'(-1) > 0$ f CRECE $(-2, 0)$
 $f'(1) < 0$ f DECRECE $(0, +\infty)$

Calculamos el valor de $f(-2) = \frac{-2+1}{(-2)^2} = \frac{-1}{4}$ (-2, -1/4) 7

también podíamos haberlo comprobado con $f'(x)$

h) $f''(x) = \left(\frac{-x-2}{x^3} \right)' = \frac{-1(x^3) - (-x-2)3x^2}{x^6} = \frac{-x^3 + 3x^3 + 6x^2}{x^6} = \frac{2x^3 + 6x^2}{x^6} = \frac{2x^2(x+3)}{x^6} = \frac{2(x+3)}{x^4}$

i) buscamos primero los pts de inflexión: $f''(x) = \frac{2(x+3)}{x^4} = 0 \Rightarrow x+3=0$
 $\Rightarrow \boxed{x = -3}$ $x \neq 0$ ($0 \notin D(f)$)

calculamos $f(-3) = \frac{(-3)+1}{(-3)^2} = \frac{-2}{9}$ ($f(x) = \frac{x+1}{x^2}$)

$\Rightarrow \boxed{(-3, -\frac{2}{9})}$ pto. de inflexión esto lo hacemos para saber el pto (x,y) de la gráfica

para estudiar la concavidad/convexidad miramos los cambios de signo de $f''(x) = \frac{2(x+3)}{x^4}$, teniendo en cuenta los ptos. de conflicto $x = -3$ y $x = 0$



$f''(-4) = \frac{+}{+} = + < 0$ f cóncava $\cap$ $(-\infty, -3)$
 $f''(-1) = \frac{+}{+} = + > 0$ f convexa $\cup$ $(-3, 0)$
 $f''(1) = \frac{+}{+} = + > 0$ f convexa $\cup$ $(0, +\infty)$

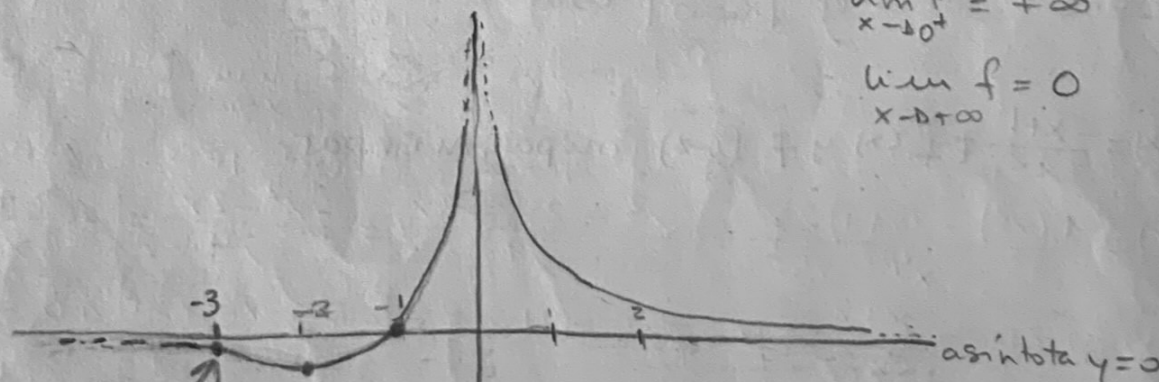
h) Recopilamos datos y hacemos la gráfica

$0 \notin D(f)$ (salto infinito) $0^+ \nearrow \infty$ $0^- \nearrow \infty$ f decrece $(-\infty, -2)$
 $(-1, 0)$ pto de corte f crece $(-2, 0)$
 $x=0$ Asintota vertical f decrece $(0, +\infty)$
 $y=0$ Asintota horizontal

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f = +\infty$

$(-2, -\frac{1}{4})$ MINIMO

$(-3, -\frac{2}{9})$ pto de inflexión $\Rightarrow$ (pasa de convexa a cóncava)



No es fácil de apreciar a simple vista pero, aquí hay un cambio de curvatura, se puede ver en geogebra

No tiene simetría ni par, ni impar, ni con respecto a un pto ni a una recta

5. Dada la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$ estudia los siguientes puntos

- Dominio
- Puntos de corte con los ejes
- Asíntotas
- ¿Corta la gráfica a alguna de las asíntotas? **NO** **Simétrica**
- Derivada de la función
- Crecimiento y decrecimiento
- Máximos y mínimos
- Segunda derivada
- Concavidad y convexidad, **ptos de inflexión**
- Con los datos obtenidos en los apartados anteriores dibuja de forma aproximada la gráfica de la función.

a) Fracción algebraica, su dominio es todo $\mathbb{R}$ menos los pto. que anulan el denominador
 $x^2=0 \Leftrightarrow \boxed{x=0} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ f cont y derivable en $\text{Dom } f$

b) eje X: $\frac{x^2+1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2+1=0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{-1} = \pm i \notin \mathbb{R}$ **NO CORTA EL EJE X**
 $x \neq 0, 0 \notin D(f)$

eje Y: $f(0)$, p.q. $0 \notin \text{Dom } f \Rightarrow$ **NO CORTA EL EJE Y**

c) Asíntotas H: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = \frac{x^2+1}{x^2} = 1$

Asíntota horizontal en $y=1$ tanto en $+\infty$ como en $-\infty$

* asíntota V: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pm \infty$ $\Rightarrow$ tomamos el pto $x=0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{1}{0}$ indet
 pto. de No dominio
 comprobamos los límites laterales: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty$
 como $x^2+1 > 0$ y $x^2 > 0$ siempre
 (un $x \neq 0$)

tenemos asíntota vertical en $x=0$ tanto a la dcha. como a la izqda de 0

* oblicuas: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^3} = 0$ No hay asínt. oblicua
 (ya sabíamos que no podía haberlas)

d) Simetría. $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2} = \frac{x^2+1}{x^2} = f(x)$

