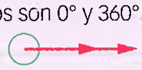
Recuerda

Dos vectores forman dos ángulos cuya suma es 360°.

- Si los vectores son opuestos, los ángulos miden 180°.

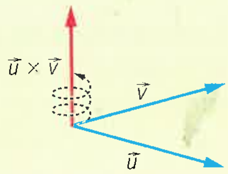
- Si los vectores tienen igual dirección y sentido, los ángulos son 0° y 360°.



8 Producto vectorial

El **producto vectorial** de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es otro vector $\vec{u} \times \vec{v}$ que tiene los siguientes elementos:

- **Módulo:** $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen\ \alpha$, siendo α el menor ángulo entre los vectores.
- **Dirección:** perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- **Sentido:** el del avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

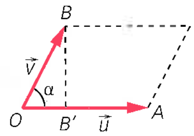


8.1. Interpretación geométrica del producto vectorial

El módulo del producto vectorial de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es igual al área del paralelogramo que definen ambos vectores.

Si consideramos el paralelogramo definido por dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, no proporcionales, y calculamos su área, obtenemos que:

$$\text{Área} = |\vec{u}| \cdot |\overrightarrow{BB'}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen\ \alpha$$



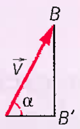
Por tanto, resulta:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen\ \alpha = \text{Área del paralelogramo definido por } \vec{u} \text{ y } \vec{v}$$

Recuerda

En un triángulo rectángulo, el cateto opuesto a uno de los ángulos agudos es igual a la hipotenusa por el seno de dicho ángulo.

$|\overrightarrow{BB'}| = |\vec{v}| \cdot sen\ \alpha$

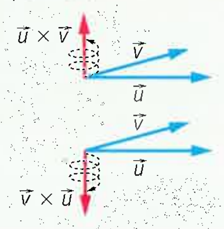


8.2. Propiedades

- El producto vectorial de un vector por sí mismo es cero:
  $|\vec{u} \times \vec{u}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot sen\ 0° = |\vec{u}|^2 \cdot 0 = 0$
- Propiedad anticonmutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
  Los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ tienen igual módulo y dirección, pero sentido contrario, luego son opuestos.
- Propiedad distributiva respecto de la suma:
  $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- Propiedad respecto al producto por números reales:
  $(k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v}) \qquad \vec{u} \times (k\vec{v}) = k(\vec{u} \times \vec{v})$
- El producto vectorial de dos vectores no nulos es el vector nulo si, y solo si, los vectores son paralelos:
  $|\vec{u} \times \vec{v}| = 0 \rightarrow |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen\ \alpha = 0 \rightarrow sen\ \alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0° \\ \alpha = 180° \end{cases}$
- En general, el producto vectorial no cumple la propiedad asociativa:
  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

Date cuenta

Los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ son opuestos.



ACTIVIDADES

21. Calcula el módulo del producto vectorial de los vectores $\vec{u} = (-1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (2, 0, 1)$ sabiendo que el ángulo que forman estos vectores es de 30°.

22. Si dos vectores son perpendiculares, ¿a qué es igual el módulo de su producto vectorial?

23. Demuestra las siguientes propiedades.

a) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

b) $(k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v})$

c) $\vec{u} \times (k\vec{v}) = k(\vec{u} \times \vec{v})$

d) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

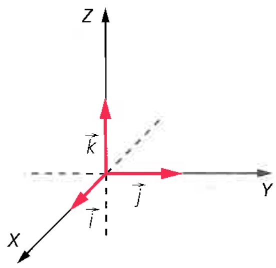
8.3. Expresión en coordenadas del producto vectorial

En el sistema de referencia canónico, el producto vectorial de dos vectores, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, es:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Los vectores de la base canónica tienen módulo 1 y son perpendiculares entre sí; por tanto, por la definición del producto vectorial se cumple que:

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = 0 & \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} & \vec{j} \times \vec{j} = 0 & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} & \vec{k} \times \vec{k} = 0 \end{array}$$



Aplicando las propiedades, calculamos el producto vectorial de dos vectores:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}) \times (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) = \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k} \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que: $\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$

EJEMPLOS

13 Realiza el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$, siendo $\vec{u} = (-1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} = (1, 1, -2)$$

Por tanto, el producto vectorial del vector $\vec{u} = (-1, 1, 0)$ y el vector $\vec{v} = (1, 1, 1)$ es otro vector $\vec{u} \times \vec{v}$ de coordenadas $(1, 1, -2)$.

14 Demuestra la propiedad anticonmutativa del producto vectorial de dos vectores: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.

Tomamos dos vectores cualesquiera:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \qquad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

Aplicando la expresión en coordenadas del producto vectorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

Si en una matriz cuadrada intercambiamos dos de sus filas, su determinante cambia de signo.

ACTIVIDADES

24. Considera, en el sistema de coordenadas canónico, los vectores $\vec{v} = (0, 2, -2)$, $\vec{v} = (-1, 3, -5)$ y $\vec{w} = (0, -2, 1)$. Calcula:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$

b) $\vec{u} \times \vec{w}$

c) $-\vec{v} \times \vec{w}$

d) $\vec{v} \times 2\vec{w}$

e) $2\vec{u} \times 3\vec{v}$

f) $(\vec{u} - \vec{w}) \times 2\vec{v}$

25. Obtén, en cada caso, el vector $\vec{u} \times \vec{v}$ y comprueba que el vector resultante de este producto es perpendicular tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$.

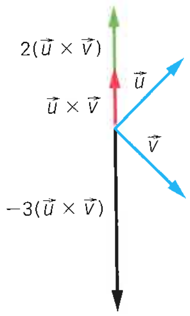
a) $\vec{u} = (5, -2, -1)$ y $\vec{v} = \left(-1, \frac{1}{2}, 4\right)$

b) $\vec{u} = \left(0, -1, \frac{1}{3}\right)$ y $\vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, -1, 3\right)$

9 Aplicaciones del producto vectorial

9.1. Vector perpendicular a otros dos vectores

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores linealmente independientes y distintos de cero, su producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector perpendicular a ambos.



EJEMPLO

15 **Calcula las coordenadas de tres vectores perpendiculares a $\vec{u} = (-1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 1)$.**

El vector $\vec{u} \times \vec{v}$ y cualquier vector proporcional a él son perpendiculares a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

Por tanto, el vector $\vec{u} \times \vec{v} = (1, 1, 1)$ y cualquier vector proporcional a él son perpendiculares a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Los vectores $\vec{u} \times \vec{v} = (1, 1, 1)$, $\vec{w} = (2, 2, 2)$ y $\vec{z} = (-3, -3, -3)$ son perpendiculares a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

9.2. Bases de vectores ortogonales

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores no proporcionales, los vectores $\{\vec{u}, \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})\}$ forman una base de vectores ortogonales.

Se escribe así

Una base ortogonal es una base de vectores ortogonales, es decir, todos sus elementos son perpendiculares entre sí.

SABER HACER

Calcular una base de vectores ortogonales

▶ **Halla dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ que formen con $\vec{u} = (2, -1, 0)$ una base ortogonal.**

PRIMERO. Se halla el segundo vector de la base, haciendo el producto vectorial de $\vec{u}$ por cualquier otro vector no proporcional a él.

Un vector no proporcional a $\vec{u}$ es, por ejemplo, (1, 0, 0).

$$\vec{v} = (2, -1, 0) \times (1, 0, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} = (0, 0, 1)$$

SEGUNDO. Se calcula el tercer vector de la base como $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (2, -1, 0) \times (0, 0, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} = (-1, -2, 0)$$

$\mathcal{B} = \{(2, -1, 0), (0, 0, 1), (-1, -2, 0)\}$ es una base de vectores ortogonales.

ACTIVIDADES

26. Determina, en cada caso, un vector $\vec{w}$ que forme una base ortogonal del espacio junto con los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $\vec{u} = (1, 0, 1)$ y $\vec{v} = (0, -1, 0)$

b) $\vec{u} = \left(2, \frac{1}{2}, -1\right)$ y $\vec{v} = (0, -1, -2)$

27. Determina, en cada caso, dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, que formen una base ortonormal del espacio junto con el vector $\vec{u}$.

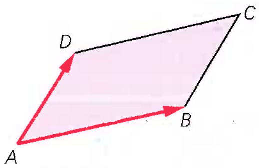
a) $\vec{u} = (-1, 0, 0)$

b) $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

9.3. Área de un paralelogramo

El área de un paralelogramo $ABCD$ es el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$.

$$\text{Área} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$$



9.4. Área de un triángulo

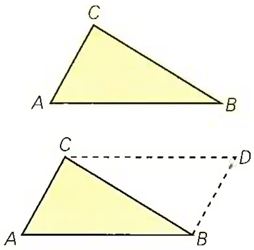
El área de un triángulo de vértices ABC se calcula con la fórmula:

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$$

Para demostrar esto tomamos tres puntos no alineados, A, B y C, que determinan un triángulo ABC.

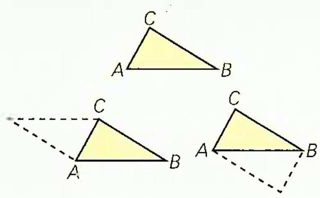
Si le añadimos otro triángulo igual tenemos un paralelogramo $ABDC$.

Así, el área del triángulo ABC es la mitad del área del paralelogramo $ABDC$.



Date cuenta

El área de un triángulo ABC no depende de los vectores escogidos:

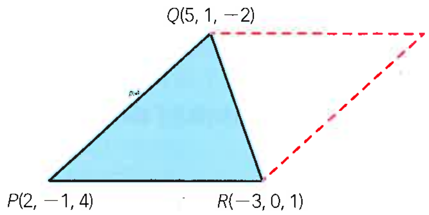


$$\frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|}{2} = \frac{|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}|}{2}$$

SABER HACER

Calcular el área de un triángulo

▶ **Determina el área de este triángulo.**



PRIMERO. Se calculan los vectores que representan dos lados del triángulo.

$$\overrightarrow{PQ} = (5 - 2, 1 - (-1), -2 - 4) = (3, 2, -6)$$

$$\overrightarrow{PR} = (-3 - 2, 0 - (-1), 1 - 4) = (-5, 1, -3)$$

SEGUNDO. Se halla el producto vectorial de estos dos vectores.

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -6 \\ -5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 39j + 13k = (0, 39, 13)$$

TERCERO. El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo formado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$. Por tanto:

$$A_{\text{Triángulo}} = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{\sqrt{39^2 + 13^2}}{2} = 20{,}55 \text{ u}^2$$

ACTIVIDADES

28. Calcula el área y el perímetro del paralelogramo definido por los vectores $\vec{u} = (4, -2, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 2, -1)$.

29. Calcula el área del triángulo cuyos vértices son:

$A(2, 1, 3)$ $B(3, 0, 1)$ $C(-1, -2, 0)$

Comprueba que el resultado es independiente de los vectores que elijas para hallar el área.

30. Determina el área del triángulo cuyos vértices están situados en los siguientes puntos.

a) $A(1, 1, 0)$, $B(0, 0, 1)$ y $C(0, 1, -1)$

b) $A(-1, 0, 1)$, $B(2, 0, -1)$ y $C(1, 3, 0)$

c) $A(-2, 3, 2)$, $B(1, 5, -1)$ y $C(3, 1, -4)$

d) $A(0, 1, 1)$, $B(-1, -1, -1)$ y $C(1, 0, 0)$

10 Producto mixto

No olvides

- El producto escalar de dos vectores es un número.
- El producto vectorial de dos vectores es un vector.
- El producto mixto de tres vectores es un número.

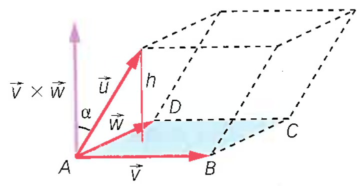
Se llama **producto mixto** de tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, y se escribe $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, al número que se obtiene al calcular el producto escalar del primer vector por el producto vectorial de los otros dos.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

10.1. Interpretación geométrica del producto mixto

El valor absoluto del producto mixto de tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, es igual al volumen del paralelepípedo definido por ellos.

Consideramos el paralelepípedo definido por tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, no nulos, y calculamos su volumen.



$$\begin{aligned}\text{Volumen} &= h \cdot (\text{Área de } ABCD) = h \cdot |\vec{v} \times \vec{w}| = \\ &= (|\vec{u}| \cdot sen\,(90° - \alpha)) \cdot |\vec{v} \times \vec{w}| = \\ &= (|\vec{u}| \cdot cos\,\alpha) \cdot |\vec{v} \times \vec{w}| = \\ &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot cos\,\alpha = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\end{aligned}$$

10.2. Expresión en coordenadas del producto mixto

En el sistema de referencia canónico, el producto mixto de tres vectores, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, es:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Date cuenta

El producto mixto con los vectores de la base canónica es cero si alguno de ellos está repetido.

$[\vec{i}, \vec{i}, \vec{i}] = [\vec{i}, \vec{j}, \vec{i}] = [\vec{i}, \vec{k}, \vec{i}] =$
$= \ldots = 0$

Lo comprobamos a partir de los vectores de la base canónica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] = 1$ $\quad [\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}] = 1$ $\quad [\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}] = 1$

$[\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}] = -1$ $\quad [\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}] = -1$ $\quad [\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}] = -1$

Aplicando las propiedades, calculamos el producto mixto de tres vectores:

$$\begin{aligned}[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= [(u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}), (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}), (w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k})] = \\ &= u_1v_2w_3[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] + u_1v_3w_2[\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}] + u_2v_1w_3[\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}] + \\ &+ u_2v_3w_1[\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}] + u_3v_1w_2[\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}] + u_3v_2w_1[\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}] = \\ &= u_1v_2w_3 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1\end{aligned}$$

ACTIVIDADES

31. Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 0)$, $\vec{v} = (2, 5, -9)$ y $\vec{w} = (2, 4, -8)$, halla los siguientes productos mixtos.

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ c) $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$

b) $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$ d) $[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$

32. Calcula el producto mixto de los siguientes vectores.

$\vec{u} = (3, 8, 0)$ $\quad \vec{v} = (0, -1, 3)$ $\quad \vec{w} = (-5, 4, 0)$

33. Comprueba que este producto mixto es cero.

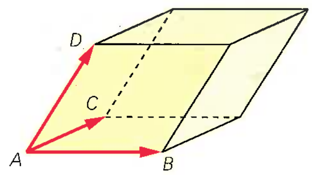
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}]$

11 Aplicaciones del producto mixto

11.1. Volumen de un paralelepípedo

El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores:

$$\text{Volumen} = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right|$$



SABER HACER

Calcular el volumen de un paralelepípedo

Calcula el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (0, -1, 1)$ y $\vec{w} = (2, 3, 2)$.

PRIMERO. Se calcula el producto mixto de los tres vectores.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2 + 0 - 0 - 0 - 3 = -3$$

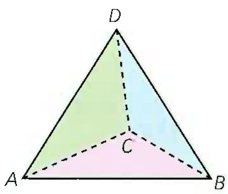
SEGUNDO. El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto.

$$\text{Volumen} = \left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right| = |-3| = 3\ \text{u}^3$$

11.2. Volumen de un tetraedro

El volumen del tetraedro cuyos vértices A, B, C y D son cuatro puntos del espacio que no pertenecen al mismo plano se calcula mediante la fórmula:

$$\text{Volumen} = \frac{\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right|}{6}$$



SABER HACER

Calcular el volumen de un tetraedro

Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son:

$A(-1, 2, 1)$ $B(3, 0, 2)$ $C(1, 2, 3)$ $D(-1, 0, 1)$

PRIMERO. Se calculan tres vectores que tengan origen en uno de los puntos y extremo en los otros puntos.

$\overrightarrow{AB} = (4, -2, 1)$ $\overrightarrow{AC} = (2, 0, 2)$ $\overrightarrow{AB} = (0, -2, 0)$

SEGUNDO. Se halla el producto mixto de los tres vectores.

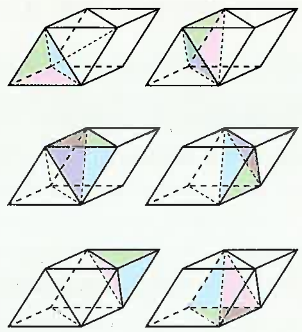
$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 16 = 12$$

TERCERO. Se aplica la fórmula para el cálculo del volumen del tetraedro.

$$\text{Volumen} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6} = \frac{12}{6} = 2\ \text{u}^3$$

Date cuenta

Un paralelepípedo se descompone en 6 tetraedros con idéntico volumen.



El volumen del tetraedro es la sexta parte del volumen del paralelepípedo.

ACTIVIDADES

34. Obtén el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\vec{u} = (2, 3, -2)$, $\vec{v} = (0, -3, 0)$ y $\vec{w} = (-7, 2, -1)$.

35. Obtén el volumen del tetraedro cuyos vértices son $A(0, 0, 0)$, $B(0, 0, 1)$, $C(0, 2, 0)$ y $D(3, 0, 0)$.

SABER HACER

Operaciones con vectores

Operar con vectores utilizando sus coordenadas

Dados los vectores $\vec{u} = (2, -2, 1)$, $\vec{v} = (-1, 1, 1)$ y $\vec{w} = (0, 2, -5)$, determina las coordenadas del vector $2\vec{w} - \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u}$.

PRIMERO. Se calculan las coordenadas de cada uno de los términos de la operación entre vectores.

$$2\vec{w} = (0, 4, -10) \qquad \vec{v} = (-1, 1, 1) \qquad \frac{1}{2}\vec{u} = \left(1, -1, \frac{1}{2}\right)$$

SEGUNDO. Se realizan las operaciones indicadas coordenada a coordenada.

$$2\vec{w} - \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u} = (0, 4, -10) - (-1, 1, 1) + \left(1, -1, \frac{1}{2}\right) = \left(2, 2, -\frac{21}{2}\right)$$

PRACTICA

36. Dados los vectores $\vec{u} = (0, 2, -1)$, $\vec{v} = (-1, 0, -3)$ y $\vec{w} = (4, -1, -2)$, determina las coordenadas del vector $-\frac{1}{2}\vec{v} + 3\vec{u} - 2\vec{w}$.

Operaciones con vectores

Hallar las coordenadas del origen o el extremo de un vector que cumple ciertas condiciones

Dados los puntos $A(4, -2, 1)$ y $B(-2, 0, 3)$, determina las coordenadas del punto C que verifica $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BC}$.

PRIMERO. Se toma un punto genérico y se calculan las coordenadas de los vectores. Se establece la condición que se tiene que cumplir.

Si $C(x, y, z) \rightarrow \overrightarrow{AC} = (x - 4, y + 2, z - 1)$

$\overrightarrow{BC} = (x + 2, y, z - 3)$

La condición es:

$$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BC} \rightarrow (x - 4, y + 2, z - 1) = 3(x + 2, y, z - 3)$$

SEGUNDO. Se iguala coordenada a coordenada y se resuelve el sistema.

$$x - 4 = 3x + 6 \rightarrow x = -5$$
$$y + 2 = 3y \rightarrow y = 1$$
$$z - 1 = 3z - 9 \rightarrow z = 4$$

El punto es $C(-5, 1, 4)$.

PRACTICA

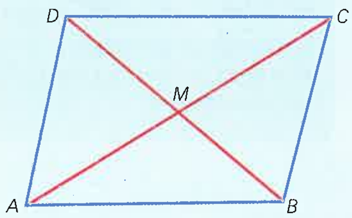
37. Dados los puntos $A(1, 2, -1)$ y $B(3, 6, 9)$, halla las coordenadas del punto C, sabiendo que $\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA}$.

Punto medio de un segmento

Determinar los vértices de un paralelogramo

Dados los puntos $A(1, 0, -2)$, $B(-1, 0, 2)$ y $C(-2, 1, 0)$, halla las coordenadas de un cuarto punto D con la condición de que el cuadrilátero $ABCD$ sea un paralelogramo.

PRIMERO. Se considera un punto genérico $D(x, y, z)$. Si los puntos $ABCD$ determinan un paralelogramo, sus diagonales se cortan en sus puntos medios.



M es el punto medio de $AC \rightarrow M\left(\frac{1 + (-2)}{2}, \frac{0 + 1}{2}, \frac{-2 + 0}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$

M es el punto medio de $BD \rightarrow M\left(\frac{-1 + x}{2}, \frac{0 + y}{2}, \frac{2 + z}{2}\right) = \left(\frac{x - 1}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z + 2}{2}\right)$

SEGUNDO. Se igualan las coordenadas y se resuelve el sistema resultante.