PAR, por tanto su gráfica será simétrica con respecto al eje **Y**

e) $f'(x) = \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)' = \frac{2x \cdot x^2 - 2x(x^2+1)}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 - 2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = \boxed{\frac{-2}{x^3}}$

f) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{x^3} = 0$; $\nexists x \in \mathbb{R}$ que cumpla esa condición, la

función no va a tener máximos ni mínimos
 f) $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$ $\nearrow f'(x) > 0$ **CRECIENTE** si $x < 0$ $\nwarrow$ **miramos el signo de la derivada a la izqda y**
 $\searrow f'(x) < 0$ **DECRECIENTE** si $x > 0$

$$h) f'(x) = \left(\frac{-2}{x^3} \right)' = \frac{0 \cdot x^3 - (-2) \cdot 3x^2}{x^6} = + \frac{6x^2}{x^6} = \boxed{\frac{6}{x^4}}$$

10

i) $f''(x) = \frac{6}{x^4} > 0$ $\downarrow$ SIEMPRE $\Rightarrow$ la función $f(x)$ es CONCAVA en todo su dominio y no tiene ptos de inflexión. $\cup$

j) Recopilando la información:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2} > 0$$

toma siempre valores positivos

- * $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ (la función se dividirá en 2 ramas, una alargada y otra a la derecha del 0)
- * No corta ni el eje x ni el eje y
- * Asintota horizontal $y=1$
- * Asintota vertical $x=0$

* en $(-\infty, 0)$ CRECE $\left\{ \begin{array}{l} \text{no hay máx. ni mínimos} \end{array} \right.$

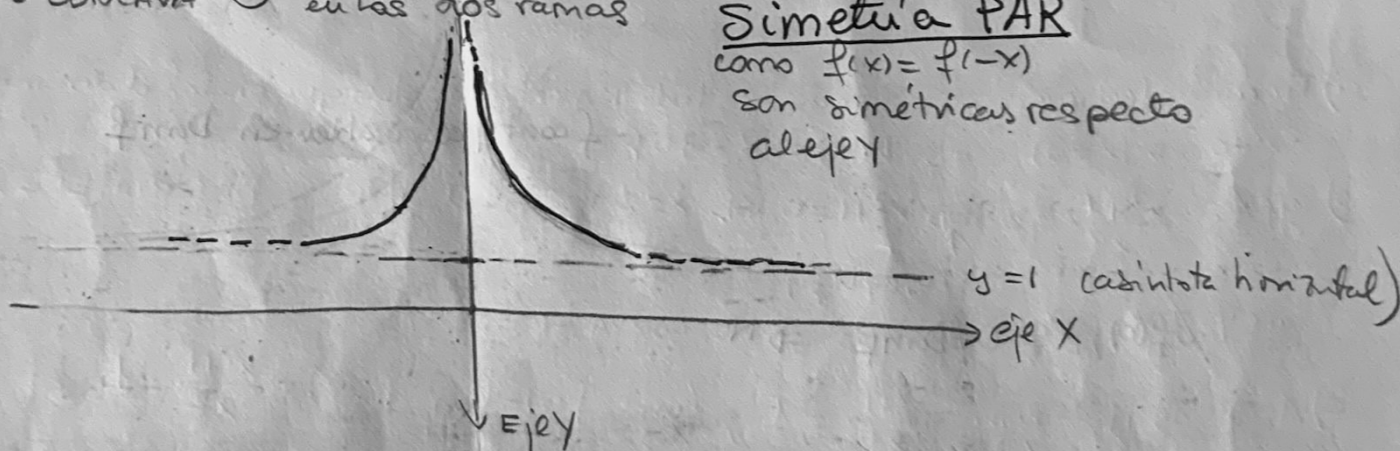
* en $(0, +\infty)$ DECRECE

* es CONCAVA $\cup$ en las dos ramas

Simetría PAR

como $f(x) = f(-x)$

son simétricas respecto al eje y



6. Dada la función $f(x) = \frac{2-x^2}{x^2-1}$ estudia los siguientes puntos

a. Dominio, continuidad, derivabilidad

b. Puntos de corte con los ejes

c. Asíntotas

d. ¿Corta la gráfica a alguna de las asíntotas?

e. Derivada de la función

f. Crecimiento y decrecimiento

g. Máximos y mínimos

h. Segunda derivada

i. Estudia la concavidad y convexidad de cada una de las tres ramas de la gráfica.

j. Con los datos obtenidos en los apartados anteriores dibuja de forma aproximada la gráfica de la función.

NO / simétricas
d) simetría, se puede comprobar que es par

Y gráficamente se puede ver que es simétrica con respecto al eje Y (0, -1) además de ser simétrica con respecto al eje Y

a) fracción algebraica, su dominio $\mathbb{R}$ menos los ptes que anulan el denominador.

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

$$D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

(Va a tener 3 ramas) y continua derivable en su dominio

b) ptes. de corte eje X: $\frac{2-x^2}{x^2-1}=0 \Rightarrow 2-x^2=0 \Leftrightarrow 2=x^2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

$x \neq \pm 1$ (no están en el dominio)

$$\begin{matrix} (\sqrt{2}, 0) \\ (-\sqrt{2}, 0) \end{matrix}$$

eje Y: $f(0) = \frac{2-0^2}{0^2-1} = \frac{2}{-1} = -2 \Leftrightarrow (0, -2)$

c) horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2-x^2}{x^2-1} = -1 \quad |y=-1|$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = \frac{2-(-x)^2}{(-x)^2-1} = -1$$

verticales ptes. de conflicto son +1 y -1

Si $x=1$: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2+2}{x^2-1} = \frac{-1+2}{1-1} = \frac{1}{0}$; tenemos que mirar los límites laterales:

laterales:

$x=1$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2-x^2}{x^2-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2-x^2}{x^2-1} = +\infty \end{cases}$$

(miramos el signo en un pto. próximo a 1 p.ej. 0'9 $\rightarrow f(0'9) = \frac{2-(0'9)^2}{(0'9)^2-1} = \frac{+}{-} = -$)
(miramos el signo de f en un pto próximo a 1 por su drcha, por ejemplo 1'1 $\rightarrow f(1'1) = \frac{2-(1'1)^2}{(1'1)^2-1} = \frac{+}{+} = +$)

$x=-1$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2-x^2}{x^2-1} = \frac{1}{0} \text{ indet.} \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2-x^2}{x^2-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2-x^2}{x^2-1} = -\infty \end{cases}$$

(miramos valores próximos a -1 por la izqda p.ej. -1'1 $\rightarrow f(-1'1) = \frac{2-(-1'1)^2}{(-1'1)^2-1} = \frac{+}{+} = +$)
(miramos valores de f próximos a -1 por su drcha, por ejemplo -0'9 $\rightarrow f(-0'9) = \frac{2-(-0'9)^2}{(-0'9)^2-1} = \frac{+}{-} = -$)

$$f(x) = \frac{2-x^2}{x^2-1} ; f(-x) = \frac{2-(-x)^2}{(-x)^2-1} = \frac{2-x^2}{x^2-1} = f(x)$$

por tanto f es PAR y por ello simétrica con respecto al eje Y.