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{x - 1}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z + 2}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = \frac{x - 1}{2} \\ \frac{1}{2} = \frac{y}{2} \\ -1 = \frac{z + 2}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -4 \end{cases}$$

Por tanto, el punto buscado es $D(0, 1, -4)$.

PRACTICA

38. Sabemos que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo. Halla las coordenadas del punto D sabiendo que $A(2, 3, 1)$, $B(-1, 0\ 4)$ y $C(-2, -1, 0)$.

Bases

Hallar las coordenadas de un vector respecto de una base

Dados los vectores $\vec{u} = (3, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$ y $\vec{w} = (2, -1, 1)$, comprueba que son una base y calcula las coordenadas del vector $\vec{z} = (1, 5, 1)$ en esta base.

PRIMERO. Se comprueba si los tres vectores forman una base en $\mathbb{R}^3$.

$$\{(3, 0, 1), (1, 1, 1), (2, -1, 1)\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Como el determinante es distinto de cero, los tres vectores son linealmente independientes y, por tanto, son base de $\mathbb{R}^3$.

SEGUNDO. Se expresa el vector como combinación lineal de los vectores de la base.

$$(1, 5, 1) = x \cdot (3, 0, 1) + y \cdot (1, 1, 1) + z \cdot (2, -1, 1) = (3x + y + 2z, y - z, x + y + z)$$

TERCERO. Se plantea y se resuelve el sistema de ecuaciones que resulta al igualar coordenada a coordenada.

$$\left.\begin{aligned} 3x + y + 2z &= 1 \\ y - z &= 5 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{y = z + 5} \left.\begin{aligned} 3x + z + 5 + 2z &= 1 \\ x + z + 5 + z &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 3x + 3z &= -4 \\ x + 2z &= -4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x = -4 - 2z} \begin{aligned} 3(-4 - 2z) + 3z &= -4 \\ -12 - 6z + 3z &= -4 \\ -3z = 8 \rightarrow z &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$x = -4 - 2z \rightarrow x = \frac{4}{3} \qquad y = z + 5 \rightarrow y = \frac{7}{3}$$

En la nueva base, las coordenadas del vector son: $\vec{z} = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{8}{3}\right)$

PRACTICA

39. Calcula las coordenadas del vector $\vec{x} = (1, 0, 1)$ en función de los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 1)$, $\vec{v} = (2, -1, 1)$ y $\vec{w} = (-2, 0, -3)$.

Dependencia lineal de vectores

Calcular un parámetro para que tres vectores sean linealmente independientes

Determina el valor de m para que los vectores $\vec{u} = (3, 2, -1)$, $\vec{v} = (-3, -1, 0)$ y $\vec{w} = (3, -2, m)$ sean linealmente independientes.

PRIMERO. Se calcula el determinante cuyas filas corresponden a las coordenadas de los vectores.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & m \end{vmatrix} = 3m - 9$$

SEGUNDO. Para que tres vectores sean linealmente independientes, el rango de la matriz formada por sus coordenadas tiene que ser 3. Por tanto, el determinante tiene que ser distinto de 0.

Si $3m - 9 \neq 0 \rightarrow m \neq 3 \rightarrow$ Los vectores son linealmente independientes.

Si $3m - 9 = 0 \rightarrow m = 3 \rightarrow$ Los vectores son linealmente dependientes.

PRACTICA

40. Dados los vectores $\vec{v}_1 = (-1, 3, 4)$, $\vec{v}_2 = (2, -1, 3)$ y $\vec{v}_3 = (1, 2k + 1, k + 3)$, halla el único valor de k para el cual estos vectores no son base de $\mathbb{R}^3$.

Producto escalar

Determinar el módulo de un vector utilizando la definición del producto escalar

Calcula $|\vec{u} + \vec{v}|$ sabiendo que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 2$ y $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 60°$.

PRIMERO. Se aplican las propiedades del producto escalar.

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 = 16$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 = 4$$

$$\begin{aligned} |\vec{u} + \vec{v}|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

SEGUNDO. Se calcula el producto escalar utilizando su definición.

$$\begin{aligned} |\vec{u} + \vec{v}|^2 &= \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \\ &= 16 + 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 60 + 4 = \\ &= 16 + 2\left(4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\right) + 4 = 28 \end{aligned}$$

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = 28 \rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

PRACTICA

41. Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $|\vec{u} + \vec{v}| = 7$.

SABER HACER

Producto escalar

Calcular el valor de un parámetro para que dos vectores sean perpendiculares

Dados los puntos $A(3, -1, 2)$, $B(-1, 0, 3)$, $C(1, -1, 2)$ y $D(-m, m, m+1)$, calcula el valor de m para el que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean perpendiculares.

PRIMERO. Se calculan las coordenadas de los vectores y se impone la condición de perpendicularidad.

$$\overrightarrow{AB} = (-4, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{CD} = (-m-1, m+1, m-1)$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

$$(-4, 1, 1) \cdot (-m-1, m+1, m-1) = (4m+4) + (m+1) + (m-1) = 6m+4$$

SEGUNDO. Se resuelve la ecuación resultante.

$$6m + 4 = 0 \rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son perpendiculares si $m = -\dfrac{2}{3}$.

PRACTICA

42. Calcula el valor de k para que los vectores $\vec{u} = (-k, 2, 0)$ y $\vec{v} = (2, -k+2, k+1)$ sean perpendiculares.

Producto vectorial

Determinar vectores perpendiculares a otros dos que cumplan ciertas condiciones

Determina un vector unitario que sea ortogonal a los vectores $\vec{u} = (0, 1, 1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

PRIMERO. El producto vectorial de los dos vectores es otro vector perpendicular a ambos vectores.

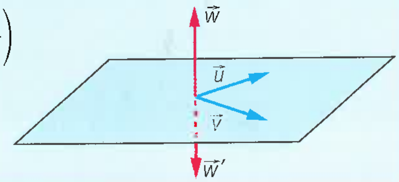
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -i + 2j - 2k$$

El vector $(-1, 2, -2)$, y cualquier vector proporcional a este, $(-\lambda, 2\lambda, -2\lambda)$, son perpendiculares a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

SEGUNDO. Se impone la condición de que su módulo sea 1.

$$1 = |(-\lambda, 2\lambda, -2\lambda)| = \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2} = \pm 3\lambda \rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \vec{w} = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right) \\ \vec{w}\,' = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right) \end{cases}$$



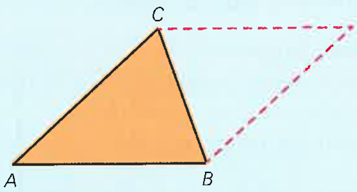
PRACTICA

43. Calcula un vector unitario y ortogonal a los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (2, -2, 1)$.

Producto vectorial

Determinar un vértice de un triángulo

Dados los puntos $A(1, 1, -2)$, $B(-2, 1, 0)$ y $C(m, 2, 1)$, determina el valor de m para que el área del triángulo ABC sea $\sqrt{\dfrac{19}{2}}$ u².



PRIMERO. Se considera el paralelogramo cuya mitad es el triángulo determinado por los tres puntos. Se calculan las coordenadas de los vectores que lo determinan.

$$\overrightarrow{AB} = (-2-1, 1-1, 0-(-2)) = (-3, 0, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (m-1, 2-1, 1-(-2)) = (m-1, 1, 3)$$

SEGUNDO. Se utiliza el módulo del producto vectorial para calcular la mitad del área del paralelogramo.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 0 & 2 \\ m-1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2i + (2m+7)j - 3k = (-2, 2m+7, -3)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + (2m+7)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4m^2 + 28m + 62}$$

$$A_{\text{Triángulo}} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{4m^2+28m+62}}{2} = \sqrt{\frac{19}{2}}$$

$$8m^2 + 56m + 124 = 76 \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -6 \end{cases}$$

Para $m = -1$ y $m = -6$, el triángulo ABC tiene un área de $\sqrt{\dfrac{19}{2}}$ u².

PRACTICA

44. Halla el vector $\vec{u}$ que tiene la misma dirección que $\vec{v} = (1, -2, 3)$ y forma con el vector $\vec{w} = (-2, 4, -1)$ un paralelogramo de 25 u² de área.

Producto vectorial

Determinar vectores conociendo condiciones sobre su producto vectorial

Dados los vectores:

$$\vec{u} = (a, b, 1) \qquad \vec{v} = (-3, 4, 1) \qquad \vec{w} = (1, 2, c)$$

determina el valor de los parámetros a, b, $c \in \mathbb{R}$ de manera que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares y, además, $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v}$, donde $\times$ denota el producto vectorial.

¿Qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en dicho caso?

PRIMERO. Se escriben las condiciones de los vectores en función de sus coordenadas.

$$\vec{v} \perp \vec{w} \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \rightarrow (-3, 4, 1) \cdot (1, 2, c) = 0$$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v} \rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & 1 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix} = (-3, 4, 1)$$

SEGUNDO. Se desarrollan los productos para obtener ecuaciones, igualando coordenada a coordenada en el caso de vectores.

$$(-3, 4, 1) \cdot (1, 2, c) = 0 \rightarrow 5 + c = 0$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & 1 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix} = (bc - 2)\vec{i} + (1 - ac)\vec{j} + (2a - b)\vec{k} =$$

$$= (bc - 2, 1 - ac, 2a - b) = (-3, 4, 1)$$

Igualando coordenada a coordenada se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} bc - 2 &= -3 \\ 1 - ac &= 4 \\ 2a - b &= 1 \end{aligned}\right\}$$

TERCERO. Se resuelve el sistema formado por todas las ecuaciones obtenidas anteriormente.

$$\left.\begin{aligned} 5 + c &= 0 \\ bc - 2 &= -3 \\ 1 - ac &= 4 \\ 2a - b &= 1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{c = -5} \left.\begin{aligned} -5b - 2 &= -3 \\ 1 + 5a &= 4 \\ 2a - b &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{5} \\ b = \dfrac{1}{5} \\ c = -5 \end{cases}$$

CUARTO. Se calcula el ángulo que forman los dos vectores.

Si $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v}$, por la definición de producto vectorial, $\vec{v}$ tiene que ser perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

$$\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 90°$$

PRACTICA

45. Calcula a y b sabiendo que $\vec{u} = (1, 0, 2)$, $\vec{v} = (a, b, 1)$ y $\vec{w} = (-2, 5, -1)$ y que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$.

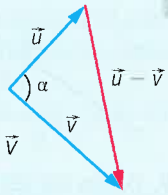
Producto mixto

Calcular el producto mixto aplicando las propiedades

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$, $|\vec{u} - \vec{v}| = 5$.

Calcula el producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}]$, siendo $\vec{u} \times \vec{v}$ el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

PRIMERO. Se calcula el ángulo que forman los vectores mediante las propiedades y la definición del producto escalar.



$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{v}$$

Así, resulta:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + |\vec{v}|^2$$

Sustituyendo los valores conocidos en la expresión anterior obtenemos:

$$5^2 = 3^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 4^2 \rightarrow 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 0 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = 0$$

Como $|\vec{u}| \neq 0$ y $|\vec{v}| \neq 0 \rightarrow \cos \alpha = 0$

Por tanto, se obtiene: $\alpha = 90°$.

SEGUNDO. Se permutan cíclicamente los vectores que aparecen en el producto mixto hasta encontrar la expresión que resulte más fácil de calcular.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}] = [\vec{u} \times \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u}]$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{v}))$$

$$[\vec{u} \times \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$$

$$[\vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u}] = \vec{v} \cdot ((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u})$$

En este caso, la expresión más fácil de calcular es:

$$[\vec{u} \times \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$$

porque consiste en hallar el producto escalar de un vector consigo mismo.

TERCERO. Se aplican las definiciones de los diferentes productos para calcular el producto pedido.

- Producto escalar:

  $$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u} \times \vec{v}|^2$$

- Producto vectorial:

  $$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

CUARTO. Se sustituyen en la expresión anterior los valores conocidos, y se halla el producto pedido en el enunciado del problema.

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen} \alpha = 3 \cdot 4 \cdot \operatorname{sen} 90° = 12$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = 12^2 = 144$$

PRACTICA

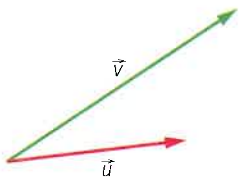
46. Si $|\vec{u}| = 6$, $|\vec{v}| = 8$ y $|\vec{u} + \vec{v}| = 10$, determina $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, siendo $\vec{w}$ el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

ACTIVIDADES

Operaciones con vectores

47. Representa en los ejes de coordenadas los vectores $\vec{u} = (3, 4, 2)$, $\vec{v} = (4, 2, -3)$, $\vec{w} = (2, -1, 3)$ y $\vec{x} = (-2, -1, 4)$.

48. Copia en tu cuaderno estos vectores y realiza gráficamente las siguientes operaciones.



a) $\vec{u} + \vec{v}$
b) $\vec{u} - \vec{v}$
c) $2\vec{u} + \vec{v}$
d) $2\vec{u} - \vec{v}$
e) $-2\vec{u} - \vec{v}$

49. Dados los vectores $\vec{u} = (2, -3, 1)$ y $\vec{v} = (4, 2, -1)$, calcula las coordenadas de los siguientes vectores.

a) $\vec{u} + \vec{v}$
b) $\vec{u} - 2\vec{v}$
c) $3\vec{u} + 2\vec{v}$
d) $-2\vec{u} - \vec{v}$
e) $2(\vec{u} + \vec{v}) - \vec{v}$
f) $\vec{u} - 3(\vec{v} - 2\vec{u})$

50. Halla dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que verifiquen simultáneamente las siguientes condiciones.

$$\vec{u} + \vec{v} = (-2, 2, 3) \qquad 2\vec{u} - \vec{v} = (5, -2, 3)$$

51. Determina el valor del parámetro m para que el módulo del vector $\vec{v} = (3, -4, m)$ sea 13.

52. Determina un vector cuyo módulo sea 9 y que tenga la misma dirección que $\vec{v} = (2, 5, -1)$ pero sentido contrario.

53. Calcula m y n para que se verifique que $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c}$, siendo $\vec{a} = (2, 10, -4)$, $\vec{b} = (-1, 3, -2)$ y $\vec{c} = (11, 15, -2)$.

54. Encuentra un vector $\vec{t}$ que verifique que $2\vec{u} - 3\vec{v} = 2\vec{t} - \vec{w}$, siendo $\vec{u} = (8, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 0, -6)$ y $\vec{w} = (-6, 2, 4)$.

55. Expresa el vector $\vec{x} = (6, -7, -8)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u} = (3, -2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$.

56. Expresa el vector $\vec{x} = (7, -2, 0)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u} = (1, 1, -2)$, $\vec{v} = (1, 0, 3)$ y $\vec{w} = (-2, 5, 0)$.

57. Demuestra que los vectores $\vec{u} = (2, -1, 0)$, $\vec{v} = (-1, 3, -5)$ y $\vec{w} = (5, -5, 5)$ son linealmente dependientes.

58. Demuestra que los vectores $\vec{u} = (-2, 1, 2)$, $\vec{v} = (0, 3, 2)$ y $\vec{w} = (1, 4, -5)$ son linealmente independientes.

59. Determina para qué valores de m son linealmente independientes estos vectores.

$$\vec{u} = (2, 1, -3) \quad \vec{v} = (2, m + 3, -4) \quad \vec{w} = (-2, 2, m - 1)$$

60. ¿Existe algún valor de m para el que los vectores $\vec{u} = (3, m, -2m)$, $\vec{v} = (6, 2m - 1, 0)$ y $\vec{w} = (6, 2m, 2)$ sean linealmente dependientes?

61. ¿Existe algún valor de m para el que los vectores $\vec{u} = (1, m - 1, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, 1)$ y $\vec{w} = (-1, 2, m - 1)$ sean linealmente dependientes?

62. Decide si son bases del espacio los tríos de vectores siguientes.

a) $\vec{u} = (5, 2, -1)$ $\quad \vec{v} = (4, 0, -2)$ $\quad \vec{w} = (3, 4, 2)$
b) $\vec{u} = (5, -2, 3)$ $\quad \vec{v} = (-2, 4, 2)$ $\quad \vec{w} = (-1, 10, 9)$
c) $\vec{u} = (2, 3, 0)$ $\quad \vec{v} = (0, -1, 3)$ $\quad \vec{w} = (-1, -1, -1)$
d) $\vec{u} = (-2, 1, 0)$ $\quad \vec{v} = (2, 2, 3)$ $\quad \vec{w} = (4, 3, 3)$

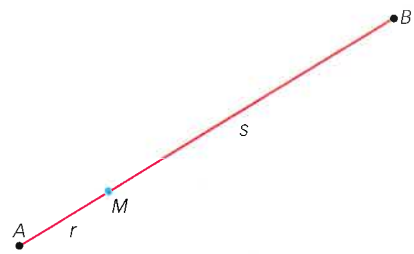
63. Sean los vectores $\vec{u} = (1, 1, 2)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ y $\vec{w} = (1, -a, 1)$.

a) Determina para qué valores del parámetro a los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ forman base del espacio tridimensional.
b) Para $a = 2$, determina las coordenadas del vector $\vec{w} = (-1, 5, 0)$ en esa base.

64. Si tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, ¿podemos afirmar que los vectores $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ también lo son? Razona tu respuesta.

65. Dado el segmento AB, determina los puntos M y N que dividen el segmento en tres partes iguales, siendo $A(-2, 3, -1)$ y $B(9, -3, 0)$.

66. Determina las coordenadas del punto M sabiendo que $A\left(\frac{3}{4}, -3, 4\right)$, $B(1, 8, -4)$ y $\frac{s}{r} = 3$.



67. Considera los puntos:

$$A(2, 3, 1) \qquad B(0, -1, 5) \qquad C(3, 5, a)$$

Determina el valor de a para que los puntos A, B y C estén alineados.

68. Encuentra los valores de a y b que hacen que los tres puntos estén alineados.

$$P(2, -1, a) \qquad Q(5, 1, 6) \qquad R(b, -5, 9)$$

69. ¿Qué condiciones deben cumplir a, b y c para que los puntos $P(3, 5, -7)$, $Q(4, a, -3)$ y $R(b, -7, c)$ estén alineados?

70. ¿Qué relación deben cumplir a y b para que los tres vectores sean paralelos?

$$\vec{u} = (a, 2, b) \qquad \vec{v} = (3, a, 5) \qquad \vec{w} = (1, -b, -1)$$

71. Deduce si existe algún valor del parámetro m para el que los vectores $\vec{u} = (2 + m, 1, 2)$ y $\vec{v} = (2, 1 + m, -4)$ sean paralelos.

Producto escalar

72. Determina el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en los siguientes casos.

a) $\vec{u} = \left(-2, 1, \frac{1}{3}\right)$ y $\vec{v} = (0, 2, -3)$

b) $\vec{u} = \left(-1, 2, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ y $\vec{v} = \left(3, \frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$

c) $\vec{u} = \left(\frac{3}{4}, \sqrt{3}, -5\right)$ y $\vec{v} = \left(\frac{2}{3}, -\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$

73. Determina el ángulo que forman cada par de vectores siguiente.

a) $\vec{u} = \left(-2, 1, \frac{1}{3}\right)$ y $\vec{v} = (0, 2, -3)$

b) $\vec{u} = \left(-1, 2, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ y $\vec{v} = \left(3, \frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$

c) $\vec{u} = \left(\frac{3}{4}, \sqrt{3}, -5\right)$ y $\vec{v} = \left(\frac{2}{3}, -\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$

74. Sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 60°$, determina el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

75. Dados los vectores $\vec{u} = (-1, -1, -1)$ y $\vec{v} = (0, 2, 1)$, calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) El ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

76. Determina el módulo, el producto escalar y el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en los siguientes casos.

a) $\vec{u} = (2, 1, -3)$ y $\vec{v} = (0, 2, 0)$

b) $\vec{u} = (-3, 5, 2)$ y $\vec{v} = (1, 1, -1)$

77. Considera los vectores $\vec{u} = (1, m, 3)$ y $\vec{v} = (0, 2, -5)$. Determina el valor de m sabiendo que los vectores forman un ángulo de 120°.

78. Halla, en cada caso, el valor de p para que los vectores tengan módulo 7. ¿Hay siempre una única solución? Razona la respuesta.

a) $\vec{u} = (2, -3, p)$ b) $\vec{v} = (-5, p, 6)$ c) $\vec{w} = (p, -1, 6)$

79. Calcula el módulo del vector $\vec{u} = (1, -1, -2)$ y determina dos vectores unitarios paralelos a él.

80. Dados los puntos $M(2, 3, -4)$ y $N(5, 0, -1)$, determina un vector unitario en la dirección del vector $\overrightarrow{MN}$.

81. Comprueba con $\vec{u} = (-2, 3, 4)$ y $\vec{v} = (1, -2, -3)$ que, en general, no es cierto que $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

82. ¿Cómo tienen que ser dos vectores para que se verifique que $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$?

83. Demuestra que si dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo módulo, los vectores $\overrightarrow{u+v}$ y $\overrightarrow{u-v}$ son ortogonales.

84. Demuestra que estos conjuntos de vectores forman una base del espacio tridimensional. ¿Alguna de las bases es ortogonal? ¿Y ortonormal?

a) $\mathcal{B}_1 = \{(1, 3, -1); (0, 1, 0); (-1, 0, 2)\}$

b) $\mathcal{B}_2 = \{(-2, 1, 1); (1, 2, 0); (-2, 1, -5)\}$

c) $\mathcal{B}_3 = \left\{\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); (1, 0, 0); \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$

85. Demuestra que las diagonales de un paralelogramo solo son iguales cuando sus lados son perpendiculares. Utiliza el resultado que afirma que si los lados de un paralelogramo son $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entonces las diagonales son $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.

86. Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ forman un triángulo. Demuestra que se cumple el teorema del coseno, aplicando la definición de módulo que proporciona el producto escalar $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

87. Determina los valores de m para los que son perpendiculares los vectores $\vec{u} = (m, -1, -m)$ y $\vec{v} = (m, 4, -3)$.

88. ¿Qué valor debe tomar t para que los vectores $\vec{u} = (3, t, 5)$ y $\vec{v} = (2, -7, t)$ sean perpendiculares? ¿Y para que sean paralelos?

89. Considera los puntos $A(-1, 2, -1)$, $B(m, 1, 0)$ y $C(2, -m, 3)$.

a) Determina el valor de m para el que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son perpendiculares.

b) Obtén el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ para $m = 1$.

90. Determina para qué valores de m son perpendiculares los vectores $\vec{u} = (1 - m^2, -m, m)$ y $\vec{v} = (m, 2m^2, 2)$.

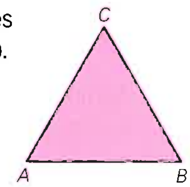
91. Demuestra que los vectores $\vec{u} = (m^3, -1, m^2 - 1)$ y $\vec{v} = (2, -3, 1 - 2m)$ son perpendiculares para cualquier valor del parámetro m.

92. ¿Cuánto debe valer m para que los puntos $A(5, m, 7)$, $B(3, -1, 4)$ y $C(6, 5, 4)$ formen un triángulo rectángulo con el ángulo recto en B?

93. Considera el triángulo ABC cuyos vértices son $A(1, -2, 0)$, $B(0, 3, 1)$ y $C(-1, 2, -3)$. Calcula:

a) Su perímetro.

b) La amplitud de sus ángulos.



94. Dados los vectores $\vec{u} = (2, -3, 1)$ y $\vec{v} = (4, 2, -1)$, calcula la proyección del vector $\vec{v}$ sobre el vector $\vec{u}$.

95. Determina el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabiendo que $\vec{u} = (1, 2, 0)$ y $|Proy_{\vec{u}}\,\vec{v}| = -\sqrt{\frac{4}{5}}$.

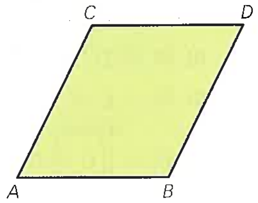
96. Dados los puntos $A(0, -1, 2)$, $B(-1, 3, 0)$ y $C(0, -2, 0)$, calcula:

a) Las coordenadas del punto D que hacen que $ABCD$ sea un paralelogramo.

b) El perímetro del paralelogramo.

c) La longitud de sus diagonales.

d) Sus ángulos.



97. Considera los puntos $A(m, 2, 1)$, $B(1, 0, -1)$ y $C(3, 4, -2m)$. ¿Existe algún valor de m para el cual el triángulo ABC sea rectángulo en el vértice B? Determina en ese caso la longitud de sus lados y la amplitud de sus ángulos.

98. ¿Es isósceles el triángulo de vértices $A(1, -2, 1)$, $B(-3, 1, 0)$ y $C(1, -2, -1)$? Razona la respuesta.

Producto vectorial

99. Siendo $\vec{u} = (3, 2, 0)$ y $\vec{v} = (3, 6, -2)$, halla $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$, y explica el resultado.

100. Determina el producto vectorial de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en los siguientes casos.

a) $\vec{u} = (-1, 2, 2)$ y $\vec{v} = (3, 2, -5)$

b) $\vec{u} = \left(3, -4, \frac{1}{3}\right)$ y $\vec{v} = (1, -3, 2)$

c) $\vec{u} = \left(\sqrt{6}, \sqrt{3}, 0\right)$ y $\vec{v} = \left(1, \sqrt{2}, -1\right)$

101. Sabiendo que $\vec{u} = (1, 0, -1)$, $|\vec{v}| = 5$ y $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 45°$, determina el módulo del producto vectorial de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

102. Demuestra, usando las propiedades de los determinantes, que el producto vectorial distribuye a la suma.

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

103. Dados los vectores $\vec{u} = (0, 1, 0)$, $\vec{v} = (-1, -1, 2)$ y $\vec{w} = (-3, -3, 4)$, calcula:

a) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w}$

b) $\vec{u} \times (\vec{v} - \vec{w})$

c) $\vec{v} \times (2\vec{u} - \vec{w})$

d) $(\vec{v} - \vec{u}) \times 2\vec{w}$

e) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{w})$

f) $2\vec{u} \times (\vec{w} \times 3\vec{v})$

104. Comprueba con $\vec{u} = (3, -4, 5)$ y $\vec{v} = (-2, 3, 1)$ si se verifica la igualdad: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

105. Demuestra que $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v})$, sean cualesquiera los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

106. Calcula el valor de m para que el producto vectorial de los vectores $\vec{u} = (-1, m, 0)$ y $\vec{v} = (-m, 0, 1)$ sea proporcional al vector $\vec{w} = \left(1, -\frac{1}{2}, -2\right)$.

107. Encuentra dos vectores que tengan módulo 5 y que sean perpendiculares a los vectores $\vec{u} = (2, 0, -1)$ y $\vec{v} = (6, -3, 2)$.

108. Dados los vectores:

$$\vec{u} = (1, -2, 4) \qquad \vec{v} = (-3, 0, 1)$$

determina un vector $\vec{w}$ perpendicular a ambos y con módulo 1.

109. Obtén un vector ortogonal a los vectores $\vec{u} = (2, 1, 3)$ y $\vec{v} = (-3, -1, 6)$ cuya primera coordenada sea 1.

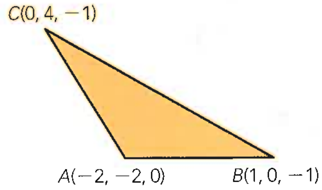
110. Encuentra un vector $\vec{w}$, de modo que para los vectores $\vec{a} = (3, 5, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, -4)$ y $\vec{c} = (-3, -1, 2)$ cumplan que $2\vec{a} - 3\vec{u} = \vec{b} \times \vec{c}$.

111. Dados los vectores:

$$\vec{u} = (-4, 1, 1) \qquad \vec{v} = (-2, -3, -5)$$

determina otro vector $\vec{w}$ de manera que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ formen una base ortogonal del espacio tridimensional. Transforma esta base en una base ortonormal.

112. Determina el área de este triángulo.



113. Determina la altura correspondiente al vértice B del triángulo de vértices $A(1, -3, 5)$, $B(-2, 1, 0)$ y $C(3, -1, 1)$.

114. Determina el tipo de triángulo que es el triángulo de vértices $A(-3, 3, 1)$, $B(-1, 0, 0)$ y $C(0,1, 1)$, y calcula:

a) Su perímetro.

b) La amplitud de todos sus ángulos.

c) Su superficie.

115. Dados los puntos $A(0, 2, 0)$, $B(1, 0, 0)$ y $C(0, 1, 4)$:

a) Determina las coordenadas de un punto D para que $ABCD$ sea un paralelogramo.

b) Calcula su perímetro y su superficie.

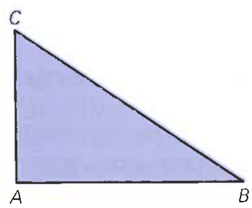
116. Los vectores $\vec{u} = (1, 2m, -1)$ y $\vec{v} = (3, -1, 5)$ generan un paralelogramo de superficie $\sqrt{66}$ u². ¿Existe algún valor del parámetro m para el que se verifica esta condición? Razona la respuesta.

117. Determina el valor de m para que la superficie del triángulo cuyos vértices se encuentran en los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 1)$ y $C(1, 6, m)$ tenga como superficie $\frac{3}{2}$ u².

118. Dado el triángulo de vértices $A(3, -1, 2)$, $B(2, 3, -2)$ y $C(1, -m, 3)$, calcula:

a) El valor de m para el que el triángulo sea rectángulo, con ángulo recto en el vértice A.

b) La altura correspondiente al vértice A.



119. Considera los puntos $A(0, -30, -30)$, $B(15, 0, 15)$ y $C(10, -10, 0)$.

a) Demuestra que los puntos A, B y C están alineados.

b) Determina razonadamente cuál de los tres puntos se encuentra entre los otros dos.

c) Considera un punto D que no esté alineado con ellos. ¿Cuál de los triángulos DAB, DAC o DBC tiene mayor superficie?

Producto mixto

120. Halla $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ en los siguientes casos.

a) $\vec{u} = (0, 4, 2)$ $\quad \vec{v} = (-2, 7, 1)$ $\quad \vec{w} = (5, -2, 1)$

b) $\vec{u} = (0, 4, 2)$ $\quad \vec{v} = (5, -2, 1)$ $\quad \vec{w} = (-2, 7, 1)$

c) $\vec{u} = (9, 4, 1)$ $\quad \vec{v} = (-1, 5, -11)$ $\quad \vec{w} = (12, 6, 0)$

121. Explica por qué para cualquier trío de vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$:

$$[\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}, -3\vec{a} + 5\vec{b}, -2\vec{a} + 7\vec{b} - \vec{c}] = 0$$

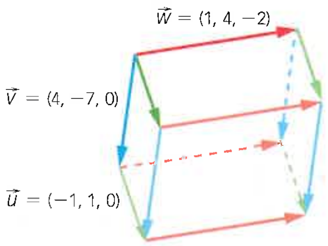
122. Dado el vector $\vec{a} = (3, -5, 2)$, elige otro vector $\vec{b}$ y comprueba que $[\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}] = 0$. Explica por qué sucede esto.

123. Comprueba con $\vec{u} = (3, -4, 5)$ y $\vec{v} = (-2, 3, 1)$ si se verifica la igualdad $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$.

124. Demuestra que $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v})$, sean cualesquiera los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

125. Encuentra un vector $\vec{u}$, de modo que para los vectores $\vec{a} = (3, 5, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, -4)$ y $\vec{c} = (-3, -1, 2)$ se verifique que $2\vec{a} - 3\vec{u} = \vec{b} \times \vec{c}$.

126. Calcula el volumen de este paralelepípedo.



127. Determina el volumen del tetraedro descrito por los vectores $\vec{u} = (3, 0, -2)$, $\vec{v} = (5, -6, 5)$ y $\vec{w} = (7, 0, -7)$.

128. Los vértices de un tetraedro se corresponden con los puntos $A(3, 4, 0)$, $B(-1, 2, 5)$, $C(3, -2, 0)$ y $D(0, -6, 9)$. Determina el volumen de ese tetraedro.

129. ¿Pueden ser estos puntos, en cada caso, los vértices de un paralelepípedo? Razona tu respuesta.

a) $A(1, 1, -1)$, $B(-3, 0, -7)$, $C(1, 4, 5)$ y $D(-2, 3, 5)$

b) $A(1, 0, 0)$, $B(2, 3, -1)$, $C(4, 1, 2)$ y $D(0, -3, 1)$

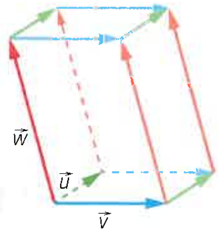
130. ¿Es posible que los puntos $A(-6, 1, 1)$, $B(0, -2, 5)$, $C(-1, -3, 4)$ y $D(-8, 1, 1)$ sean los cuatro vértices de un tetraedro?

Razona tu respuesta.

131. Halla el valor de m para que los vectores $\vec{u} = (1, m - 2, -1)$, $\vec{v} = (2, 5, 0)$ y $\vec{w} = (1, m, 1)$ determinen un paralelepípedo de volumen 6.

132. Determina el volumen del tetraedro de vértices $A(1, 2, 0)$, $B(0, 2, -1)$, $C(-1, 0, -6)$ y $D(4, 1, 1)$.
Con ese volumen, decide si los puntos son coplanarios o no.

133. Los vectores $\vec{u} = (-3, 9, 2)$, $\vec{v} = (1, 5, -1)$ y $\vec{w} = (6, 7, -6)$ generan un paralelepípedo. Considerando como base la generada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, determina la altura del paralelepípedo.



134. Determina la superficie y el volumen de un paralelepípedo sabiendo que cuatro de sus vértices están en los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(0, 1, 2)$, $C(1, 5, 3)$ y $D(1, 0, 1)$.

a) ¿Puede haber varios paralelepípedos con estos vértices?

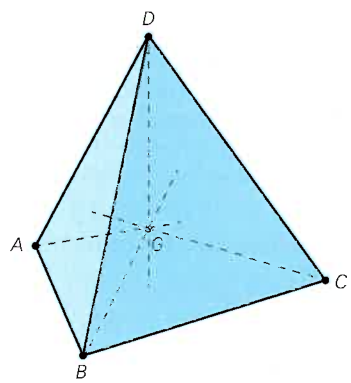
b) ¿Tendrían la misma superficie? ¿Y el mismo volumen? Razona la respuesta.

135. Los vectores $\vec{u} = (2, 1, -1)$, $\vec{v} = (-4, 0, 2)$ y $\vec{w} = (m, -1, 3)$ generan un paralelepípedo de volumen 30 u^3. Determina los posibles valores del parámetro m.

136. Los vectores $\vec{u} = (0, m, m)$, $\vec{v} = (m - 3, m + 4, 0)$ y $\vec{w} = (m, 4, -m)$ generan un paralelepípedo de volumen 9 u^3. Determina los posibles valores del parámetro m para que esto se cumpla.

137. Determina el valor del parámetro m sabiendo que el volumen del tetraedro cuyos vértices están determinados por los puntos $A(3, 5, 7)$, $B(1, 0, -1)$, $C(7, -1, 4)$ y $D(m, 4, -6)$ es 107 u^3.

138. Calcula el centro de gravedad del tetraedro cuyos vértices son los puntos $A(2, 3, 5)$, $B(0, -3, 5)$, $C(-2, 5, 7)$ y $D(7, 7, 3)$.



MATEMÁTICAS EN TU VIDA

¿Para qué sirven los vectores?

Para explicar fenómenos naturales

Una superficie cualquiera siempre contiene infinitos puntos, y de cada uno de esos puntos sale un vector perpendicular a dicha superficie.

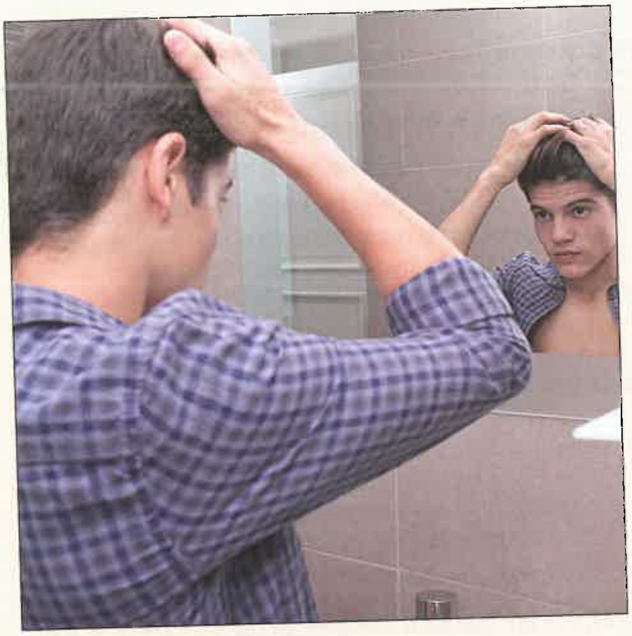
Como ya sabes, esos infinitos vectores tienen un módulo, una dirección y un sentido. Para nosotros, en este caso, el módulo y el sentido van a ser fijos y, por tanto, se mantienen constantes, pero, en cambio, la dirección la vamos a poder modificar como nos convenga.

Teniendo claras todas estas reglas, lo que hacemos ahora es tumbar todos esos vectores manteniendo en cada caso el mismo punto común entre esfera y vector, de forma que, en vez de ser perpendiculares a la superficie, son tangentes a la misma.

Pues bien, gracias a un teorema que existe en matemáticas más avanzadas y que se llama de forma muy explícita «teorema de la bola peluda», se sabe que siempre que se realiza el experimento anteriormente expuesto, al menos habrá un punto de la superficie de la esfera que se quede sin cubrir por algún vector.

Seguro que ya de por sí el nombre del teorema te da una pista, pero ¿cómo relacionamos esto con el remolino del pelo?

Vamos a extrapolar el resultado matemático a nosotros mismos. Supongamos que nuestra cabeza es la superficie esférica, y que cada uno de nuestros cabellos es un vector perpendicular a la superficie de la cabeza.



Puedes pensar (y con razón) que ni nuestra cabeza es exactamente esférica, ni tenemos infinitos cabellos. Pero también estarás de acuerdo en que son una buena aproximación a las condiciones del teorema, y por tanto, válido también.

Cuando nos peinamos el cabello, realmente estamos haciendo que nuestros cabellos-vectores se vuelvan tangentes a nuestra cabeza, por lo que siempre habrá un pedacito sin pelo, generalmente, en la coronilla.

Este mismo razonamiento lo podemos aplicar también a los huracanes o a los remolinos en el agua, que son dos fenómenos naturales en los que en el centro hay un punto en el que no ocurre nada.

LEE Y COMPRENDE

1. Explica si puede haber más de un punto vacío en una esfera como la anteriormente descrita.

INTERPRETA

2. Define qué serían el módulo, la dirección y el sentido si realizas el estudio sobre tu propia cabeza.

REFLEXIONA

3. ¿Qué crees que ocurriría si en vez de una esfera realizáramos el mismo proceso en un círculo?

APLICA

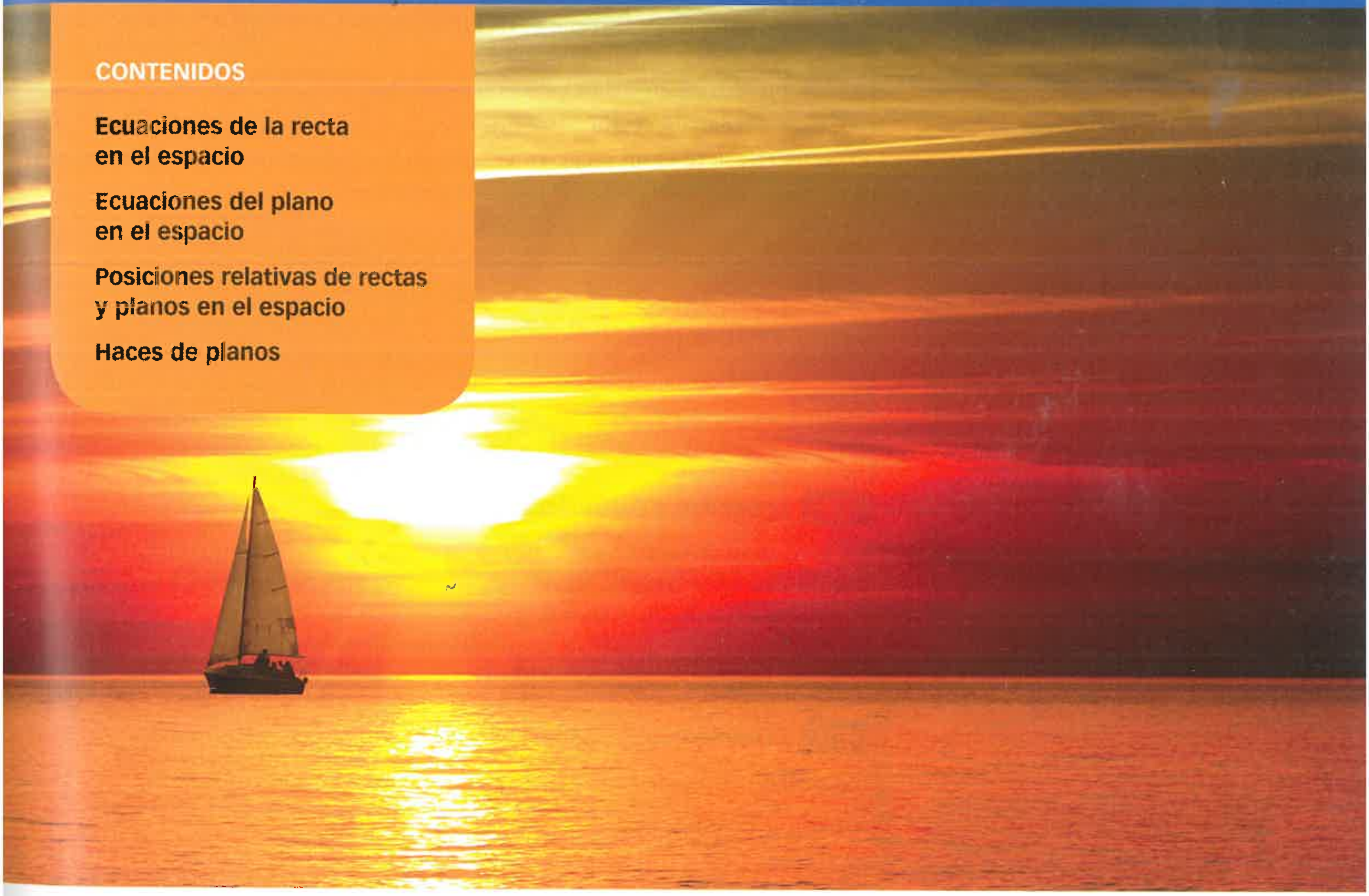
4. Define la superficie (la que más consideres que se parece), los vectores y el cambio en la dirección de estos en el caso de los huracanes.