(a mayores, se podía añadir, aunque no es necesario, que la función es simétrica con respecto al pto (0, -1) pero eso es algo que sólo podéis comprobar gráficamente)

$$e) f'(x) = \left(\frac{2-x^2}{x^2-1} \right)' = \frac{-2x(x^2-1) - (2-x^2)(2x)}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{-2x^3 + 2x - 4x + 2x^3}{(x^2-1)^2} = \boxed{\frac{-2x}{(x^2-1)^2}}$$

g) $f'(x) = 0 ; \frac{-2x}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$ pto. crítico.
 como $\pm 1 \notin D(f)$ posible máximo o mínimo

f) estudiamos el signo de $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$, tenemos que ver lo que ocurre a dcha e izqda del pto. crítico y también de los pto. que determinan las A.V. (ptos de no dominio) $\oplus \quad -1 \quad \oplus \quad 0 \quad \ominus \quad 1 \quad \ominus$
 aquí ya se ve que en $x=0$ tiene f' un máximo relativo
 calculo $f(0) = \frac{2}{-1} = -2$ así que (0, -2) es un máximo relativo de f .

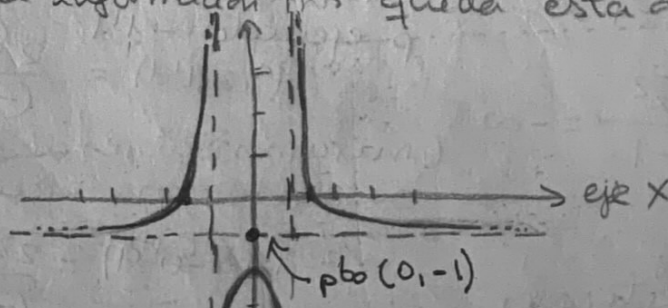
h) $f''(x) = \left(\frac{-2x}{(x^2-1)^2} \right)' = \frac{-2(x^2-1)^2 - (-2x)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{-2(x^2-1) + 8x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{-2x^2 + 2 + 8x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{6x^2 + 2}{(x^2-1)^3}$

i) $f''(x) = 0 ; \frac{6x^2 + 2}{(x^2-1)^3} = 0 \Rightarrow 6x^2 + 2 = 0 ; 6x^2 = -2 ; x^2 = -\frac{2}{6} ; x = \pm \sqrt{-\frac{1}{3}} \notin \mathbb{R}$
 $\Rightarrow$ **NO HAY** pto. de inflexión. $\pm 1 \notin D(f)$ además $f''(0) = -2 < 0$ por tanto en $x=0$ MAX. relat. aunque ya lo sabemos (cada una de las 3 ramas va a mantener su curvatura)

curvatura: estudiamos el signo de $f''(x)$ en cada rama, diferenciadas en los pto. -1 y 1 que no están en el dominio y en las que la función tiene además asíntotas verticales: $f'' < 0 \ominus$, $f'' > 0 \oplus$, $f'' = 0$

$\Rightarrow (-\infty, -1) \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ convexa $f''(-2) = \frac{+}{+} = +$
 $(-1, 1) \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ cóncava $f''(0) = \frac{+}{-} = -$
 $(1, +\infty) \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ convexa $f''(2) = \frac{+}{+} = +$

f) recopilando toda la información nos queda esta gráfica:



7. Dada la función $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+1}$ estudia los siguientes puntos

- Dominio, *continuidad, derivabilidad*
- Puntos de corte con los ejes
- Asíntotas
- ¿Corta la gráfica a alguna de las asíntotas? *Simetrías*
- Derivada de la función
- Crecimiento y decrecimiento
- Máximos y mínimos
- Con los datos obtenidos en los apartados anteriores dibuja de forma aproximada la gráfica de la función.

a) Fracción algebraica, su dominio es todo $\mathbb{R}$ salvo los pto. que anulen el denominador: $x^2+1=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-1}=\pm i \notin \mathbb{R}$, por tanto $D(f)=\mathbb{R}$ *y continua y derivable en todo $\mathbb{R}$*

b) eje x: $\frac{x^2-x}{x^2+1}=0 \Rightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0$
 $x=0$, pto. $(0,0)$
 $x=1$, pto. $(1,0)$
 $x^2+1 > 0$ siempre (en $\mathbb{R}$)

eje y: $f(0) = \frac{0}{1} = 0$ (ya estaba calculado, es el pto $(0,0)$)

c) horizontales: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-x}{x^2+1} = 1$, asíntota horizontal en $y=1$ cuando $x \rightarrow +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+x}{x^2+1} = 1$, asínt. horz. $y=1$ cuando $x \rightarrow -\infty$

verticales: ¿Pto a tq $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-x}{x^2+1} = \pm \infty$? No, porque $x^2+1 > 0$ siempre
oblicuas: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2-x}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-x}{x^3+x} = 0 \Rightarrow$ No hay ($m=0$)
 $Dom f = \mathbb{R}$, no hay pto de no dominio

d) $f(-x) = \frac{(-x)^2-(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{x^2+x}{x^2+1} \neq -f(x)$ y $\neq f(x)$, no es ni par ni impar

Curiosidad esta gráfica tiene un pto. que corta a la A.H. (en el $(-1,1)$)
 recordemos que la A.H. ejerce su "influencia" en los límites $\pm \infty$, pero no en el centro de la función

e) $f'(x) = \left(\frac{x^2-x}{x^2+1} \right)' = \frac{(2x-1)(x^2+1) - (x^2-x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-x^3-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^3-2x^2+x-1}{(x^2+1)^2}$
 $= \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$

g) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(-1)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$
 $x_1 = -1+\sqrt{2} \approx 0.41$
 $x_2 = -1-\sqrt{2} \approx -2.41$
ptos críticos posibles, máximos o mínimos

f) miramos el signo de $f'(x)$ entre esos valores:

$f' > 0 \nearrow$ $f' < 0 \searrow$ $f' > 0 \nearrow$
 $-1-\sqrt{2} \approx -2.41$ $-1+\sqrt{2} \approx 0.41$
 $f'(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$
 $f'(-3) = \frac{9-6-1}{100} = \frac{2}{100} = +$ CRECIENTE
 $f'(0) = \frac{0+0-1}{1} = -$ DECRECIENTE
 $f'(1) = \frac{1+2-1}{1} = +$ CRECIENTE

* Si $x = -1 + \sqrt{2} \approx 0.41$; $f(-1 + \sqrt{2}) \approx f(0.41) = \frac{0.41^2 - 0.41}{0.41^2 + 1} \approx -0.2071$

f tiene un máximo relativo en $(0.41, -0.207)$ (aprox.)
comprobaríamos que era máximo utilizando la 1ª derivada pero también lo podríamos haber comprobado con la 2ª derivada:

$$f''(x) = \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{(x^2 + 1)^2} \right)' = \frac{2(-x^3 - 3x^2 + 3x + 1)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{-2(x-1)(x^2 + 4x + 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(-1 + \sqrt{2}) \approx f''(0.41) > 0 \Rightarrow x = -1 + \sqrt{2} \text{ Mínimo relativo.}$$

* Si $x = -1 - \sqrt{2} \approx -2.41 \Rightarrow f(-2.41) = \frac{(-2.41)^2 - (-2.41)}{(-2.41)^2 + 1} \approx 1.2071$

ya habíamos comprobado que era un máx. relativo (criterio 1ª derivada) pero si quisiéramos podríamos haberlo comprobado por la segunda derivada:

$$f''(-2.41) < 0 \Rightarrow -2.41 \text{ tiene un máximo relativo.}$$

Curvatura $f''(x) = \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{(x^2 + 1)^2} \right)' = \frac{(2x + 2)(x^2 + 1)^2 - (x^2 + 2x - 1)2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4}$

$$= \frac{(x^2 + 1)((2x + 2)(x^2 + 1) - (x^2 + 2x - 1)4x)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2x^3 + 2x + 2x^2 + 2 - 4x^3 - 8x^2 + 4x}{(x^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{-2x^3 - 6x^2 + 6x + 2}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2(-x^3 - 3x^2 + 3x + 1)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2(x-1)(-x^2 - 4x - 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

Ptos de inflexión: $\begin{cases} x = 1; f(1) = 0 & (1, 0) \\ x = -2 + \sqrt{3} \approx -0.2679 & \text{aprox.} \\ x = -2 - \sqrt{3} \approx -3.7321 & \text{aprox.} \end{cases}$

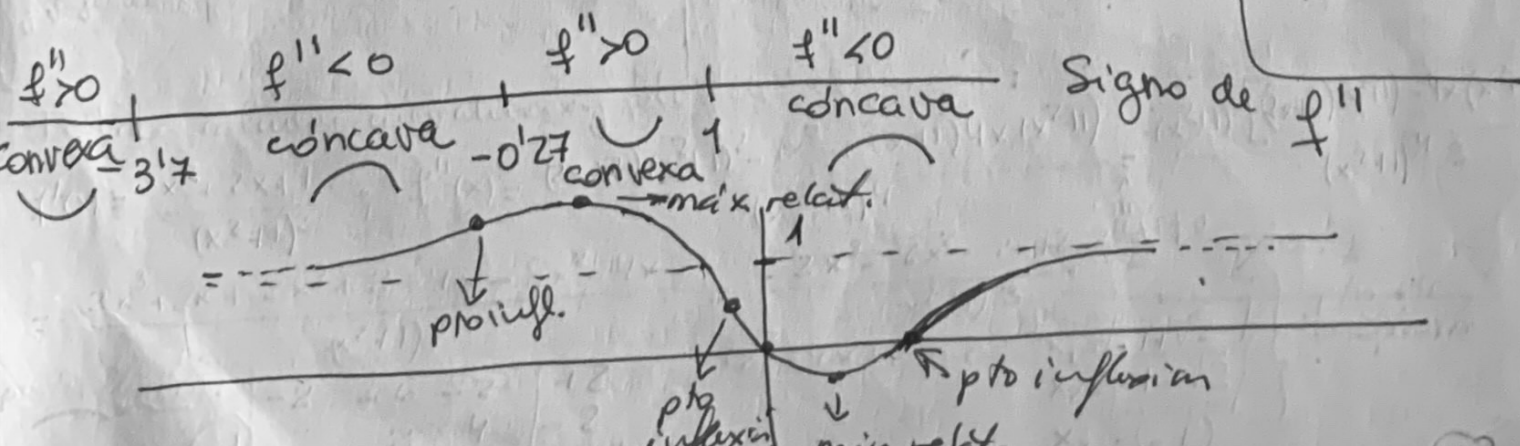
• para $x = -2 + \sqrt{3} \approx -0.26795 \rightarrow f(-2 + \sqrt{3}) \approx f(-0.268) = 0.31960$
 • para $x = -2 - \sqrt{3} \approx -3.7321 \rightarrow f(-2 - \sqrt{3}) \approx f(-3.732) \approx 1.183$

Ptos de inflexión $(1, 0), (-0.27, 0.3), (-3.7, 1.2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & -3 & +3 & 1 \\ & -1 & -4 & -1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & -4 & -1 & 0 \end{array}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{-2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{-2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{-2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

menor



8. Dada la función $f(x) = \frac{4x^2 - 5x}{2x^2 + 7}$ estudia los siguientes puntos

- Dominio, *continuidad, derivabilidad*
- Puntos de corte con los ejes
- Asíntotas
- ~~¿Corta la gráfica a alguna de las asíntotas?~~ NO, *Simetrías*
- Derivada de la función
- Crecimiento y decrecimiento
- Máximos y mínimos
- Con los datos obtenidos en los apartados anteriores dibuja de forma aproximada la gráfica de la función.