   Explica brevemente, con base matemática y con tus palabras, el proceso que debe ocurrir para que se forme un huracán.

5. ¿Qué otros fenómenos naturales tienen un proceso similar?

5 Rectas y planos en el espacio

CONTENIDOS



Hoy te sientes nostálgico y no haces más que acordarte de lo mucho que disfrutaste en los meses de julio y agosto pasados.

¡Qué gran época el verano! Puedes descansar, levantarte un poco más tarde, dedicar más tiempo a tus aficiones, y por supuesto, disfrutar de uno de los grandes placeres de la vida: salir a cenar.

Seguro que has vivido muchas veces esta situación:

Una noche sales a cenar con tu familia o con tus amigos. La temperatura es muy agradable, y como el bar al que habéis ido tiene mesas fuera, decidís cenar en la calle. Todo parece perfecto hasta que alguien se apoya en la mesa y os dais cuenta de que está coja.

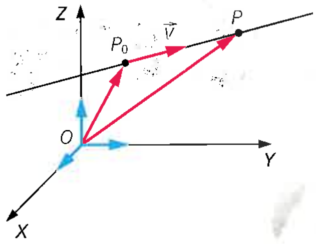
¡Qué desastre! Ahora todos a cambiarse de mesa.

Pero la cosa puede ir a peor, y cuando llegáis a la nueva mesa ocurre exactamente lo mismo. En ese momento alguien encuentra una solución, que es poner una servilleta doblada bajo la pata más corta. Así, por fin podéis cenar tranquilos.

¿Por qué algunas mesas están cojas?

1 Ecuaciones de la recta en el espacio

1.1. Ecuación vectorial



Una recta en el espacio queda determinada por:

- Un punto P_0 de la recta. El vector $\overrightarrow{OP_0}$ es el vector de posición del punto P_0.
- Un vector $\vec{v}$ cuya dirección es la recta y que se denomina **vector director**.

El vector $\overrightarrow{OP_0} + t\vec{v}$ es un vector con origen en O y cuyo extremo, dando distintos valores a t, determina cualquier punto de la recta.

Se llama **ecuación vectorial** de la recta r a la expresión:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v}, \text{ donde } \begin{cases} P(x, y, z) & \text{Un punto de la recta} \\ \overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0) & \text{Vector de posición del punto } P_0 \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) & \text{Vector director de la recta} \\ t & \text{Cualquier número real} \end{cases}$$

Expresándolo en coordenadas: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\,(v_1, v_2, v_3)$

No olvides

Dos puntos determinan una recta. Dados dos puntos A y B, la ecuación de la recta que determinan es:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$$

1.2. Ecuaciones paramétricas

A partir de la ecuación vectorial $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3)$, igualando coordenada a coordenada, obtenemos las **ecuaciones paramétricas** de la recta:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + tv_1 \\ y &= y_0 + tv_2 \\ z &= z_0 + tv_3 \end{aligned}\right\}, \text{ siendo } t \text{ un número real.}$$

Se escribe así

Las ecuaciones paramétricas de la recta también se pueden escribir como:

$$(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3)$$

1.3. Ecuación continua

Despejando t e igualando, obtenemos la **ecuación continua** de la recta.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + tv_1 \\ y &= y_0 + tv_2 \\ z &= z_0 + tv_3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow t = \frac{x - x_0}{v_1} \\ &\rightarrow t = \frac{y - y_0}{v_2} \\ &\rightarrow t = \frac{z - z_0}{v_3} \end{aligned} \Bigg\} \rightarrow \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

No olvides

Solo podemos escribir la ecuación continua cuando todas las coordenadas del vector director son distintas de cero.

1.4. Ecuaciones implícitas o cartesianas

Si separamos las igualdades de la ecuación continua y agrupamos los términos en un miembro, obtenemos las **ecuaciones implícitas** de la recta.

$$\left.\begin{aligned} \frac{x - x_0}{v_1} &= \frac{y - y_0}{v_2} \\ \frac{x - x_0}{v_1} &= \frac{z - z_0}{v_3} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} v_2x - v_1y + (v_1y_0 - v_2x_0) &= 0 \\ v_3x - v_1z + (v_1z_0 - v_3x_0) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ACTIVIDADES

1. Determina el vector director de la recta que pasa por:

a) $A(3, -2, 4)$ y $B(-1, 2, 5)$ b) $A(4, 0, -1)$ y $B(0, 3, -1)$

2. Da un vector de módulo 2 que sea vector director de:

a) Eje OX b) Eje OY c) Eje OZ

EJEMPLO

1 **Dados el punto $A(-2, 0, 1)$ y el vector $\vec{u} = (1, -1, 2)$, determina:**

a) Las ecuaciones de la recta que pasa por A y tiene como vector director $\vec{u}$.
b) Si el punto $B(0, -1, 2)$ pertenece a la recta.
c) Un punto que pertenezca a la recta.

a) Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (-2, 0, 1) + t(1, -1, 2)$

Ecuaciones paramétricas: $(x, y, z) = (-2, 0, 1) + t(1, -1, 2) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = 1 + 2t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$

Ecuación implícita: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{-1} \\ \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{z-1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + 2 = 0 \\ 2x - z + 5 = 0 \end{array}\right\}$

b) Se sustituyen las coordenadas del punto en cualquiera de las ecuaciones y se comprueba si se cumplen las igualdades.

$$\left.\frac{x+2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}\right\} \xrightarrow{B(0,-1,2)} \left\{\frac{0+2}{1} \neq \frac{-1}{-1} \neq \frac{2-1}{2}\right.$$

B no pertenece a la recta.

c) Para calcular un punto de la recta se da un valor cualquiera a una variable y se calcula el valor de las otras dos.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 2 = 0 \\ 2x - z + 5 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Para } x=0} \left.\begin{array}{r} 0 + y + 2 = 0 \\ 2 \cdot 0 - z + 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = -2 \\ z = 5 \end{array}\right\} \rightarrow P(0, -2, 5) \in r$$

SABER HACER

Hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos

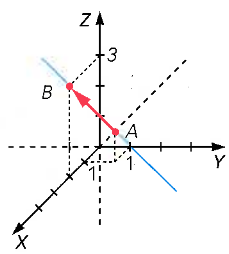
Halla la ecuación continua y las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(2, 0, 3)$.

PRIMERO. Se calcula el vector definido por los dos puntos.

$$\overrightarrow{AB} = (2-1, 0-1, 3-1) = (1, -1, 2) = \vec{v}$$

SEGUNDO. Se escribe la ecuación de la recta, conocidos un punto y el vector.

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3} \xrightarrow[\vec{v} = (1,-1,2)]{A(1,1,1)} \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2} \rightarrow \text{Ecuación continua}$$



A partir de la ecuación continua, se calculan las ecuaciones implícitas:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} \\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{z-1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -(x-1) = y - 1 \\ 2(x-1) = z - 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y - 2 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{array}\right\}$$

ACTIVIDADES

3. Determina las distintas ecuaciones de estas rectas.

a) Pasa por $A(-1, 1, 2)$ y su vector director es $\vec{v} = (2, -3, 1)$.

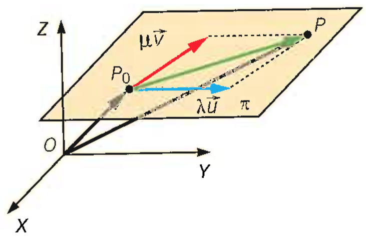
b) Pasa por los puntos $A(3, -2, 4)$ y $B(4, 0, -1)$.

c) Su vector director es $\vec{v} = (-1, 2, 0)$ y el punto $P(1, 0, 3)$ pertenece a la recta.

4. Determina tres puntos de la recta $r: (\lambda, 1 - \lambda, -2 + 2\lambda)$.

5. ¿Pertenece el punto $P(3, -1, 2)$ a la recta de ecuación $r: \dfrac{x+2}{5} = -y = \dfrac{z+1}{3}$? Determina el vector director de la recta y un punto.

2 Ecuaciones del plano en el espacio



2.1. Ecuación vectorial

Un plano, π, queda determinado por:

- Un punto P_0 del plano. El vector $\overrightarrow{OP_0}$ es el vector de posición del punto P_0.
- Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no paralelos, los **vectores directores** del plano.

El vector $OP_0 + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ es un vector con origen en O y cuyo extremo, dando valores a λ y μ, determina cualquier punto del plano π.

Se llama **ecuación vectorial** del plano π a la expresión:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \rightarrow \begin{cases} P(x, y, z) & \text{Un punto del plano} \\ \overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0) & \text{Vector de posición} \\ \left.\begin{matrix}\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)\end{matrix}\right\} & \text{Vectores directores del plano} \\ \lambda, \mu & \text{Dos números reales} \end{cases}$$

En coordenadas: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3) + \mu \cdot (v_1, v_2, v_3)$

No olvides

Los vectores directores de un plano no pueden ser paralelos, es decir, no pueden ser proporcionales.

2.2. Ecuaciones paramétricas

A partir de la ecuación vectorial del plano, igualando coordenada a coordenada, obtenemos las **ecuaciones paramétricas** del plano.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y &= y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z &= z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{aligned}\right\}, \text{ siendo } \lambda \text{ y } \mu \text{ números reales.}$$

2.3. Ecuación general o implícita

Si despejamos en la ecuación vectorial, obtenemos que, para cualquier punto del plano, P, el vector $\overrightarrow{PP_0}$ es combinación lineal de los vectores del plano $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \rightarrow \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \rightarrow \underbrace{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{P_0O}}_{\overrightarrow{P_0P}} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$
$$\rightarrow \overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

Expresándolo en coordenadas: $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3) + \mu \cdot (v_1, v_2, v_3)$

Esto quiere decir que los tres vectores son linealmente dependientes, lo que en términos de matrices y determinantes significa que:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

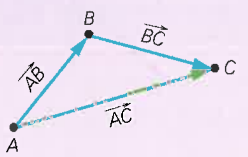
Desarrollando el determinante obtenemos la **ecuación general** del plano:

$Ax + By + Cz + D = 0$, donde A, B, C y D son números reales.

Recuerda

Propiedades de los vectores

- $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



ACTIVIDADES

6. Da las ecuaciones del plano que contiene a $P(-2, 1, 1)$ y cuyos vectores directores son $\vec{u} = (1, -2, 3)$ y $\vec{v} = (0, 1, -1)$.

7. ¿Pertenece el punto $P(-2, 1, -2)$ al plano de ecuación π: $3x + 2y - z + 2 = 0$? Razona tu respuesta.

8. Determina el valor de m para el que el punto $P(1, m, -3)$ pertenezca al plano π: $2x - y + z - 1 = 0$.

9. Determina el valor del m para el que el punto $P(-2, 3, 5)$ pertenezca al plano π: $mx + y - 3z + 4 = 0$.

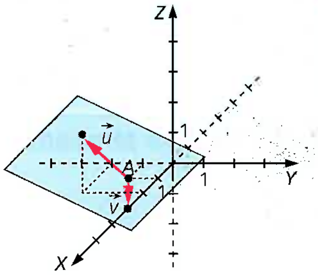
EJEMPLO

2 Dados el punto $A(1, -1, 0)$ y los vectores $\vec{u} = (1, -1, 2)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$, calcula:

a) Las ecuaciones del plano que contiene a A y tiene como vector director $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Si $B(0, -1, 2)$ pertenece al plano.

c) Un punto que pertenezca al plano.



a) Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (1, -1, 0) + \lambda(1, -1, 2) + \mu(2, 1, 0)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = -1 - \lambda + \mu \\ z = 2\lambda \end{array}\right\}$

Ecuación general: $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2x + 4y + 3z + 6 = 0$

b) Se sustituyen las coordenadas del punto en cualquiera de las ecuaciones y se comprueba si se cumplen las igualdades.

$$-2x + 4y + 3z + 6 = 0 \xrightarrow{B(0,-1,2)} -2 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 6 \neq 0$$

El punto B no pertenece al plano.

c) Para calcular un punto del plano se da un valor cualquiera a dos de las variables de su ecuación general y se calcula el valor de la tercera.

$$-2x + 4y + 3z + 6 = 0 \xrightarrow{\text{Para } x=-1,\, y=1} -2 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + 3z + 6 = 0$$
$$\rightarrow z = -4$$

El punto $P(-1, 1, -4)$ pertenece al plano.

SABER HACER

Hallar la ecuación del plano que pasa por tres puntos

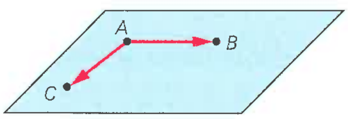
▶ **Calcula la ecuación general del plano que pasa por los puntos $A(1, -1, 0)$, $B(2, 0, 2)$ y $C(3, 0, 0)$.**

PRIMERO. Se calculan dos vectores a partir de los tres puntos.

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 2) \qquad \overrightarrow{AC} = (2, 1, 0)$$

SEGUNDO. Se desarrolla el determinante que expresa su ecuación general y se iguala a cero.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4(y+1) + z - 2z - 2(x-1) \rightarrow 2x - 4y + z - 6 = 0$$



ACTIVIDADES

10. Determina la ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.

a) $A(2, -1, 3)$; $B(1, 0, 1)$; $C(-1, 3, 4)$

b) $A(0, -1, 1)$; $B(2, -3, 1)$; $C(4, -2, 0)$

c) $A(1, 0, 0)$; $B(0, 2, 0)$; $C(0, 0, 3)$

11. Determina las distintas ecuaciones de cada uno de los siguientes planos.

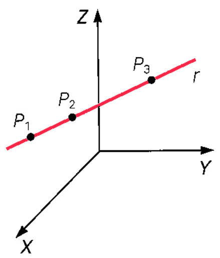
a) Plano OXY

b) Plano OXZ

c) Plano OYZ

3 Puntos alineados y coplanarios

3.1. Puntos alineados



Los **puntos** $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ están **alineados** si pertenecen a la misma recta.

Dos puntos siempre están alineados. Existe una única recta que une dos puntos.

SABER HACER

Comprobar si varios puntos están alineados

▶ Determina si los puntos $A(2, 1, 0)$, $B(-1, 0, 2)$ y $C(5, 2, -2)$ están alineados.

PRIMERO. Se define la ecuación de la recta que determinan dos de esos puntos.

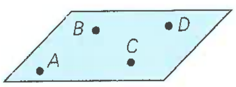
$$\overrightarrow{AB} = (-3, -1, 2) \qquad \text{Ecuación continua de } r \rightarrow \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$$

SEGUNDO. Se comprueba si el resto de puntos pertenecen a esa recta.

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \xrightarrow{C(5,2,-2)} \frac{5-2}{-3} = \frac{2-1}{-1} = \frac{-2}{2} \rightarrow C \in r$$

Por tanto, los tres puntos están alineados.

3.2. Puntos coplanarios



Cuatro **puntos** o más son **coplanarios** si pertenecen al mismo plano.

Tres puntos siempre son coplanarios. Tres puntos determinan un plano.

SABER HACER

Comprobar si varios puntos son coplanarios

▶ Determina si los puntos $A(2, 1, 0)$, $B(-1, 0, 2)$, $C(0, -2, -1)$ y $D(0, 3, -2)$ son coplanarios.

PRIMERO. Se define la ecuación del plano que determinan tres de esos puntos.

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-3, -1, 2) \\ \overrightarrow{AC} = (-2, -3, -1) \end{array} \qquad \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 7x - 7y + 7z - 7 = 0$$

SEGUNDO. Se comprueba si el resto de puntos pertenecen al plano.

$$7x - 7y + 7z - 7 = 0 \xrightarrow{D(0,3,-2)} 7 \cdot 0 - 7 \cdot 3 + 7 \cdot (-2) - 7 \neq 0 \rightarrow D \notin \pi$$

Los puntos A, B, C y D no son coplanarios.

ACTIVIDADES

12. Comprueba que los puntos $A(0, -1, 3)$, $B(-1, 2, 1)$ y $C(2, -1, -2)$ están alineados.

13. Calcula el valor de a para que los puntos $A(2, 3, -2)$, $B(3, 2, -5)$ y $C(0, 5, a)$ estén alineados.

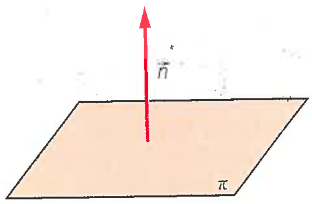
14. Comprueba si son coplanarios los puntos $A(2, -2, 3)$, $B(0, 0, 2)$, $C(-2, 0, 1)$ y $D(-2, -5, 1)$.

15. Obtén el valor de a para que los puntos $A(0, 0, 6)$, $B(1, -1, 7)$, $C(-2, 3, -5)$ y $D(-3, -1, a)$ sean coplanarios.

4 Vector perpendicular a un plano

4.1. Vector normal a un plano

Dado el plano π: $Ax + By + Cz + D = 0$, el vector $\vec{n} = (A, B, C)$ es un vector perpendicular al plano π. A este vector se le llama **vector normal** del plano.



Sea $\overrightarrow{PQ}$ un vector del plano π: $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 + D = 0 \\ Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = A(q_1 - p_1) + B(q_2 - p_2) + C(q_3 - p_3) = 0$$

EJEMPLO

3 Comprueba que $\vec{n} = (-2, 1, 1)$ es el vector normal de π: $-2x + y + z = 0$.

Se hallan dos vectores directores de π mediante sus ecuaciones paramétricas:

$$-2x + y + z = 0 \xrightarrow{x=\lambda,\, y=\mu} \pi: (x, y, z) = (\lambda, \mu, 2\lambda - \mu) \rightarrow \vec{u} = (1, 0, 2),\ \vec{v} = (0, 1, -1)$$

Se comprueba que $\vec{n}$ es perpendicular a estos dos vectores:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} \cdot \vec{u} = (-2, 1, 1) \cdot (1, 0, 2) = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{u} = (-2, 1, 1) \cdot (0, 1, -1) = -2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{n} \perp \pi$$

Se escribe así

$\vec{n}$ es un vector perpendicular al plano π, y se escribe $\vec{n} \perp \pi$, cuando es perpendicular a cualquier vector contenido en el plano.

Date cuenta

Dados dos vectores directores del plano, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, sabemos que su producto vectorial, $\vec{u} \times \vec{v}$, es un vector perpendicular a ellos y, por tanto, al plano.

Así, el vector normal del plano $\vec{n} = (A, B, C)$ y el vector $\vec{u} \times \vec{v}$ son paralelos.

4.2. Vector director de una recta expresada por dos planos

Dada r: $\left.\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array}\right\}$, $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ y $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ son los vectores normales a cada uno de los planos. Si $\vec{v}_r$ es el vector director de r:

$$\left.\begin{array}{l} r \text{ está contenida en } \pi_1 \rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_1 \\ r \text{ está contenida en } \pi_2 \rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_2 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

SABER HACER

Hallar el vector director de una recta dada por dos planos

▶ Calcula el vector director de esta recta: $r: \left.\begin{array}{r} x - y + z - 2 = 0 \\ -x + 2z - 1 = 0 \end{array}\right\}$

PRIMERO. Se calculan los vectores normales de los planos: $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$ y $\vec{n}_2 = (-1, 0, 2)$

SEGUNDO. El vector director de la recta es el producto vectorial de estos dos vectores.

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2i - 3j - k \rightarrow \vec{v}_r = (-2, -3, -1)$$

ACTIVIDADES

16. El plano π contiene al punto $P(-1, 3, 1)$ y sus vectores directores son $\vec{u} = (1, 0, 3)$ y $\vec{v} = (0, 1, -1)$. Comprueba que su vector normal es paralelo al vector $\vec{u} \times \vec{v}$.

17. Determina los vectores directores de estas rectas.

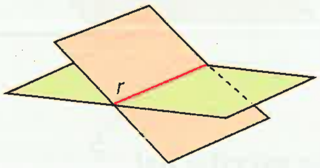
a) $r: \left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z - 5 = 0 \\ -2y + 2z + 3 = 0 \end{array}\right\}$

b) $r: \left.\begin{array}{r} -x + 3z + 1 = 0 \\ 2x - y + z + 3 = 0 \end{array}\right\}$

5 Posiciones relativas de recta y plano

Date cuenta

Las ecuaciones implícitas de una recta representan la intersección de dos planos.



Recuerda

El rango de la matriz de los coeficientes es siempre menor o igual que el rango de la matriz ampliada.

Rango $(M) \leq$ Rango (M^*)

Para determinar la posición de una recta y un plano estudiamos el sistema formado por las ecuaciones implícitas de la recta y la ecuación general del plano.

$$r\colon \left.\begin{matrix} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{matrix}\right\} \qquad \pi\colon Ax + By + Cz + D = 0$$

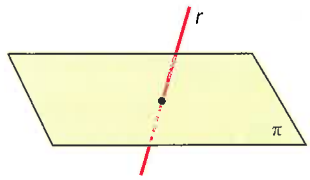
$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ A & B & C \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$$

Secantes

La recta y el plano se cortan en un punto.

El sistema es compatible determinado.

Rango $(M) = 3$ Rango $(M^*) = 3$

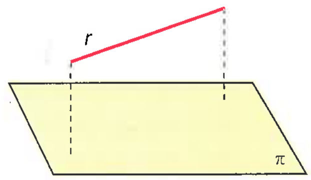


Paralelos

La recta y el plano no se cortan.

El sistema es incompatible.

Rango $(M) = 2$ Rango $(M^*) = 3$

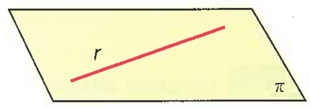


Recta contenida en el plano

La recta está contenida en el plano.

El sistema es compatible indeterminado.

Rango $(M) = 2$ Rango $(M^*) = 2$



SABER HACER

Determinar la posición relativa de un plano y una recta

▶ Determina la posición relativa de la recta y el plano.

$$r\colon \left.\begin{matrix} 2x + y + 2 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{matrix}\right\} \qquad \pi\colon x + y - z + 3 = 0$$

PRIMERO. Se halla la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

SEGUNDO. Se calcula el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada.

Rango $(M) = 3$ Rango $(M^*) = 3$

El sistema es compatible determinado; por tanto, la recta y el plano son secantes.

ACTIVIDADES

18. Determina la posición relativa entre la recta r y el plano π.

$$r\colon \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \qquad \pi\colon 3x - y + 2z + 8 = 0$$

En caso de que sean secantes en un punto, determina las coordenadas de ese punto.

19. Estudia la posición relativa entre recta y plano.

a) $r\colon \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases}$ y $\pi\colon -2x + y - z + 5 = 0$.

b) $r\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{11}$ y $\pi\colon x + 3y - z - 1 = 0$.

6 Posiciones relativas de dos planos

Para determinar la posición relativa de dos planos en el espacio estudiamos el sistema formado por las ecuaciones generales de los planos.

$$\pi_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad \pi_2\colon A_2x + B_2y + C_2Z + D_2 = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

Coincidentes

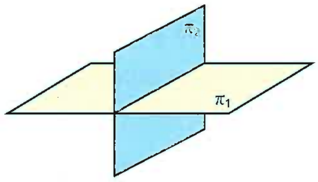
La intersección es todo el plano.

El sistema es compatible indeterminado.

Las dos ecuaciones representan el mismo plano, todos sus coeficientes son proporcionales.

Rango $(M) = 1$ Rango $(M^*) = 1$

Secantes



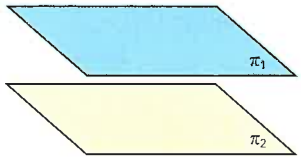
La intersección de los planos es una recta.

El sistema es compatible indeterminado.

Las dos ecuaciones no representan el mismo plano, algunos de sus coeficientes no son proporcionales.

Rango $(M) = 2$ Rango $(M^*) = 2$

Paralelos



Los dos planos no tienen puntos en común.

El sistema es incompatible.

Rango $(M) = 1$ Rango $(M^*) = 2$

SABER HACER

Determinar la posición relativa de dos planos

▶ Determina la posición relativa de los planos.

$$\pi_1\colon x + y - z + 2 = 0$$
$$\pi_2\colon 2x + 2y - 2z + 5 = 0$$

PRIMERO. Se halla la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las dos ecuaciones.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

SEGUNDO. Se calcula el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada.

Rango $(M) = 1$ Rango $(M^*) = 2$

El sistema es incompatible, los dos planos no tienen ningún punto en común y, por tanto, son paralelos.

ACTIVIDADES

20. Estudia la posición relativa entre los planos $\alpha\colon 2x + 4y - z + 2 = 0$ y $\beta\colon -3x + y - z = 1$. En caso de que sean secantes, determina las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección.

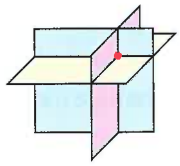
21. Estudia la posición relativa entre los planos $\alpha\colon -x + 3y - 2z + 1 = 0$ y $\beta\colon 2x - 6y + mz - 2 = 0$ en función del parámetro m. ¿Existe algún valor de m para el que los dos planos sean paralelos?

7 Posiciones relativas de tres planos

Para determinar la posición relativa de tres planos en el espacio estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\\ \pi_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\\ \pi_3\colon A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0\end{array}\right. \rightarrow M^* = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{array}}_{M}\middle|\begin{array}{c} D_1\\ D_2\\ D_3\end{array}\right)$$

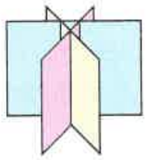
Se cortan en un punto



El sistema es compatible determinado.

Rango $(M) = 3$ Rango $(M^*) = 3$

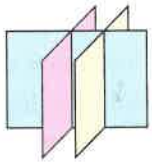
Se cortan dos a dos



El sistema es incompatible.

Rango $(M) = 2$ Rango $(M^*) = 3$

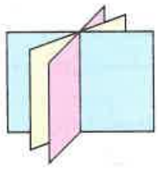
Dos planos paralelos cortan al tercero



El sistema es incompatible.

Rango $(M) = 2$ Rango $(M^*) = 3$

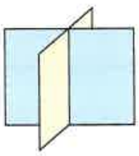
No coincidentes y se cortan en una recta



El sistema es compatible indeterminado (no hay ecuaciones proporcionales).

Rango $(M) = 2$ Rango $(M^*) = 2$

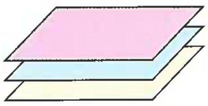
Dos planos coincidentes cortan al tercero



El sistema es compatible indeterminado (dos de las ecuaciones son proporcionales).

Rango $(M) = 2$ Rango $(M^*) = 2$

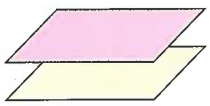
Tres planos paralelos



El sistema es incompatible (ninguna de las ecuaciones es proporcional).

Rango $(M) = 1$ Rango $(M^*) = 2$

Dos planos coincidentes y paralelos al tercero



El sistema es incompatible (dos ecuaciones proporcionales, y la otra no).

Rango $(M) = 1$ Rango $(M^*) = 2$

Tres planos coincidentes

El sistema es compatible indeterminado (sus ecuaciones son proporcionales).

Rango $(M) = 1$ Rango $(M^*) = 1$

ACTIVIDADES

22. Sean los planos:

$\pi_1\colon x + y - z + 1 = 0$ $\quad\pi_2\colon y + z = 0$

$\pi_3\colon 3x - 2y - 1 = 0$ $\quad\pi_4\colon 2x - 3y + z - 2 = 0$

a) Estudia la posición relativa entre π_1, π_2 y π_3.

b) Estudia la posición relativa entre π_1, π_3 y π_4.

23. Estudia, en función de los valores del parámetro m, la posición relativa entre los planos $\pi_1\colon mx + y - z = m - 2$, $\pi_2\colon x + y + 2z = 0$ y $\pi_3\colon 3x + my + z = m - 2$.

Determina, en el caso de que sean secantes en una recta, la ecuación paramétrica de esa recta.

Solo en los casos en que Rango (M) = Rango (M^*) y su valor es 3 o 1, podemos concluir cuál es la posición de los tres planos.

En los demás casos hay que estudiar la posición relativa de los planos dos a dos.

SABER HACER

Determinar la posición relativa de tres planos en el espacio

Determina la posición relativa de los planos.

$$\pi_1: x + y - z + 2 = 0$$
$$\pi_2: 2x + 2y - 2z + 5 = 0$$
$$\pi_3: -x + y + z = 0$$

PRIMERO. Se halla la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las tres ecuaciones.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

SEGUNDO. Se calcula el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \qquad \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

TERCERO. Se analizan los resultados obtenidos al calcular los rangos anteriores, deshaciendo, si fuera necesario, cualquier ambigüedad.

Rango (M) = 2 Rango (M^*) = 3

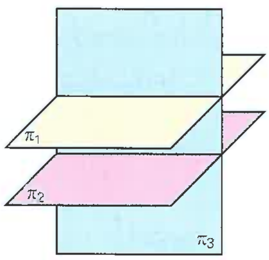
El sistema es incompatible, pero aún no se se puede decidir.

Se estudia la posición de los planos dos a dos, para deshacer la ambigüedad que presenta el estudio de los rangos.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1: x + y - z + 2 = 0 \\ \pi_2: 2x + 2y - 2z + 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Paralelos}$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1: x + y - z + 2 = 0 \\ \pi_3: -x + y + z = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{Secantes}$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_2: 2x + 2y - 2z + 5 = 0 \\ \pi_3: -x + y + z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Secantes}$$



Los planos π_1 y π_2 son paralelos y cortan a π_3.

ACTIVIDADES

24. Determina la posición relativa de estos planos.

$\pi_1: 6x + 3y - z = 0$
$\pi_2: 3x - 2y + z - 3 = 0$
$\pi_3: 2y - z + 1 = 0$

25. Estudia la posición relativa de los planos.

$\pi_1: x - z + 2 = 0$
$\pi_2: 2x + 2y + 3z + 3 = 0$
$\pi_3: 3x + 8y + 7z + 1 = 0$

8 Posiciones relativas de dos rectas

Sean las siguientes rectas r y s, cuyos puntos y vectores directores son:

$$r: \begin{cases} P(a, b, c) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(a', b', c') \\ \vec{v}' = (v_1', v_2', v_3') \end{cases}$$

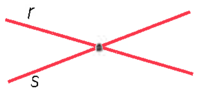
Estas rectas en el espacio pueden ser:

Coincidentes

Las dos rectas son la misma.

Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ y el vector $\overrightarrow{PQ}$ son proporcionales.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1' & v_2' & v_3' \\ a'-a & b'-b & c'-c \end{pmatrix} = 1$$

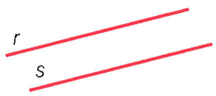


Secantes

Las dos rectas se cortan en un solo punto.

Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ no son proporcionales y el vector $\overrightarrow{PQ}$ es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{v}'$.

$$\begin{cases} \text{Rango}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1' & v_2' & v_3' \end{pmatrix} = 2 \\ \text{Rango}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1' & v_2' & v_3' \\ a'-a & b'-b & c'-c \end{pmatrix} = 2 \end{cases}$$

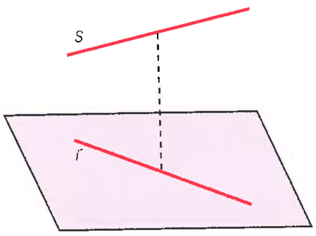


Paralelas

Las dos rectas no tienen puntos comunes, pero están contenidas en el mismo plano.

Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ son proporcionales, pero no son proporcionales al vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\begin{cases} \text{Rango}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1' & v_2' & v_3' \end{pmatrix} = 1 \\ \text{Rango}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1' & v_2' & v_3' \\ a'-a & b'-b & c'-c \end{pmatrix} = 2 \end{cases}$$



Rectas que se cruzan

Las dos rectas no tienen puntos comunes, ni están contenidas en el mismo plano.

Los vectores $\vec{v}\,\vec{v}'$ y $\overrightarrow{PQ}$ forman una base.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1' & v_2' & v_3' \\ a'-a & b'-b & c'-c \end{pmatrix} = 3$$

SABER HACER

Hallar la posición de dos rectas por sus vectores directores

▶ Determina la posición relativa de las rectas.

$$r: (x, y, z) = (1, -1, 0) + t(1, 1, 2) \qquad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

PRIMERO. Se halla un punto y su vector director en cada recta.

$$r: \begin{cases} P(1, -1, 0) \\ \vec{v} = (1, 1, 2) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(1, 1, 1) \\ \vec{v}' = (1, -1, 2) \end{cases}$$

SEGUNDO. Se calcula el rango de la matriz que forman los vectores directores y de la matriz formada por estos y el vector que tiene por extremos un punto de cada recta.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \qquad \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Las rectas se cruzan.

ACTIVIDADES

26. Estudia la posición relativa de las dos rectas dadas a continuación.

$$r: \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -\lambda - 3 \end{cases} \quad \text{y } s: x = y = z$$

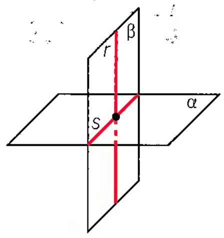
27. Estudia la posición relativa entre el siguiente par de rectas.

$$r: \begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda + 2 \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \text{ y } s: \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ x - 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

Podemos estudiar la posición relativa de dos rectas con sus ecuaciones implícitas.

$$r\colon \left.\begin{matrix} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A'_1x + B'_1y + C'_1z + D'_1 = 0 \end{matrix}\right\} \qquad s\colon \left.\begin{matrix} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A'_2x + B'_2y + C'_2z + D'_2 = 0 \end{matrix}\right\}$$

Para ello estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas, es decir, el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada.



$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 & D'_2 \end{pmatrix}$$

Coincidentes

Su intersección es toda la recta. Rango $(M) = 2$ Rango $(M^*) = 2$
El sistema es compatible indeterminado.

Secantes

Su intersección es un punto. Rango $(M) = 3$ Rango $(M^*) = 3$
El sistema es compatible determinado.

Paralelas

No tienen intersección. Rango $(M) = 2$ Rango $(M^*) = 3$
El sistema es incompatible.
Sus vectores directores son proporcionales, entonces Rango $(M) = 2$.

Rectas que se cruzan

No tienen intersección. Rango $(M) = 3$ Rango $(M^*) = 4$
El sistema es incompatible.
Sus vectores directores no son proporcionales, entonces Rango $(M) = 3$.

SABER HACER

Hallar la posición de dos rectas mediante sus ecuaciones implícitas

▶ Determina la posición relativa de las rectas.

$$r\colon \left.\begin{matrix} x + y - z + 2 = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{matrix}\right\} \qquad s\colon \left.\begin{matrix} -x + 2y - 2z + 2 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{matrix}\right\}$$

PRIMERO. Se hallan la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las cuatro ecuaciones.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

SEGUNDO. Se calculan el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada.

Rango $(M) = 3$ Rango $(M^*) = 4$

Luego las dos rectas se cruzan.

ACTIVIDADES

28. Determina la posición relativa entre la recta $r\colon \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$ y la recta s que pasa por los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(1, 0, -1)$.

29. Considera las rectas $r\colon \begin{cases} x = 2z + m \\ y = -z + 3 \end{cases}$ y $s\colon \begin{cases} x = -z + 1 \\ y = 2z + n \end{cases}$.
Halla la condición que deben cumplir m y n para que las rectas r y s sean coplanarias (pertenezcan al mismo plano).

9 Perpendicularidad entre recta y plano

Una **recta** r y un **plano** π son **ortogonales** cuando el vector director de la recta es perpendicular al plano.

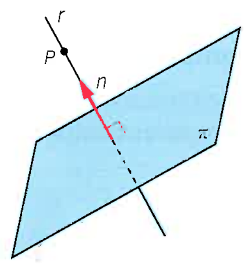
Se escribe así

Cuando decimos que dos elementos son **perpendiculares**, esto es equivalente a afirmar que uno es **normal** al otro o que son **ortogonales**.

SABER HACER

Calcular una recta perpendicular a un plano

▶ **Halla la recta perpendicular al plano π: $2x - 3y + z - 1 = 0$, que pasa por el punto $P(0, 2, 0)$.**



PRIMERO. Se halla un vector normal al plano.

Un vector normal al plano π es $\vec{n} = (2, -3, 1)$.

SEGUNDO. Se calcula la ecuación de la recta que tiene por vector director el vector normal al plano y pasa por el punto pedido.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n} = (2, -3, 1)\\ P(0, 2, 0)\end{array}\right\} \rightarrow r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1}$$

SABER HACER

Calcular un plano perpendicular a una recta

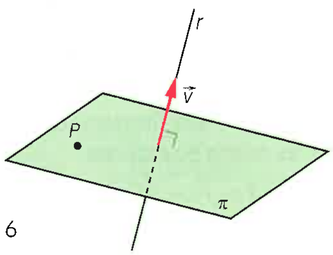
▶ **Halla el plano perpendicular a la recta r: $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1}$, que contiene al punto $P(0, 2, 0)$.**

PRIMERO. Se halla un vector director de la recta.

Un vector director de la recta es $\vec{v} = (2, -3, 1)$.

SEGUNDO. Se calcula la ecuación del plano que tiene por vector normal el vector director de la recta.

$\vec{v} = (2, -3, 1) \rightarrow$ La ecuación del plano es de la forma π: $2x - 3y + z + D = 0$.



TERCERO. Se impone la condición de que el punto pertenezca al plano para calcular el valor de la constante D.

$P(0, 2, 0) \rightarrow 2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 0 + D = 0 \rightarrow D = 6$

Así, la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto P es:

π: $2x - 3y + z + 6 = 0$

ACTIVIDADES

30. Determina la ecuación general de la recta que es perpendicular al plano π: $x + 2y - 3z + 1 = 0$ y que pasa por el punto $A(1, 1, -6)$.

31. Halla la ecuación general del plano que es perpendicular a la recta r: $\frac{x}{2} = \frac{1-y}{1} = \frac{z}{1}$ y contiene al punto $A(0, -1, 1)$.

32. Estudia la posición relativa entre la recta r cuyas ecuaciones paramétricas son $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ y la recta s que pasa por el punto $P(3, -1, 2)$ y es perpendicular al plano π: $2x - y + z - 1 = 0$

10 Haces de planos

10.1. Haz de planos paralelos

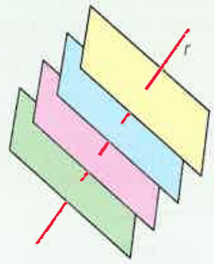
Dado un plano $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, llamamos **haz de planos paralelos** a π al conjunto de todos los planos que son paralelos a él.

Un plano paralelo a π: $Ax + By + Cz + D = 0$ tiene el mismo vector normal que π, $\vec{n} = (A, B, C)$. Así, la ecuación general de un plano paralelo a π será de la forma:

$$\pi: Ax + By + Cz + D' = 0 \quad \text{con } D' \in \mathbb{R}$$

Date cuenta

Todos los planos del haz de planos paralelos a π son perpendiculares a la recta cuyo vector director es el vector normal de π.



10.2. Haz de planos secantes

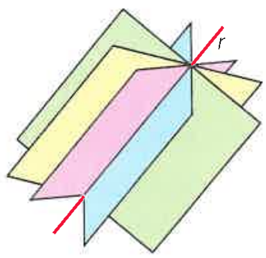
El **haz de planos secantes** a una recta r es el conjunto de todos los planos que contienen a dicha recta.