a) Es una fracción algebraica $\Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$ - pts que anulan el denominador.

$$2x^2 + 7 = 0 \Rightarrow 2x^2 = -7 \Rightarrow x^2 = -\frac{7}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{7}{2}} \notin \mathbb{R}, \text{ por tanto } D(f) = \mathbb{R}$$

cont. y deriv. todo $\mathbb{R}$

b) Pto corte eje X: $\frac{4x^2 - 5x}{2x^2 + 7} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(4x - 5) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow \boxed{\text{pto } (0,0)} \\ x=\frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{\text{pto } (\frac{5}{4}, 0)} \end{cases}$
 como $2x^2 + 7 > 0$ en $\mathbb{R}$

eje Y: $f(0) = \frac{0-0}{0+7} = 0$, pto $(0,0)$ (ya lo teníamos)

c) Horizontales: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5x}{2x^2 + 7} = \frac{4}{2} = 2$; $\boxed{y=2}$ asíntota horizontal
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 5x}{2x^2 + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x}{2x^2 + 7} = 2$

* Verticales: ¿ $\exists$ pto. a t.g. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$? No, porque $2x^2 + 7 > 0$ en todo $\mathbb{R}$.
 No hay

* Oblicuas: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2 - 5x}{2x^2 + 7}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5x}{2x^3 + 7x} = 0$ No hay

d) $f(-x) = \frac{4(-x)^2 - 5(-x)}{2(-x)^2 + 7} = \frac{4x^2 + 5x}{2x^2 + 7} \neq -f(x) \neq f(x)$ no es ni par ni impar

e) $f'(x) = \left(\frac{4x^2 - 5x}{2x^2 + 7} \right)' = \frac{(8x - 5)(2x^2 + 7) - 4x(4x^2 - 5x)}{(2x^2 + 7)^2} =$
 $= \frac{16x^3 + 56x - 10x^2 - 35 - 16x^3 + 20x^2}{(2x^2 + 7)^2} = \boxed{\frac{10x^2 + 56x - 35}{(2x^2 + 7)^2}}$

g) $f'(x) = 0$; $10x^2 + 56x - 35 = 0$; $x = \frac{-56 \pm \sqrt{3136 - 4 \cdot 10 \cdot (-35)}}{20} = \frac{-56 \pm \sqrt{3136 + 1400}}{20}$
 $= \frac{-56 \pm \sqrt{4536}}{20} \approx \frac{-56 \pm 67.35}{20} = \begin{cases} 0.57 \\ -6.17 \end{cases}$ extremos relativos

estudiamos el cambio de signo de $f'(x)$ para saber si son máximos o mínimos

$f' > 0$, $f' < 0$, $f' > 0$ $f'(x) = \frac{10x^2 + 56x - 35}{(2x^2 + 7)^2}$; $f'(-7) = \frac{490 - 392 - 35}{(98 + 7)^2} = \frac{63}{105^2} = +$ creciente

$\nearrow$ -6'17 $\searrow$ 0'57 $\nearrow$
 crece decrece crece

$$f'(-) = -$$

$$f'(1) = \frac{10+56-35}{+} = \frac{+}{+} = +$$

en $(-\infty, -6'17)$ y $(0'57, +\infty)$ CRECIENTE

en $(-6'17, 0'57)$ DECRECIENTE

tiene un Máximo en $x = -6'17$ y un Mínimo en $x = +0'57$

$$f(-6'17) = \frac{4(-6'17)^2 - 5(-6'17)}{2(-6'17)^2 + 7} = \frac{183'1256}{83'1378} \approx 2'2$$

$\boxed{(-6'17, 2'2)}$
máximo

$$f(0'57) = \frac{4(0'57)^2 - 5(0'57)}{2(0'57)^2 + 7} \approx -0'2$$

$\boxed{0'57, -0'2}$
mínimo

h) Resumen:

$D(f) = \mathbb{R}$; pto corte: $(0,0)$, $(\frac{5}{4}, 0) = (1'25, 0)$

Asintota horizontal $y = 2$, la corta en el pto $(-\frac{14}{5}, 2) = (-2'8, 2)$

f crece en $(-\infty, -6'17) \cup (0'57, +\infty)$

$(-6'17, 2'2)$ Máximo

f decrece en $(-6'17, 0'57)$

$(0'57, -0'2)$ Mínimo

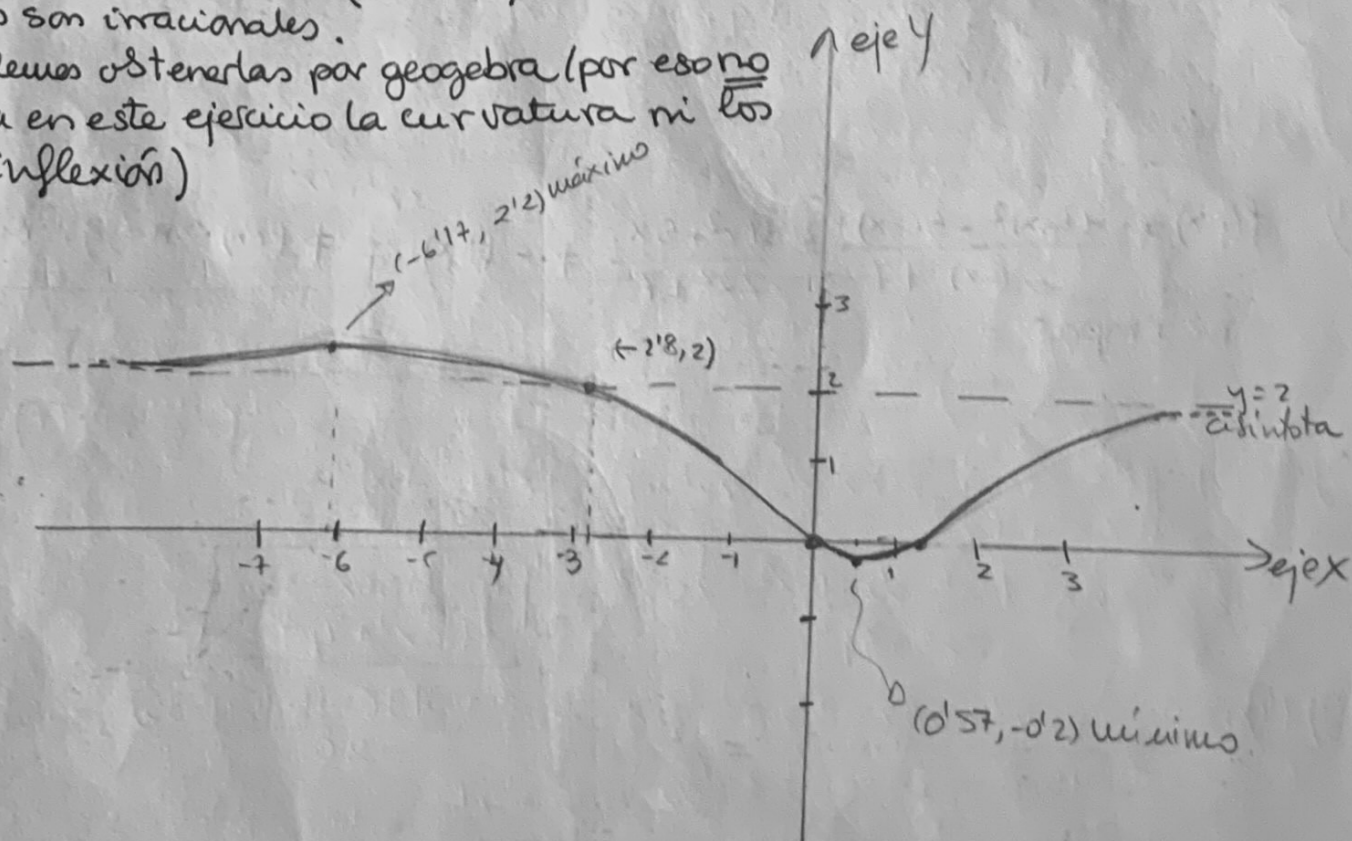
* falta mirar curvatura y pto de inflexión

$$f''(x) = \left(\frac{10x^2 + 56x - 35}{(2x^2 + 7)^2} \right)' = \frac{(10x^2 + 56x - 35)'(2x^2 + 7) - (10x^2 + 56x - 35)(2x^2 + 7)'}{(2x^2 + 7)^4}$$

$$= \frac{4(-10x^3 - 84x^2 + 105x + 98)}{(2x^2 + 7)^3}$$

las raíces son irracionales.

sólo podemos obtenerlas por geogebra (por eso no se pedía en este ejercicio la curvatura ni los pto. de inflexión)



9. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{2x-3}$ estudia los siguientes puntos

- Dominio
- Puntos de corte con los ejes
- Asíntotas
- ¿Corta la gráfica a alguna de las asíntotas? **NO**, simetrías
- Derivada de la función
- Crecimiento y decrecimiento
- Máximos y mínimos
- Con los datos obtenidos en los apartados anteriores dibuja de forma aproximada la gráfica de la función.

a) es una fracción algebraica, su dominio es $\mathbb{R}$ salvo los ptn que anulan el denominador: $2x-3=0$; $2x=3$; $x=\frac{3}{2}$; $D(f) = \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$

b) eje x: $x^2=0 \Rightarrow x=0$; además $f(0) = \frac{0}{-3} = 0$; $\boxed{(0,0)}$

eje y: obviamente $(0,0)$

c) horizontales: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x-3} = \infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-2x-3} = -\infty$

No tiene, tiene 2 ramas infinitas

verticales: $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{x^2}{2x-3} = \pm \infty$ miramos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} \frac{x^2}{2x-3} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} \frac{x^2}{2x-3} = -\infty$$

$\nearrow$
 $\text{si } x > \frac{3}{2} \Rightarrow 2x-3 > 0$ $\text{si } x < \frac{3}{2} \Rightarrow 2x-3 < 0$

$\boxed{y = \frac{3}{2}}$ asíntota vertical

d) $f(-x) = \frac{(-x)^2}{2(-x)-3} = \frac{x^2}{-2x-3} \neq -f(x)$ y $\neq f(x)$, no es ni par ni impar

e) faltan asíntotas oblicuas

oblicuas: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{2x-3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2-3x} = \left(\frac{1}{2}\right) = m$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{2x-3} - \frac{x}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x(2x-3)}{2(2x-3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x^2 + 3x}{4x-6} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

Asíntota oblicua $\boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}}$

$$e) f(x) = \frac{x^2}{(2x-3)} = \frac{2x(2x-3) - x \cdot 2}{(2x-3)^2} = \frac{4x - 6x - 2}{(2x-3)^2} = \frac{-2x - 2}{(2x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0; \quad 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases} \text{ extremos relativos}$$

$(\frac{3}{2} \notin D(f))$

miramos los signos de $f'(x)$ a los lados de los extremos relativos

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)}{(2x-3)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{-2(-4)}{(-2-3)^2} = \frac{+}{+} = + \text{ creciente}$$

$$f'(1) = \frac{2(-2)}{(-1)^2} = \frac{-}{+} = - \text{ decreciente}; \quad f'(4) = \frac{8(1)}{5^2} = \frac{+}{+} = + \text{ creciente}$$

$$\Rightarrow \text{en } x=0 \text{ tiene un máximo, } f(0) = \frac{0^2}{2 \cdot 0 - 3} = \frac{0}{-3} = 0 \quad \boxed{(0,0) \text{ máximo}}$$

$$\Rightarrow \text{en } x=3 \text{ tiene un mínimo; } f(3) = \frac{3^2}{6-3} = \frac{9}{3} = 3; \quad \boxed{(3,3) \text{ mínimo}}$$

b) Recopilando: $D(f) = \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$

* pts corte: $(0,0)$ que además es un máximo relativo.