Si expresamos la recta como intersección de dos planos:

$$r: \left.\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Cualquier plano π: $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ que contenga a la recta no cambia la solución del sistema de ecuaciones.

$$r: \left.\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}\right\}$$



Así, la ecuación del nuevo plano es combinación lineal de las otras.

$$A'x + B'y + C'z + D' = \mu(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2)$$

En la práctica, consideramos que la ecuación del haz de planos secantes es:

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

EJEMPLO

4 Halla el haz de planos secantes y el haz de planos perpendiculares de la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1}$.

Escribimos la recta en forma implícita: $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} \\ \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 2y - 4 = 0 \\ y + 3z - 2 = 0 \end{array}\right\}$

Haz de planos secantes: $(3x + 2y - 4) + \lambda(y + 3z - 2) = 0$

Hallamos el vector director de la recta: $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1} \rightarrow \vec{v} = (2, -3, 1)$

El haz de planos perpendiculares tiene por vector normal el vector director de la recta:

$$\vec{v} = (2, -3, 1) \rightarrow 2x - 3y + z + D = 0$$

ACTIVIDADES

33. Calcula los valores de a y b para que los planos π_1: $2x + y - 3z + 5 = 0$, π_2: $2x + a^2y - 3z = 0$ y π_3: $4x + 2y + bz - 3 = 0$ pertenezcan al mismo haz de planos paralelos.

34. Determina los valores de a y b para que los planos π_1: $x + 2y - z - 1 = 0$, π_2: $2x + y + az = 0$ y π_3: $3x + 3y - 2z - b = 0$ pertenezcan al mismo haz de planos secantes.

Ecuaciones de la recta

Comprobar que un punto pertenece a una recta en función de un parámetro

En el espacio se da la recta definida por los dos puntos (1, 2, 3) y (−1, 6, 2). Halla el valor del parámetro k para que el punto (k, $2k$, $3k$) pertenezca a dicha recta.

PRIMERO. Se determina la ecuación de la recta.

En este caso, para calcular la ecuación de la recta se conocen dos puntos por los que pasa:

$A(1, 2, 3) \qquad B(-1, 6, 2)$

Se calcula su vector director:

$\overrightarrow{AB} = (-1, 6, 2) - (1, 2, 3) = (-2, 4, -1)$

Las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$r: \left.\begin{aligned} x &= 1 - 2\lambda \\ y &= 2 + 4\lambda \\ z &= 3 - \lambda \end{aligned}\right\}$$

SEGUNDO. Se aplica la condición de que el punto pertenece a la recta.

Como $(k, 2k, 3k) \in r$, cumple la ecuación de la recta:

$$\left.\begin{aligned} k &= 1 - 2\lambda \\ 2k &= 2 + 4\lambda \\ 3k &= 3 - \lambda \end{aligned}\right\}$$

TERCERO. Se resuelve el sistema de ecuaciones que resulta.

En la primera ecuación ya está despejada k, se sustituye en las otras dos:

$$\left.\begin{aligned} k &= 1 - 2\lambda \\ 2k &= 2 + 4\lambda \\ 3k &= 3 - \lambda \end{aligned}\right\} \xrightarrow{k=1-2\lambda} \left.\begin{aligned} 2(1-2\lambda) &= 2 + 4\lambda \\ 3(1-2\lambda) &= 3 - \lambda \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} 2 - 4\lambda &= 2 + 4\lambda \\ 3 - 6\lambda &= 3 - \lambda \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} \lambda &= 0 \\ k &= 1 \end{aligned}\right.$$

CUARTO. Se sustituyen los valores del parámetro para obtener el punto pedido.

$k = 1 \rightarrow (k, 2k, 3k) = (1, 2, 3)$

QUINTO. Se comprueba que el punto pertenece a la recta.

Se sustituye el punto y se ve que existe un λ para el que se verifican las ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 1 - 2\lambda \\ 2 &= 2 + 4\lambda \\ 3 &= 3 - \lambda \end{aligned}\right\} \rightarrow \lambda = 0$$

(1, 2, 3) es el punto de la recta para el valor $\lambda = 0$.

PRACTICA

35. Considera la recta que pasa por los puntos $A(0, -2, 1)$ y $B(4, 0, -1)$.

a) Determina el valor del parámetro a para que el punto $C(4 + a, a - 1, -a)$ pertenezca a dicha recta.

b) Calcula el valor de m para que $D(2m, 3m + 2, 5 + m)$ pertenezca a la recta.

Ecuaciones de la recta

Calcular la ecuación de una recta que pasa por un punto y es paralela a otra recta

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-1, 2, 0)$ y es paralela a la recta

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{-2}.$$

PRIMERO. Se calcula el vector director de la recta que se da. El vector director de la recta será el mismo por ser las dos rectas paralelas.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{-2} \rightarrow \vec{v}_r = (2, -1, -2)$$

SEGUNDO. Se escribe la ecuación de la recta con el vector director que se ha calculado y el punto que se da. La ecuación continua de la recta será:

$$\left.\begin{aligned} v_s &= (2, -1, -2) \\ P&(-1, 2, 0) \end{aligned}\right\} \rightarrow s: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{-2}$$

PRACTICA

36. Halla la ecuación de la recta que contiene al punto $P(-1, -2, -3)$ y es paralela a la recta

$$r: \left.\begin{aligned} x + y - z - 1 &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Ecuaciones del plano

Calcular la ecuación de un plano que contiene a una recta y a un punto exterior a ella

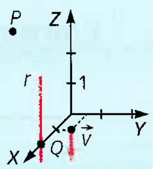
Halla la ecuación del plano que contiene al punto $P(0, -2, 3)$ y a la recta r: $(\lambda + 2, \lambda, -\lambda)$.

PRIMERO. Se calculan las coordenadas del vector director de la recta y de uno de sus puntos.

$$r \left\{\begin{aligned} &\vec{v} = (1, 1, -1) \\ &(\lambda + 2, \lambda, -\lambda) \end{aligned}\right. \xrightarrow{\lambda = 0} Q(2, 0, 0) \in r$$

SEGUNDO. Dos vectores directores del plano son:

- El vector director de la recta.
- El vector con origen en el punto que da el problema y de extremo el punto hallado.



$\overrightarrow{PQ} = (2 - 0, 0 + 2, 0 - 3) = (2, 2, -3)$

$$\begin{vmatrix} x & y+2 & z-3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -x + y + 2 = 0$$

El plano que contiene a P y a r es π: $x - y - 2 = 0$.

PRACTICA

37. Halla la ecuación del plano que contiene al punto $P(-1, -2, -3)$ y a la recta r: $\left.\begin{aligned} x + y - z - 1 &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$.

Ecuaciones del plano

Calcular la ecuación de un plano que contiene a dos rectas secantes

Halla la ecuación del plano que contiene a estas dos rectas. $r: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{1}$ $\quad s: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$

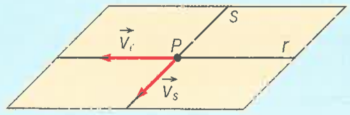
PRIMERO. Se determina la posición relativa de las dos rectas.

$$r: \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -2, 1) \\ P(-1, 0, 0) \end{cases} \quad s: \begin{cases} \vec{v}_s = (2, 2, -1) \\ Q(0, 2, -1) \end{cases} \quad \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0+1 & 2-0 & -1-0 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son secantes.

SEGUNDO. Los vectores directores del plano son los vectores directores de las rectas. Cualquier punto de las rectas pertenecerá al plano.

$$\pi: \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -2, 1) \\ \vec{v}_s = (2, 2, -1) \\ P(-1, 0, 0) \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3y + 6z = 0$$



El plano que contiene a las dos rectas es $\pi: y + 2z = 0$.

PRACTICA

38. Halla la ecuación del plano que contiene a estas dos rectas.

$$r: \left.\begin{matrix} 2x + z - 2 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{matrix}\right\} \qquad s: \left.\begin{matrix} 2x + y + 2 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{matrix}\right\}$$

Ecuaciones del plano

Calcular la ecuación de un plano que contiene a dos rectas paralelas

Halla la ecuación del plano que contiene a estas dos rectas. $r: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$ $\quad s: \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z}{2}$

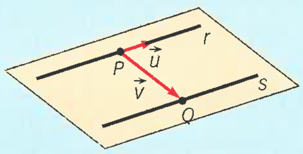
PRIMERO. Se determina la posición relativa de las dos rectas.

$$r: \begin{cases} \vec{v}_r = (-1, -2, 1) \\ P(0, 1, -2) \end{cases} \quad s: \begin{cases} \vec{v}_s = (-2, -4, 2) \\ Q(-1, 3, 0) \end{cases} \quad \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1-0 & 3-1 & 0+2 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

Las rectas son paralelas.

SEGUNDO. Los vectores directores del plano son uno de los vectores directores de una de las rectas y el vector generado por un punto de cada recta. Cualquier punto de las rectas pertenecerá al plano.

$$\pi: \begin{cases} \vec{v}_r = (-1, -2, 1) \\ \overrightarrow{PQ} = (-1, 2, 2) \\ P(0, 1, -2) \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x & y-1 & z+2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -6x + y - 4z - 9 = 0$$



El plano que contiene a las dos rectas es $\pi: -6x + y - 4z - 9 = 0$.

PRACTICA

39. Halla la ecuación del plano que contiene a estas dos rectas.

$$r: \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \qquad s: \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{4}$$

SABER HACER

Ecuaciones del plano

Calcular la ecuación de un plano que pasa por un punto y es paralelo a otro plano

Halla la ecuación del plano que contiene al punto $P(2, -1, -2)$ y que es paralelo al plano π: $-2x + 3y - z + 3 = 0$.

PRIMERO. Se determina el vector normal al plano dado.

$$\pi: -2x + 3y - z + 3 = 0 \rightarrow \vec{n} = (-2, 3, -1)$$

SEGUNDO. El plano que se busca tiene como vector normal el vector calculado y pasa por el punto dado.

Si el vector normal de π' es $\vec{n} = (-2, 3, -1)$:

$$\pi': -2x + 3y - z + D = 0$$

Si $P(2, -1, -2)$ está en el plano:

$$-2x + 3y - z + D = 0 \xrightarrow{P(2,-1,-2)}$$
$$-2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - (-2) + D = 0 \rightarrow D = 5$$

Por tanto, la ecuación del plano es:

$$\pi': -2x + 3y - z + 5 = 0$$

PRACTICA

40. Halla la ecuación del plano que contiene a $P(3, -1, 2)$ y que es paralelo al plano π: $3x - y + z + 1 = 0$.

Ecuaciones del plano

Calcular la ecuación de un plano que contiene a una recta y que es perpendicular a otro plano

Halla la ecuación del plano perpendicular al plano π: $x + y - 2z + 1 = 0$ que contiene a la recta $r: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-1}$.

PRIMERO. Se determina el vector normal al plano dado, y el vector director y un punto de la recta dada.

$$\vec{n} = (1, 1, -2) \qquad r: \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 2, -1) \\ P(2, 0, 0) \end{cases}$$

SEGUNDO. El plano que se busca tiene como vectores directores estos dos vectores y pasa por cualquier punto de la recta.

$$\pi: \begin{cases} \vec{n} = (1, 1, -2) \\ \vec{v}_r = (1, 2, -1) \\ P(2, 0, 0) \end{cases} \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3x - y + z - 6 = 0$$

El plano buscado es π: $3x - y + z - 6 = 0$.

PRACTICA

41. Halla la ecuación del plano perpendicular al plano π: $-x - 2y + 3z + 2 = 0$ que contiene a $r: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z}{2}$.

Ecuaciones de rectas y planos

Calcular la ecuación de la recta perpendicular a dos rectas

Dadas las rectas: $r: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$ y $s: \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ -2x + z - 1 = 0 \end{cases}$, halla la ecuación de la recta perpendicular a ambas.

PRIMERO. Se determina la posición relativa de las dos rectas. Para que la solución sea única, las rectas deben ser secantes o cruzarse.

$$\vec{v}_r = (1, 2, 1) \qquad \vec{v}_s = (2, 1, 0) \times (-2, 0, 1) = (1, -2, 2)$$

Los vectores directores de las rectas no son proporcionales; por tanto, las rectas se cortan o se cruzan en el espacio.

SEGUNDO. Se determina el plano que contiene a una de las rectas y es perpendicular a la otra recta.

Se toma un punto de la recta r y su vector director para asegurar que dicha recta esté contenida en el plano, y como segundo vector se toma $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, que es perpendicular a ambas rectas y, por tanto, a s.

$$\pi: \begin{cases} P = (-1, 1, 0) \\ \vec{u} = (1, 2, 1) \\ \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (6, -1, -4) \end{cases} \qquad \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -7x + 10y - 13z + 17 = 0$$

TERCERO. Se determina el punto de intersección del plano con la recta que no está contenida en él.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - 3 = 0 \\ -2x + z - 1 = 0 \\ -7x + 10y - 13z + 17 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow R\left(\frac{34}{53}, \frac{91}{53}, \frac{121}{53}\right)$$

CUARTO. La recta buscada tiene como vector director $\vec{n}$ y pasa por el punto calculado.

$$t: \begin{cases} \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (6, -1, -4) \\ R\left(\frac{34}{53}, \frac{91}{53}, \frac{121}{53}\right) \end{cases} \rightarrow t: (x, y, z) = \left(\frac{34}{53}, \frac{91}{53}, \frac{121}{53}\right) + \lambda(6, -1, -4)$$

PRACTICA

42. Encuentra la ecuación de la recta secante perpendicular común a r y s.

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - 2y - z + 2 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Posiciones relativas de dos rectas

Determinar las posiciones relativas de dos rectas en función de un parámetro

Considera las rectas:

$$r: x - 3 = y - 4 = \frac{z-5}{2}$$

$$s: \frac{x-5}{-2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-m}{2}, \text{ donde } m \in \mathbb{R}$$

Estudia, según los valores del parámetro m, las posiciones relativas de las dos rectas.

PRIMERO. Se hallan un punto y un vector director de cada recta.

$$r: \begin{cases} P(3, 4, 5) \\ \vec{v} = (1, 1, 2) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(5, 4, m) \\ \vec{v'} = (-2, -1, 2) \end{cases}$$

SEGUNDO. Se escriben la matriz formada por los vectores directores y la matriz formada por estos y el vector que tiene por extremos un punto de cada recta.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} = (2, 0, m-5) \rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & m-5 \end{pmatrix}$$

TERCERO. Se calcula el rango de las matrices.

- Rango de M:

  Los vectores no son proporcionales → Rango $(M) = 2$
- Rango de M^*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & m-5 \end{vmatrix} = m + 3$$

Si $m = -3 \rightarrow$ Rango $(M^*) = 2$

Si $m \neq -3 \rightarrow$ Rango $(M^*) = 3$

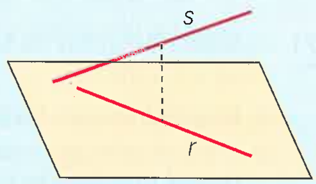
CUARTO. Se analizan los resultados obtenidos en los cálculos anteriores.

- Si $m = -3 \rightarrow$ Rango $(M) = 2$ y Rango $(M^*) = 2$

  En este caso, las rectas son secantes y se cortan en un punto.

- Si $m \neq -3 \rightarrow$ Rango $(M) = 2$ y Rango $(M^*) = 3$

  En este caso, las rectas no se cortan en ningún punto. Las rectas se cruzan.



PRACTICA

43. Estudia, en función de los valores del parámetro m, la posición relativa de estas rectas.

$$r: (m + \lambda, -1 + (2m-1)\lambda, 2\lambda)$$

$$s: \frac{x}{m+1} = 2 - y = z + 2$$

Posiciones relativas de recta y plano

Determinar las posiciones relativas de una recta y un plano en función de un parámetro

Sean el plano $\pi: ax + 2y - 4z = b$ y la recta $r: \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$.

Determina los valores de a y b para que la recta r esté contenida en el plano π.

PRIMERO. Se calculan las ecuaciones implícitas de la recta.

$$r: \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1} \rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} \\ \frac{x-3}{4} = \frac{z+3}{1} \end{matrix}\right\}$$

$$\rightarrow r: \left.\begin{matrix} x + y - 4 = 0 \\ x - 4z - 15 = 0 \end{matrix}\right\}$$

SEGUNDO. Se hallan la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las ecuaciones implícitas de la recta y la del plano.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ a & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -4 & -15 \\ a & 2 & -4 & -b \end{pmatrix}$$

TERCERO. Se calcula el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada en función de los parámetros.

$$|M| = 12 - 4a = 0 \rightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \rightarrow$ Rango $(M) = 3$ y Rango $(M^*) = 3$
- Si $a = 3 \rightarrow$ Rango $(M) = 2$

$$\text{Rango} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -4 & -15 \\ 3 & 2 & -4 & -b \end{pmatrix} = \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & -1 & -4 & -b+12 \end{pmatrix} =$$

$$= \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -b+23 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si } b = 23 \\ 3 & \text{si } b \neq 23 \end{cases}$$

CUARTO. Se analizan los resultados obtenidos al calcular los rangos anteriores en función de los parámetros.

- Si $a \neq 3 \rightarrow$ Rango $(M) = 3$ y Rango $(M^*) = 3$

  La recta y el plano se cortan en un punto.
- Si $a = 3$ y $b \neq 23 \rightarrow$ Rango $(M) = 2$ y Rango $(M^*) = 3$

  La recta y el plano son paralelos.
- Si $a = 3$ y $b = 23 \rightarrow$ Rango $(M) = 2$ y Rango $(M^*) = 2$

  La recta está contenida en el plano.

  El plano $\pi: 3x + 2y - 4z = 23$ contiene a la recta $r: \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$.

PRACTICA

44. Dados el plano $\pi: ax + 2y - 4z - b = 0$ y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = z + 3$, determina los valores de a y b para que la recta esté contenida en el plano.

Ecuaciones de rectas y planos

45. Sean los puntos $A(2, 1, 1)$, $B(-3, 0, 2)$ y $C(1, -2, 4)$. Indica si alguno de estos puntos pertenece a la recta de ecuación $r: \left.\begin{array}{l} x = 4 - t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{array}\right\}$.

46. Determina el punto de la recta $r: \left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z - 6 = 0 \end{array}\right\}$ cuya segunda coordenada sea nula.

47. Determina todas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(1, 2, 2)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v} = (-1, 2, 3)$.

48. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(3, 5, -1)$ y $B(2, 1, -2)$.

49. Determina la ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(-3, 2, 7)$ y es paralela al:

a) Eje OX b) Eje OY c) Eje OZ

50. Determina, en cada caso, las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P y es paralela a la recta r.

a) $P(1, -3, 0)$ y $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{5} = z$

b) $P(5, 1, 1)$ y $r: \left.\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{array}\right\}$

51. ¿Existe algún valor de m para el que el punto $M(m, m, m)$ pertenezca a la recta r? Estúdialo en cada caso.

a) $r: (5 - 3t, 1 + t, -1 + 3t)$ b) $r: x - 1 = \dfrac{y+2}{-2} = z$

52. Calcula los valores de m y n para los cuales el punto $P(m + n, 2m - n, 2)$ pertenezca a la recta que pasa por los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(-3, 0, -1)$.

53. ¿Pertenece el punto $P(-1, 2, 7)$ a la recta $r: \left.\begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{array}\right\}$?

En caso negativo, obtén la ecuación en forma paramétrica de la recta paralela a r que pasa por dicho punto.

54. Determina todas las ecuaciones del plano que contiene a los puntos $A(2, 3, -1)$, $B(0, 1, 1)$ y $C(3, 0, 0)$.

55. Determina la ecuación general del plano que contiene al punto $P(2, 1, 1)$ y cuyos vectores directores son $\vec{u} = (1, 0, 1)$ y $\vec{v} = (-2, 1, 0)$.

56. Determina la ecuación general del plano que contiene al punto $P(-3, 3, 1)$ y cuyo vector normal es $\vec{n} = (2, 1, -1)$.

57. El plano $mx + 3y - 2z + 4 = 0$ pasa por el punto $P(1, -2, 1)$. Calcula el valor de m.

58. Determina la ecuación del plano que contiene al punto $P(3, 3, 1)$ y es paralelo al plano de ecuación $x - y + z - 1 = 0$.

59. Determina la ecuación general del plano que contiene al punto $P(2, -4, 2)$ y es perpendicular a la recta $r: (\lambda, \lambda, \lambda)$.

60. Determina la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen de coordenadas es el punto $P(1, 3, 2)$.

61. Determina la ecuación general del plano que contiene al punto $P(-1, -1, 1)$, tiene la dirección del vector $\vec{v} = (1, 0, -2)$ y es paralelo a la recta de ecuación $s: \dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z}{4}$.

62. Determina los puntos de corte de estos planos con los ejes de coordenadas.

a) $\pi: 2x - 3y + 4z - 12 = 0$ b) $\pi: 2x - z + 6 = 0$

63. Sabemos que el plano $\pi = Ax + By + Cz - 8 = 0$ corta a los ejes de coordenadas en los puntos $P(4, 0, 0)$, $Q(0, -2, 0)$ y $R(0, 0, 1)$. Determina la ecuación del plano π.

64. Calcula el valor de m en cada caso para que el punto $A(2, -1, m)$ pertenezca a estas rectas.

a) $r: \left.\begin{array}{l} x = \lambda - 2 \\ y = \lambda + 1 \\ z = 3\lambda + 2 \end{array}\right\}$

b) $s: \left.\begin{array}{r} x + 3y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{array}\right\}$

65. Determina si están alineados los puntos $A(1, -1, 0)$, $B(2, -2, 1)$ y $C(0, 0, -1)$.

66. Calcula el valor de a para que los puntos $A(4, -2, 1)$, $B(2, 2, -1)$ y $C(-1, a, -4)$ estén alineados.

67. Encuentra los valores de a y b que hacen que los tres puntos estén alineados: $P(2, -1, a)$, $Q(5, 1, 6)$ y $R(b, -5, 9)$.

68. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(3, 1, 0)$, $B(4, 5, 2)$ y $C(4, 7, -2)$.

a) Halla el cuarto vértice del paralelogramo.

b) Calcula su perímetro.

69. Demuestra si son o no coplanarios los puntos $A(3, -1, 2)$, $B(2, 5, 1)$, $C(-1, 0, 3)$ y $D(0, 1, -3)$.

70. Calcula el valor de a para que los puntos $A(0, 0, 6)$, $B(1, -1, 7)$, $C(-2, 3, -5)$ y $D(-3, -1, a)$ sean coplanarios.

71. Considera los puntos del espacio: $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 2)$ y $C(0, -1, -1)$.

a) Encuentra la ecuación del plano ABC.

b) Si D es el punto de coordenadas $(k, 0, 0)$, ¿cuánto ha de valer k para que los cuatro puntos A, B, C y D sean coplanarios?

72. Sean los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(a, 2, b)$ y $C(1, 0, 0)$.

a) Con $a = 2$, calcula b para que los tres puntos determinen un plano que pase por el punto $P(2, 0, 1)$. ¿Cuál es la ecuación de dicho plano?

b) Calcula los valores de a y b para que los puntos A, B y C estén alineados.

73. Sean A y B los puntos del espacio de coordenadas $A(0, 1, 2)$ y $B(1, 2, 3)$. Encuentra la ecuación paramétrica de la recta que pasa por dichos puntos.

¿Existen valores de r y s para los cuales el punto C de coordenadas $C(3, r+s, r-s)$ pertenezca a la recta calculada antes? En caso afirmativo, calcula los valores de r y s. Razona la contestación en caso negativo.

Posiciones relativas

74. Estudia las posiciones relativas de las parejas de rectas siguientes.

a) $r\colon \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+2}{3} = z-3$

$s\colon x-2 = \dfrac{y+4}{-1} = \dfrac{z-4}{-2}$

b) $r\colon \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = z+4$

$s\colon \dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$

c) $r\colon \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$

$s\colon \left.\begin{array}{r} 3x+z=10 \\ 5x-y-z=16 \end{array}\right\}$

d) $r\colon \left.\begin{array}{r} 2x+z=4 \\ x+3y+z=4 \end{array}\right\}$

$s\colon \left.\begin{array}{r} x+y-z=8 \\ 3x-y+3z=18 \end{array}\right\}$

e) $r\colon \left.\begin{array}{r} 2x+4y-z=7 \\ -x+y+2z=-2 \end{array}\right\}$

$s\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$

75. Di si las dos rectas son o no paralelas.

$$r\colon \left.\begin{array}{r} x+2y-z=13 \\ 2x-y-7z=16 \end{array}\right\} \qquad s\colon \left.\begin{array}{l} x=1-3\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-\lambda \end{array}\right\}$$

En caso afirmativo, determina la ecuación del plano que las contiene.

76. Decide si estas dos rectas se cortan y, en caso afirmativo, determina el punto de corte.

$$r\colon \left.\begin{array}{l} x=-4+7\lambda \\ y=2\lambda \\ z=-1 \end{array}\right\} \qquad s\colon \left.\begin{array}{l} x=1-\mu \\ y=10+4\mu \\ z=3+2\mu \end{array}\right\}$$

77. Decide si las dos rectas se cortan, y en caso de que sea así, calcula el plano que las contiene.

$$r\colon \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \qquad s\colon \left.\begin{array}{l} x=3-2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-\lambda \end{array}\right\}$$

78. Decide las posiciones relativas de las siguientes parejas formadas por una recta y un plano.

a) $r\colon \left.\begin{array}{l} x=3-\lambda \\ y=2 \\ z=-1+3\lambda \end{array}\right\} \qquad \pi\colon 2x-3y+z-2=0$

b) $r\colon \left.\begin{array}{r} 2x+y-3z+3=0 \\ 5x+5y-7z+1=0 \end{array}\right\} \qquad \pi\colon x+3y-z-5=0$

c) $r\colon \left.\begin{array}{r} -4x+y-2z+3=0 \\ 2x+4y+z+4=0 \end{array}\right\} \qquad \pi\colon \left.\begin{array}{l} x=-1-\lambda+\mu \\ y=2+2\lambda-\mu \\ z=3-\mu \end{array}\right\}$

79. Estudia las posiciones relativas de las parejas de planos.

a) $\pi\colon \left\{\begin{array}{l} x=2+2\lambda+\mu \\ y=-1+2\lambda-3\mu \\ z=1+5\mu \end{array}\right.$

$\pi'\colon -5x+5y+4z-12=0$

b) $\pi\colon x-2y+4z-1=0$

$\pi'\colon 2x+5y-3z+2=0$

c) $\pi\colon \left.\begin{array}{l} x=-\lambda-\mu \\ y=3+2\lambda+3\mu \\ z=1+3\lambda+4\mu \end{array}\right\}$

$\pi'\colon x-y+z+2=0$

80. Estudia las posiciones relativas de estos tríos de planos.

a) $\pi\colon 4x+y+3z+2=0$
$\pi'\colon -3x+5y+4z-7=0$
$\pi''\colon y+3z-6=0$

b) $\pi\colon x-2y+3z-1=0$
$\pi'\colon 2x+y-z+5=0$
$\pi''\colon 7x-4y+7z+7=0$

c) $\pi\colon 6x-3y+9z-1=0$
$\pi'\colon -x+2y-z+1=0$
$\pi''\colon 4x-2y+6z+5=0$

d) $\pi\colon 2x-3y+z=0$
$\pi'\colon 2x-y+4z+5=0$
$\pi''\colon 6x-5y+9z-1=0$

81. Calcula el valor que debe tomar m para que las siguientes rectas se corten en un punto.

$$r\colon \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{1}$$

$$s\colon \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=6+4\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{array}\right\}$$

82. Estudia la posición relativa entre las rectas

$r\colon \left.\begin{array}{r} x+y+z+3=0 \\ x-y-z-1=0 \end{array}\right\}$ y $s\colon \dfrac{x+1}{2} = y+1 = \dfrac{z+m}{-2}$

en función del parámetro m. Determina el punto de intersección en los casos en que r y s sean secantes.

ACTIVIDADES

83. Considera la recta $r: \left.\begin{matrix} x + y = 2 \\ y + 2 = 0 \end{matrix}\right\}$ y la recta s que pasa por los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(1, 0, -1)$.

a) Estudia la posición relativa entre ambas rectas.

b) Determina un punto C de la recta r tal que los segmentos CA y CB sean perpendiculares.

84. Determina el valor que debe tomar m para que las rectas $r: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{m^2} = \dfrac{z-m}{-4}$ y $s: \left.\begin{matrix} x = t + 2 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{matrix}\right\}$ sean paralelas. En ese caso, determina la ecuación del plano que las contiene.

85. Determina, en función del parámetro m, la posición relativa entre las rectas $r: \left.\begin{matrix} x + z - 1 = 0 \\ 2x + y + z + 1 = 0 \end{matrix}\right\}$ y $s: -x = y = \dfrac{z+1}{m}$.

86. Determina el valor de m para que las rectas $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{m} = \dfrac{z}{-3}$ y $s: x = y = z$ sean secantes y perpendiculares. Determina en ese caso la ecuación de la recta secante perpendicular común a ambas.

87. Determina la posición relativa entre la recta $r: \left.\begin{matrix} x + y - 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{matrix}\right\}$ y el plano $\pi: x + my - z - 6 = 0$ en función del parámetro m.

88. Dados la recta $r: \left.\begin{matrix} x = y \\ y = x \end{matrix}\right\}$ y el plano $\pi: 2x + 3y - az = 0$, estudia la posición relativa entre la recta y el plano en función del valor del parámetro a. Halla, cuando sea posible, las coordenadas del punto de intersección.

89. Considera el plano $\pi: ax + 2y - 4z - b = 0$ y la recta $r: \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z+3}{1}$. Estudia, en función de los valores de a y b, la posición relativa entre la recta y el plano.

90. El plano $\pi: 2x - y + mz - 4 = 0$ y la recta $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{2}$ son paralelos. Determina la ecuación del plano perpendicular al dado y que contenga a la recta.

91. Considera el plano de ecuación $\pi: 2x + 3y + z + 1 = 0$ y la recta de ecuación $r: \dfrac{-x}{2} = \dfrac{y}{-3} = -z$. ¿Son ortogonales? Razona la respuesta.

92. Sean dos planos de ecuaciones $\pi_1: ax + 9y - 3z - 8 = 0$ y $\pi_2: x + ay - z = 0$. Determina el valor de a para que:

a) Los planos sean paralelos.

b) Los planos sean perpendiculares.

93. Estudia en función del parámetro k la posición relativa de los tres planos en cada caso.

a) $\pi_1: x + y + z - 3 = 0$
$\pi_2: x + 2y + 3 = 0$
$\pi_3: x + 4y + kz + 15 = 0$

b) $\pi_1: 2x - ky + 4z = 0$
$\pi_2: x + y + 7z = 0$
$\pi_3: kx - y + 13z = 0$

94. Considera los planos $\pi_1: x - y = a$, $\pi_2: x + a^2z = 2a + 1$ y $\pi_3: x - y + (a^2 - a)z = 2a$.

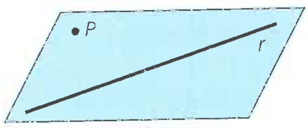
a) Estudia, en función del parámetro a, la posición relativa de los tres planos.

b) Si existe el caso en el que los tres planos son secantes en un punto o en una recta, encuentra el lugar geométrico expresándolo con detalle.

Problemas de geometría en el espacio

95. Determina la ecuación del plano que contiene a los puntos $A(0, 1, 1)$ y $B(1, 0, 1)$ y es paralelo a la recta de ecuación $r: (-3 + \lambda, 0, 1 + 2\lambda)$.

96. Determina la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuación $r: \left.\begin{matrix} 2x + y - z = 4 \\ x + y - 2z = 3 \end{matrix}\right\}$ y al punto $P(-2, 2, -2)$.



97. Determina la ecuación del plano perpendicular a la recta de ecuación $r: \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{-3}$ y que contiene al punto $A(-3, 1, 0)$.

98. Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano de ecuación $\pi: -x + 3y - 5z + 2 = 0$ y que pasa por el punto $A(0, -1, 5)$.

99. Dados la recta $r: \left.\begin{matrix} x = \lambda \\ y = \lambda - 1 \\ z = 2\lambda + 1 \end{matrix}\right\}$ y el plano $\pi: 7x - 2y + 6z + 9 = 0$, determina el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

100. Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$ y es paralelo a la recta $s: \left.\begin{matrix} x + 2y - z + 4 = 0 \\ 2x - 3y + 2z + 4 = 0 \end{matrix}\right\}$.

101. Considera las rectas $r: \left.\begin{matrix} x - 2y = 0 \\ y - 2z + 4 = 0 \end{matrix}\right\}$ y $s: \left.\begin{matrix} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{matrix}\right\}$.

Calcula la ecuación de un plano que contiene al punto $P(1, 1, 1)$ y es paralelo a ambas rectas.

102. Dadas las rectas

$$r_1: x = y = z$$

$$r_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$$

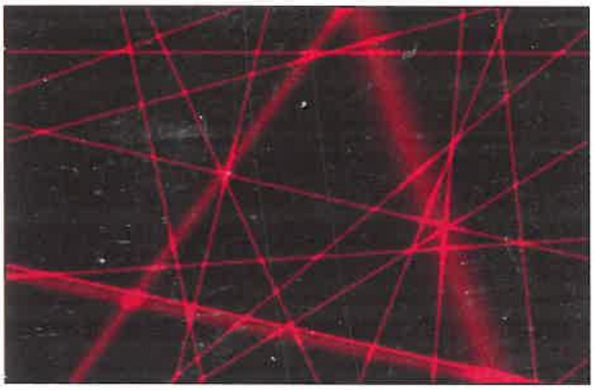
$$r_3: -x + 2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$$

Determina los tres puntos de corte de estas rectas con el plano π: $5x - 4y + 7z + 1 = 0$.

103. Dados la recta r: $(1, 1 + \lambda, 3 + 2\lambda)$ y los puntos $A(2, 1, 1)$ y $B(-3, 4, 3)$, determina el punto o los puntos P de la recta r para los que APB es un triángulo rectángulo de hipotenusa AB.

104. Consideremos la recta r: $2x - 2 = y + 2 = \dfrac{z+1}{4}$ y el punto $P(3, 5, -1)$. Halla un punto Q perteneciente a la recta r tal que la recta que pasa por los puntos P y Q sea paralela al plano π: $3x - 2y + z + 13 = 0$.

105. Demuestra que las rectas r: $(2t - 1, 1 - t, -t)$ y s: $\dfrac{x+5}{-1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-2}{m}$ son secantes para cualquier valor del parámetro m. Después, determina la recta perpendicular común a ambas y el plano que las contiene.



106. Dados la siguiente recta y plano:

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 5 \end{array}\right\} \qquad \pi: 3x + y - 2z + 8 = 0,$$

determina:

a) La posición relativa de la recta con el plano.

b) La ecuación de la recta paralela a s: $\dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z-1}{3}$ que corta al plano π en el punto P correspondiente a $x = 1$ e $y = 5$.

107. Considera la ecuación del plano π: $2x + y - z + 2 = 0$ y de la recta r: $(5 - 2t, t, 6 + mt)$. Determina:

a) La posición relativa entre la recta y el plano en función del parámetro m.

b) Para $m = -3$, la ecuación del plano que contiene a la recta y es perpendicular al plano.

c) Para $m = -3$, la ecuación del plano que es paralelo al plano y contiene a la recta.

108. Justifica que las rectas de ecuaciones r: $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 5 \\ 2x + y - 2z = 2 \end{array}\right\}$ y s: $\left.\begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 10 + 2\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{array}\right\}$ son secantes en un punto. Determina:

a) El punto de intersección entre ambas rectas.

b) La ecuación general de la recta que es secante y perpendicular a ambas rectas.

c) La ecuación del plano paralelo a ambas rectas y que contiene al punto $A(3, 2, 1)$.

109. Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$$

$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z+5}{3}$$

y el punto $P(1, 1, -1)$, buscamos la ecuación de la recta que pasa por P y que corta a r y a s. Para conseguirlo:

a) Encuentra la ecuación general o cartesiana (es decir, la ecuación de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del plano π que contiene a la recta r y al punto P.

b) Halla el punto M calculando el punto de intersección del plano π con la recta s.

c) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y M.

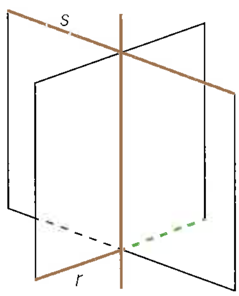
d) Comprueba que la recta encontrada en el apartado anterior es la que buscamos.

110. Considera el punto $P(3, -1, 1)$ y la recta de ecuación r: $\dfrac{x+2}{3} = -y = \dfrac{1-z}{2}$. Determina:

a) La ecuación del plano que contiene al punto y a la recta.

b) La ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y contiene al punto P.

111. Determina la recta perpendicular que corta a las rectas r y s en cada uno de los casos.



a) r: $\left.\begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}$

s: $\dfrac{x-1}{3} = y - 3 = \dfrac{z+1}{2}$

b) r: $\left.\begin{array}{r} 2x - y + 2z = 3 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{array}\right\}$

s: $x = y = z$

c) r: $\left.\begin{array}{r} 3x - 5y + z = 3 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{array}\right\}$

s: $\left.\begin{array}{r} x + 2y - 3 = 0 \\ y - 2z = 4 \end{array}\right\}$

112. Considera las rectas r: $(4 + 2\lambda, 2 - \lambda, 1 + \lambda)$ y s: $(4 + t, 2 + 3t, m - 2t)$.

a) Determina la posición relativa de r y s en función del parámetro m.

b) Calcula la perpendicular común a r y a s para $m = 1$.

ACTIVIDADES

113. Considera las rectas de ecuaciones:

$$r: \left.\begin{array}{r} x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{array}\right\} \text{ y } s: \left.\begin{array}{l} x = m + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{array}\right\}.$$

a) Estudia la posición relativa de las rectas en función de m.

b) Para $m = 0$, encuentra la ecuación de la recta perpendicular común a ambas rectas.

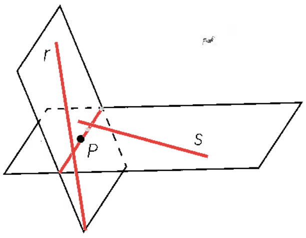
114. Considera las rectas de ecuaciones $r: \left.\begin{array}{r} x = 1 \\ z - y = 1 \end{array}\right\}$ y $s: \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = a \\ z = 1 + \lambda \end{array}\right\}$.

a) Estudia, en función del parámetro a, la posición relativa entre las rectas r y s.

b) Para $a = 1$, determina la ecuación de la recta secante perpendicular común a r y s.

c) Para $a = 0$, determina la ecuación de la recta secante perpendicular común a r y s.

115. Observa la ilustración y determina, en cada uno de los casos, la ecuación de la recta secante a las rectas r y s que pasa por el punto P.



a) $r: (1 + \lambda, \lambda, -\lambda)$ $\quad s: \dfrac{x - 2}{2} = y = \dfrac{z}{-3}$

$P(0, 1, 0)$

b) $r: \left.\begin{array}{r} -x + 2z = 2 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$ $\quad s: x - 3 = -y = \dfrac{z - 1}{-2}$

$P(0, 0, 1)$

c) $r: (-2\lambda, 1, 2)$ $\quad s: \left.\begin{array}{r} 3x - y = 10 \\ y + 3z = 5 \end{array}\right\}$

$P(1, 0, 0)$

116. Determina la ecuación de la recta secante a las rectas de ecuaciones $r: \left.\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = t - 1 \end{array}\right\}$ y $s: \dfrac{x - 2}{2} = y - 5 = \dfrac{z - 2}{1}$, sabiendo que pasa por el punto $A(0, 0, 1)$.

117. Dadas las rectas de ecuaciones $r: \left.\begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = m + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{array}\right\}$ y $s: x - 1 = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z + 2}{3}$, calcula los valores de m para los que las rectas son coplanarias. ¿Cuál es la posición relativa de r y s para ese valor de m?

118. Determina los extremos de un segmento AB sabiendo que el punto A pertenece al plano $2x + y + z = 0$, el punto B pertenece a la recta $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 2}{-1} = \dfrac{z}{3}$ y el punto medio del segmento es $(0, 0, 0)$.

119. Justifica que los planos $\pi_1: 2x - y + 3z - 5 = 0$ y $\pi_2: 5x - y + 6z = 3$ son secantes en una recta. Determina la ecuación paramétrica de esa recta.

120. Justifica que los planos de ecuaciones $\pi_1: x - 2z - 5 = 0$ y $\pi_2: -y + 4z + 4 = 0$ son secantes en una recta que pasa por el punto $P(3, 0, -1)$. Determina la ecuación paramétrica de esa recta.

121. Se consideran la recta $r: (x, y, z) = (t + 1, 2t, 3t)$, el plano $\pi: x - 2y - z = 0$ y el punto $P(1, 1, 1)$. Se pide:

a) Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto P y es paralelo al plano π.

b) Determinar la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y pasa por el punto P.

c) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de los planos anteriores, π_1 y π_2.