* en $y = \frac{3}{2}$ asíntota vertical que divide la función en 2 ramas con $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = -\infty$

* asíntota oblicua en $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

* en $(3,3)$ mínimo (relativo)

* f crece $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

* f decrece $(0, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 3)$

Faltaba la curvatura

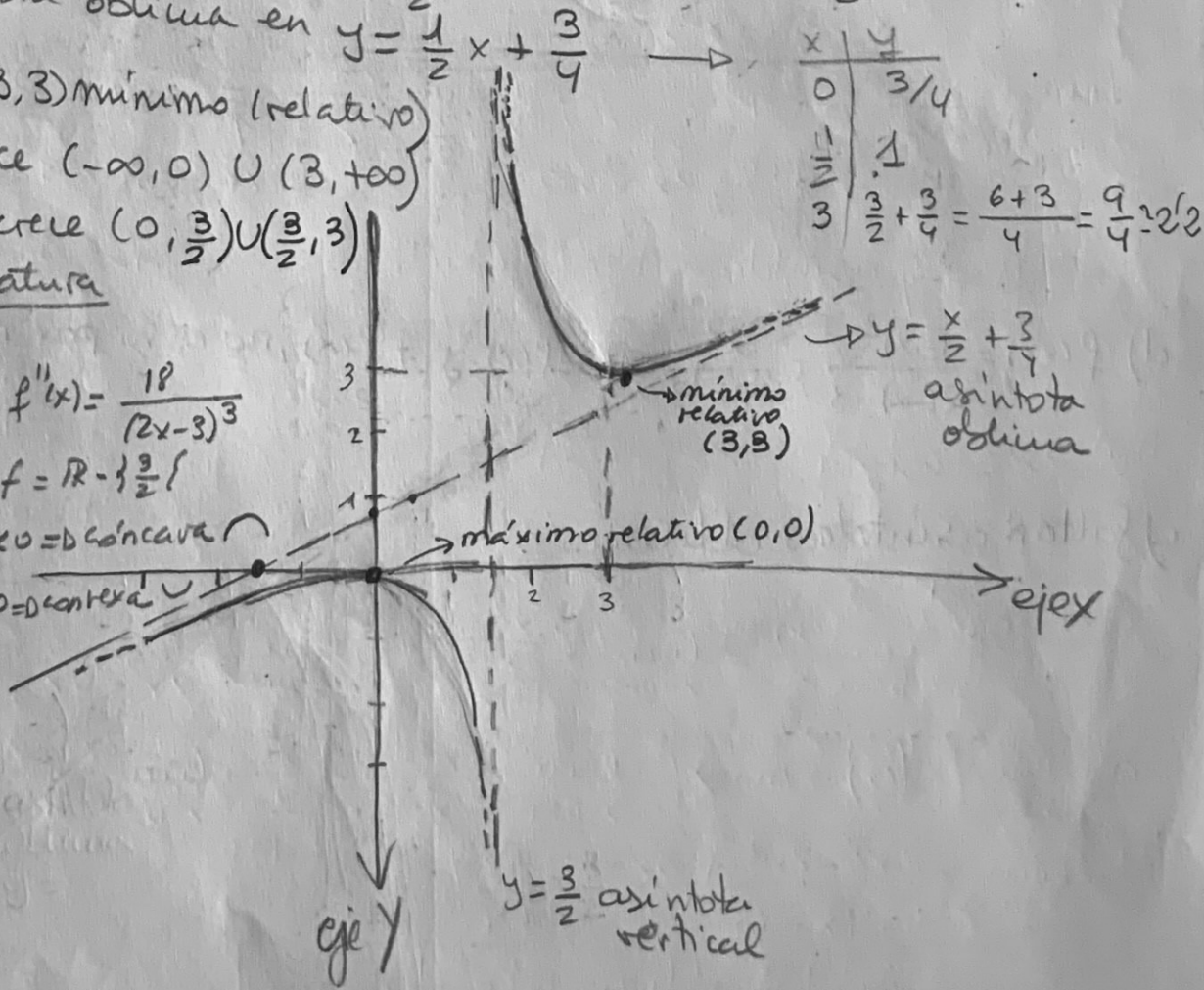
se puede ver que

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 6x}{(2x-3)^2} \text{ y } f''(x) = \frac{18}{(2x-3)^3}$$

$$f''(x) \neq 0 \forall x \in D(f) = \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$$

A la izqda de $\frac{3}{2} \Rightarrow f'' < 0 \Rightarrow$ cóncava

A la dcha de $\frac{3}{2} \Rightarrow f'' > 0 \Rightarrow$ convexa



10. Dada la función $f(x) = \frac{x^2+3x}{x-1}$ estudia los siguientes puntos

- Dominio
- Puntos de corte con los ejes
- Asíntotas
- ¿Corta la gráfica a alguna de las asíntotas? NO, simetrías
- Derivada de la función
- Crecimiento y decrecimiento
- Máximos y mínimos
- Con los datos obtenidos en los apartados anteriores dibuja de forma aproximada la gráfica de la función.

y curvatura (falta)

a) Tracé algebraica $\Rightarrow$ dominio es todo $\mathbb{R}$ salvo los pto que anulan el denominador: $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

b) eje X: $\frac{x^2+3x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2+3x=0 \Leftrightarrow x(x+3)=0$ $\begin{cases} x=0; (0,0) \\ x=-3; (-3,0) \end{cases}$
eje Y: ya está (0,0) $x \neq 1 \notin D(f)$

c) Horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+3)}{(x-1)} = \infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3x}{-x-1} = -\infty$

no tiene asíntotas horizontales, pero tiene 2 ramas infinitas parabólicas

verticales: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+3)}{x-1} = \pm \infty$; miramos los límites laterales:

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x+3)}{x-1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x+3)}{x-1} = -\infty$ Asíntota vertical en $x=1$

* oblicuas: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+3x}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3x}{x^2-x} = 1 = m$; $y = mx + n$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3x}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3x-x^2+x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x-1} = 4$
 $y = x + 4$ asíntota oblicua $n = 4$

d) $f(-x) = \frac{(-x)^2-3x}{-x-1} = \frac{x^2-3x}{-x-1} \neq -f(x)$ y $\neq f(x)$, no es ni par ni impar

e) $f'(x) = \frac{(2x+3)(x-1) - (x^2+3x) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x+3x-3-x^2-3x}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

f) $f'(x) = 0$; $\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$
 $x = 3$ y $x = -1$ $x \neq 1 \in D(f)$

$x = \frac{2+4}{2} = 3$
 $x = \frac{2-4}{2} = -1$

Ejercicio 10 de 10

$f' > 0$ $f' < 0$ $f' > 0$
↑ -1 3 ↑
crece decrece crece

$f'(-2) = \frac{4+4-3}{9} = \frac{5}{9} = +$ CRECE
 $f'(0) = \frac{-3}{1} = -$ DECRECE

entonces en $x = -1$ tiene un Máximo relativo $\rightarrow (-1, 1)$
 $f(-1) = \frac{(-1)^2 + 3(-1)}{-1-1} = \frac{1-3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$
 y en $x = 3$ tiene un Mínimo relativo; $f(3) = \frac{3^2 + 3 \cdot 3}{3-1} = \frac{9+9}{2} = 9$
 $(3, 9)$

h) Resumen:

$D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, pts corte: $(0, 0)$ $(-3, 0)$

• en $x=1$ asíntota vertical con $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

• asíntota oblicua en $y = x + 4$ (recta que pasa por el $(0, -2)$ y $(-3, -5)$)

• f crece $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

• f decrece $(-1, 1) \cup (1, 3)$

Máximo relat. $(-1, 1)$
 Mínimo relativa $(3, 9)$

Falta Calcular curvatura:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

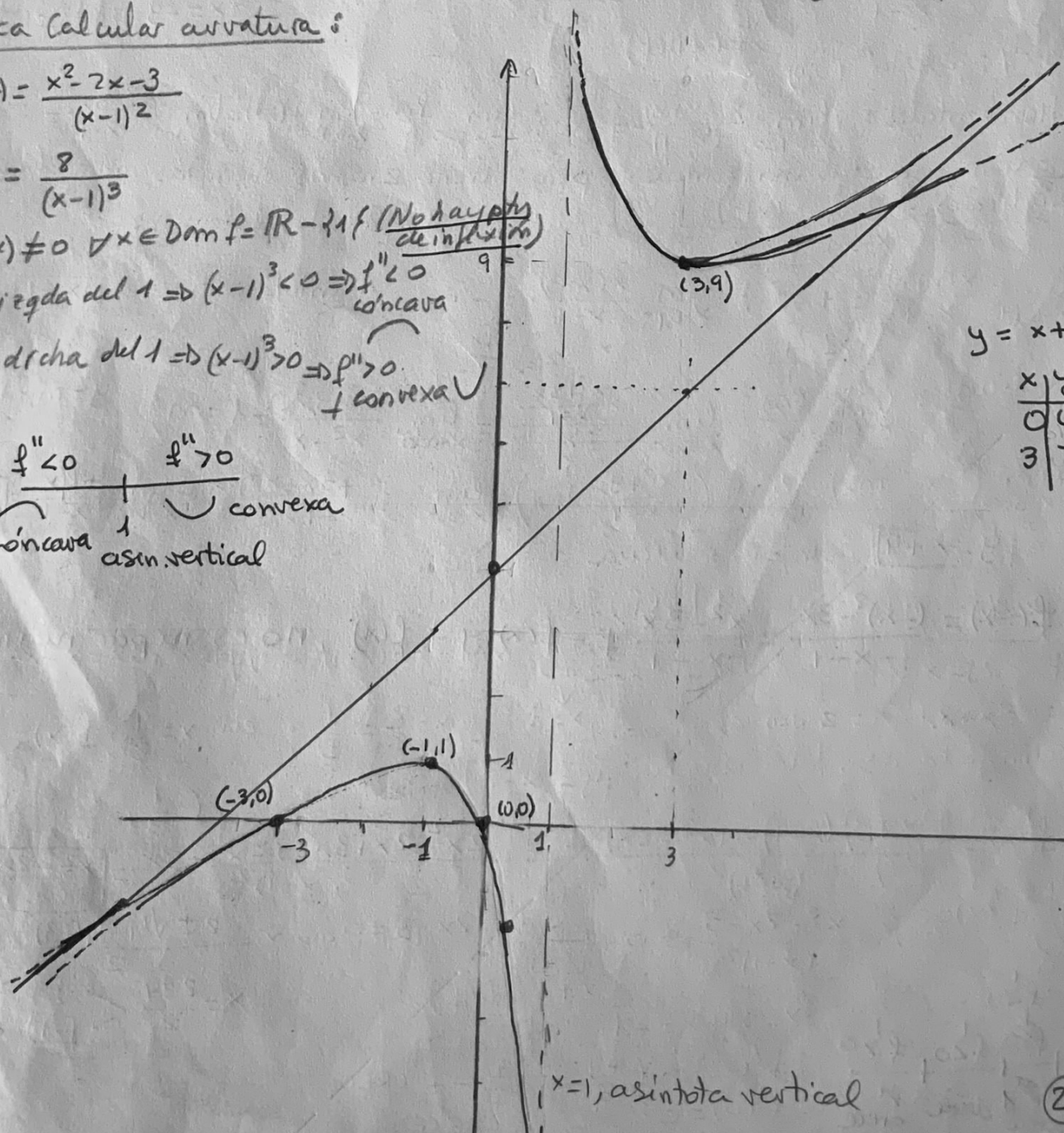
$$f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}$$

$f''(x) \neq 0 \forall x \in \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$ (No hay pts de inflexión)

A la izda del 1 $\Rightarrow (x-1)^3 < 0 \Rightarrow f'' < 0$
 cóncava

A la dcha del 1 $\Rightarrow (x-1)^3 > 0 \Rightarrow f'' > 0$
 + convexa

$f'' < 0$ $f'' > 0$
 cóncava convexa
 1
 asin. vertical



$$y = x + 4$$

x	y
0	-4
-3	-5

$x=1$, asíntota vertical