122. Estudia la posición relativa de los siguientes planos según el valor del parámetro a:

$$\pi_1: \left.\begin{array}{l} x = 3 - \lambda + 2\mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 1 + 2\mu \end{array}\right\} \qquad \pi_2: 4x + ay - 2z - 5 = 0$$

123. Determina el punto de intersección de la recta $r: \dfrac{x - 2}{2} = y = z$ con el plano paralelo a $\pi: -2x + y - z - 3 = 0$ que contiene al punto $A(1, 1, 1)$.

124. Determina la ecuación del plano paralelo a la recta de ecuación $r: \left.\begin{array}{r} x + y - 2z = 3 \\ x - y + 3z = -1 \end{array}\right\}$ que contiene a la recta de ecuación $s: \dfrac{x + 2}{-3} = \dfrac{2 - y}{2} = z$.

125. Estudia la posición relativa de los planos:

$$\pi_1: 3x - my - 2z - (m - 1) = 0$$
$$\pi_2: x + 3y - (m - 1)z = 0$$
$$\pi_3: 2x - 5y + 3z - 1 = 0$$

según los distintos valores del parámetro m.

126. Determina las condiciones que deben cumplir a y b para que los planos de ecuaciones π_1: $ax + z - 1 = 0$, π_2: $x + bz + 2 = 0$ y π_3: $\sqrt{5x} + 3y + 2z - 3 = 0$, se corten en un punto. Determina las coordenadas de ese punto.

127. Determina a y b para que los planos α: $x + 2y - z - 1 = 0$, β: $2x + y + az = 0$ y χ: $3x + 3y - 2z = b$ sean del mismo haz de planos.

128. Dados la recta r: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{3} = z$, el plano π: $x - y + 2z + 1 = 0$ y el punto $P(2, 1, -5)$, determina:

a) La posición relativa entre la recta r y el plano π. Si existe, determina el punto de intersección.

b) La ecuación del plano que contiene a la recta r y al punto P.

129. Dados el plano π: $5x - 4y + z = 0$ y la recta r: $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$, obtén la ecuación de la recta s contenida en π, que es perpendicular a r y que pasa por el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$.

130. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, 1, 1)$, es paralela al plano π: $x - y + z - 3 = 0$ y corta a la recta r: $\left.\begin{array}{r} x = 1 \\ y = 3 \end{array}\right\}$.

131. Considera las rectas:

$$r: \left.\begin{array}{l} x = m - 2\lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 2x + z = 1 \end{array}\right\}$$

a) Estudia, en función del parámetro m, la posición relativa entre las rectas r y s.

b) Para $m = \dfrac{3}{4}$, determina la ecuación de la recta secante perpendicular común a ambas rectas.

c) Para $m = -1$, determina la ecuación de la recta secante perpendicular común a las rectas r y s.

132. Determina las ecuaciones paramétricas de la recta que:

- Pasa por el punto de intersección del plano π: $x + y - z + 6 = 0$ con la recta r: $\left.\begin{array}{r} 3y - x = 6 \\ y - z = 3 \end{array}\right\}$
- Es paralela a la recta s: $(1 + 2\lambda, 1 - 6\lambda, -26\lambda)$.

133. Considera el plano π: $x + y - 4z + 7 = 0$, la recta r: $\left.\begin{array}{r} x = 2 \\ z = 3 \end{array}\right\}$ y el punto $P(3, -2, 1)$.

a) Determina la posición relativa entre la recta y el plano. Determina, si existe, su punto de intersección.

b) Determina la ecuación del plano que contiene al punto y a la recta.

c) Halla un punto Q de la recta de modo que la recta que pasa por P y Q sea paralela al plano.

134. Sean el punto $A(1, 2, 1)$ y la recta r: $x + 1 = y - 2 = \dfrac{z-3}{4}$.

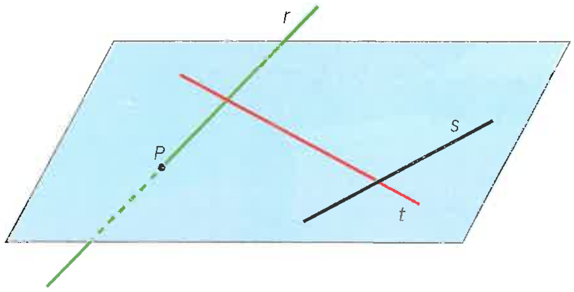
a) Determina la ecuación de la recta s que pasa por A y corta perpendicularmente a la recta r.

b) Determina la ecuación paramétrica de una recta que corte a r y s.

135. Determina la ecuación de la recta que corta a las rectas de ecuaciones r_1: $\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ z = 1 \end{array}\right\}$ y r_2: $(2\lambda - 3, 1, \lambda)$, y que es paralela a la recta r_3: $x = -y = z$.

136. Halla la ecuación general de una recta que pase por el punto $P(1, -1, 2)$, sea paralela al plano de ecuación π: $x - 3y + 2z - 1 = 0$ y sea secante a la recta r: $\left.\begin{array}{r} z - x = 1 \\ y = 2 \end{array}\right\}$. Determina el punto en el que se intersecan ambas rectas.

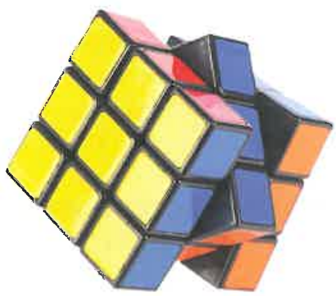
137. Halla las coordenadas de un punto P que pertenece a la recta r: $\left.\begin{array}{r} x - z = 0 \\ y + z = -1 \end{array}\right\}$ y que determina con la recta s: $\left.\begin{array}{r} 2x + z = -2 \\ x + y = 0 \end{array}\right\}$ un plano que contiene a la recta t: $\left.\begin{array}{r} x = -2 \\ y - z = 0 \end{array}\right\}$.



138. Decide si el plano $6x - 4y + z - 1 = 0$ pertenece al haz de planos definido por la recta $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z - 3 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{array}\right\}$.

En caso afirmativo, exprésalo como combinación lineal de los dos planos que definen la recta.

139. ¿Pueden estar dos caras de un cubo de Rubik apoyadas a la vez en los planos de ecuaciones π_1: $2x + 7y - z - 4 = 0$ y π_2: $-3x + y + z - 8 = 0$? Razona la respuesta.



MATEMÁTICAS EN TU VIDA

¿PARA QUÉ SIRVEN LOS PLANOS?

Para hacer mesas estables

Cuando apoyamos una mesa, el suelo realmente está haciendo la función de un plano. Para que la mesa sea estable, los cuatro puntos que son la base de las patas deben formar también un plano, es decir, ser coplanarios. En ese caso, el plano de las patas y del suelo serán el mismo cuando ponemos la mesa de pie, o sea, serán planos coincidentes.

Lo que ocurre en la práctica es que, en muchas ocasiones, las mesas de los bares no son de buena calidad y con el paso del tiempo las patas no están en su posición original.

Como ya sabemos, para construir un plano cualquiera necesitamos tres puntos. Como en general las mesas tienen cuatro patas, si los puntos que son bases de las patas no son coplanarios, entonces forman un espacio tridimensional y, por tanto, vamos a tener una mesa coja.

¿Cómo podemos prevenir este tipo de incomodidades?

Pues además de utilizar mejores materiales y mesas bien equilibradas, también existen otras opciones más matemáticas.

Si utilizamos una servilleta doblada y la ponemos debajo de la pata más corta, realmente lo que estamos haciendo matemáticamente es desplazar ese punto que me hacía saltar a una dimensión más, y convertirlo en coplanario con los otros tres. Así tendremos una mesa firme.

Por otra parte, está la opción de construir mesas de solo tres patas, ya que estas nunca estarán cojas. Eso ocurre porque el número mínimo de puntos que necesitamos para definir un plano es tres, y mientras que esos puntos, base de las patas, no estén alineados, la base de la mesa formará un plano y, por tanto, es imposible que esté coja.

Por este último motivo, muchos taburetes solo tienen tres patas, aunque también hay muchos otros objetos que se aprovechan de esta propiedad, como son los triciclos con los que juegan los niños o los trípodes usados en fotografía.

Resulta muy curioso que, aunque tengamos la imagen de que las matemáticas son abstractas, las podemos encontrar incluso en la mesa de un bar.

LEE Y COMPRENDE

1. Explica con tus propias palabras el salto de dimensión que hay entre cuatro puntos que son coplanarios y otros cuatro puntos que no lo sean.

INTERPRETA

2. ¿Crees que una mesa de 5, 6 o 7 patas tiene más posibilidades de estar coja? ¿Por qué?

REFLEXIONA

3. Si los seres humanos pudiéramos ver en más de tres dimensiones, ¿cuántos puntos como mínimo necesitaríamos para construir un espacio de cuatro dimensiones? ¿Y de cinco dimensiones?

APLICA

4. Busca otros objetos que puedan tener el mismo problema que las mesas.

6 Ángulos y distancias

CONTENIDOS

El domingo, tu día favorito. Tras una dura semana es el momento de disfrutar de la videoconsola y de leer ese libro que te tiene enganchado. Además, juega tu equipo de fútbol, es la final de un gran torneo de tenis y hay una apasionante carrera del mundial de MotoGP.

En tu casa tenéis la costumbre de ver las carreras de motos en familia porque a todos os gustan, y normalmente son en un día en que estáis reunidos. Te resulta muy interesante ver los adelantamientos, las velocidades máximas que se toman en pista o quién es capaz de hacer la vuelta rápida.

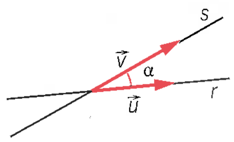
Pero, después de tantos años viendo carreras de motos, te sigue sorprendiendo la misma pregunta: ¿cómo se pueden inclinar tanto los pilotos en las curvas?

Desde hace unos años, en la propia retransmisión en directo de la carrera, se van marcando los ángulos que van tomando los pilotos en cada curva. Y, por supuesto, en ese proceso las matemáticas tienen mucho que decir.

¿Cómo se sabe el ángulo de inclinación con el que un piloto toma una curva?

1 Ángulos en el espacio

1.1. Ángulo entre dos rectas



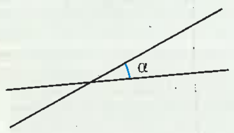
El **ángulo que forman dos rectas**, r y s, es el menor ángulo que se puede formar entre sus vectores directores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Se calcula como:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$$

1.2. Ángulo entre una recta y un plano

Date cuenta

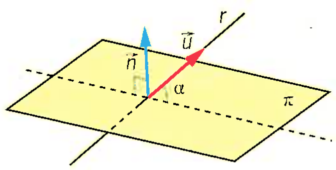
El ángulo entre dos rectas es siempre menor o igual que 90° y, por tanto, su coseno es siempre positivo.



Si las rectas son perpendiculares:
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \rightarrow \cos\alpha = 0$

El **ángulo** que forman una **recta** r y un **plano** π es el complementario del menor ángulo formado por el vector director de la recta $\vec{u}$ y el vector normal al plano $\vec{n}$. Se calcula como:

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} \rightarrow \alpha = 90° - \arccos\left(\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}\right)$$



SABER HACER

Calcular el ángulo entre dos rectas y entre una recta y un plano

Halla el ángulo que existe entre:

a) Las rectas $r: \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{1}$ y $s: \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3 \\ z = 2+\lambda \end{array}\right\}$.

b) La recta $r: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-6}{1} = \dfrac{z}{1}$ y el plano $\pi: x + y + z = 0$.

PRIMERO. Se halla el vector director de cada recta y el vector normal al plano, y se calculan su producto escalar y sus módulos.

a) Vector director de $r \rightarrow \vec{u} = (-2, 3, 1)$ Vector director de $s \rightarrow \vec{v} = (1, 0, 1)$

$|\vec{u}| = \sqrt{14}$ $|\vec{v}| = \sqrt{2}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -2\cdot 1 + 3\cdot 0 + 1\cdot 1 = -1$

b) Vector director $\rightarrow \vec{u} = (-1, 1, 1)$ Vector normal $\rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1)$

$|\vec{u}| = \sqrt{3}$ $|\vec{n}| = \sqrt{3}$

$\vec{u}\cdot\vec{n} = -1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 1$

SEGUNDO. Se aplican las fórmulas para calcular el ángulo.

a) $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{|-1|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{7}} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\dfrac{1}{2\sqrt{7}}\right) = 79°\,6'\,23''$

b) $\cos(90° - \alpha) = \dfrac{|1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3} \rightarrow \alpha = 90° - \arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) = 19°\,28'\,17''$

ACTIVIDADES

1. Halla el ángulo y el punto de intersección entre estas rectas.

a) $r: \left.\begin{array}{l} x + y - 2 = 0 \\ 2x + z + 3 = 0 \end{array}\right\}$
$s: (2+\lambda, -\lambda, 8+\lambda)$

b) $r: \left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = t - 2 \\ z = 2 + 2t \end{array}\right\}$
$s: x = -y - 3 = z$

2. Calcula el ángulo que forman al cortarse estas rectas y planos en cada caso.

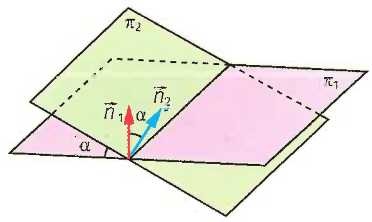
a) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = z$
$\pi: 4x + 6y + 2z - 9 = 0$

b) $r: \left.\begin{array}{l} x + y + z + 1 = 0 \\ -2x + y - 3z = 0 \end{array}\right\}$
$\pi: x - y + 5z + 7 = 0$

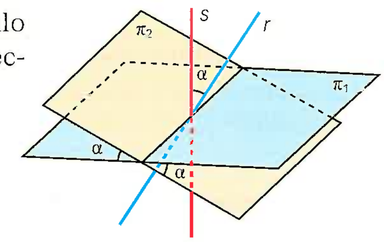
1.3. Ángulo entre dos planos

El **ángulo** que forman **dos planos**, π_1 y π_2, es el menor ángulo que se forma entre sus respectivos vectores normales, $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$. Se calcula como:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} \to \alpha = \arccos\left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}\right)$$



El ángulo entre dos planos es igual al ángulo que forman dos rectas perpendiculares, respectivamente, a cada uno de ellos.



SABER HACER

Calcular el ángulo entre dos planos

▶ Halla el ángulo que se forma entre los siguientes planos.

$$\pi_1: x + 2y - z + 2 = 0 \qquad \pi_2: \left.\begin{aligned} x &= 3 + \lambda + 2\mu \\ y &= 3 - \lambda + \mu \\ z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

PRIMERO. Se hallan los vectores normales a cada plano.

Vector normal a $\pi_1 \to \vec{n}_1 = (1, 2, -1)$

Para calcular el vector normal a π_2, se halla primero su ecuación implícita:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to 3(z-3) = 0 \to z - 3 = 0$$

Vector normal a $\pi_2 \to \vec{n}_2 = (0, 0, 1)$

SEGUNDO. Se calculan el producto escalar de los vectores normales a cada plano y sus módulos respectivos.

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1$$

$$\vec{n}_1 = (1, 2, -1) \to |\vec{n}_1| = \sqrt{6}$$

$$\vec{n}_2 = (0, 0, 1) \to |\vec{n}_2| = 1$$

TERCERO. Se aplica la fórmula para calcular el ángulo que forman los dos planos.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}\cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \to \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 65^\circ\, 54'\, 18''$$

Date cuenta

Como el ángulo entre dos planos es el ángulo entre dos rectas, es siempre menor o igual que 90° y, por tanto, su coseno es siempre positivo.

Si los planos son perpendiculares:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \to \cos\alpha = 0$$

ACTIVIDADES

3. Determina el ángulo que forman los siguientes planos al cortarse.

a) π_1: $2x + y - 3z + 2 = 0$ $\qquad \pi_2$: $-x + 5y + z - 7 = 0$

b) π_1: $4x + y - 3 = 0$ $\qquad \pi_2$: $-3x + 2y - 3z + 8 = 0$

c) π_1: $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ y-1 & 2 & -3 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \pi_2$: $3x - y - z + 5 = 0$

4. Considera estos planos.

π_1: $-x + y - 3z + D = 0$ $\qquad \pi_2$: $-2x + 3y - z + D = 0$

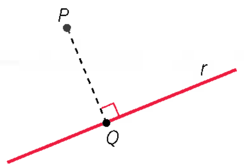
a) Demuestra que son secantes en una recta para cualquier valor de D.

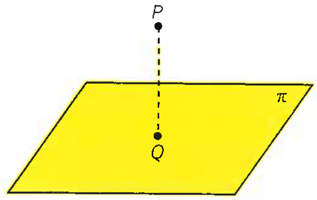
b) Halla el ángulo que forman. ¿Depende del valor de D?

c) Determina la ecuación de la recta intersección, sabiendo que pasa por el punto $A(0, -2, 2)$.

2. Proyecciones ortogonales

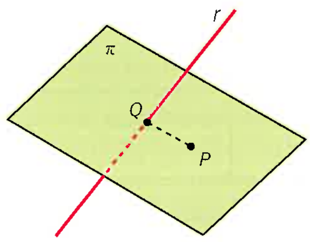
2.1. Proyección ortogonal de un punto





- La **proyección ortogonal de un punto** P **sobre una recta** r es otro punto Q que pertenece a la recta, y tal que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular al vector director de la recta.
- La **proyección ortogonal de un punto** P **sobre un plano** π es un punto Q que pertenece al plano, y tal que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular al plano.

SABER HACER



Calcular la proyección ortogonal de un punto sobre una recta

▶ Determina la proyección ortogonal de $P(0, 0, 0)$ sobre $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{-1}$.

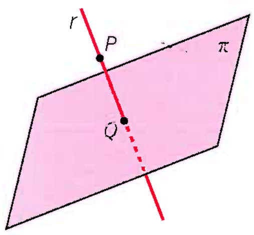
PRIMERO. Se halla la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal: } \vec{n} = (2, 1, -1) \\ \text{Punto: } \quad P(0, 0, 0)\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} 2(x-0) + 1(y-0) - 1(z-0) = 0 \\ \pi: 2x + y - z = 0\end{array}$$

SEGUNDO. Se calcula el punto de corte de la recta con el plano que se ha hallado, y ese punto será la proyección ortogonal.

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{-1} \\ 2x + y - z = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 2y = -5 \\ x + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2/3 \\ y = 13/6 \\ z = 5/6\end{array}\right. \rightarrow Q\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{13}{6}, \dfrac{5}{6}\right)$$

SABER HACER



Calcular la proyección ortogonal de un punto sobre un plano

▶ Determina la proyección ortogonal de $P(0, 0, 0)$ sobre $\pi: 2x - 3y + z - 2 = 0$.

PRIMERO. Se halla la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal: } \vec{n} = (2, -3, 1) \\ \text{Punto: } \quad P(0, 0, 0)\end{array}\right\} \rightarrow r: \dfrac{x-0}{2} = \dfrac{y-0}{-3} = \dfrac{z-0}{1}$$

SEGUNDO. Se calcula el punto de corte del plano con la recta que se ha hallado, y ese punto será la proyección ortogonal.

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{1} \\ 2x - 3y + z - 2 = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 2\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2/7 \\ y = -3/7 \\ z = 1/7\end{array}\right. \rightarrow Q\left(\dfrac{2}{7}, -\dfrac{3}{7}, \dfrac{1}{7}\right)$$

ACTIVIDADES

5. Halla la proyección ortogonal del punto P sobre la recta.

a) $P(6, -1, -3)$ $\quad r: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+4}{-1} = z$

b) $P(2, -5, -4)$ $\quad r: \left.\begin{array}{r} x + y + z - 2 = 0 \\ -x + 2y - 4z - 1 = 0\end{array}\right\}$

6. Calcula la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π.

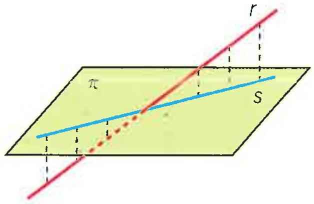
a) $P(-3, 1, 0)$ $\quad \pi: 2x + y - z - 1 = 0$

b) $P(0, -2, 5)$ $\quad \pi: 3x - 2y + z - 2 = 0$

c) $P(2, 1, -1)$ $\quad \pi: 4x - y - 24 = 0$

2.2. Proyección ortogonal de una recta sobre un plano

La **proyección ortogonal de una recta** r **sobre un plano** π es una recta s que está contenida en el plano, y tal que el plano π' que contiene a las dos rectas es perpendicular al plano π.



SABER HACER

Calcular la proyección ortogonal de una recta sobre un plano

▶ Halla la proyección ortogonal de la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{-1}$ sobre el plano de ecuación $\pi: 2x - 3y + z - 2 = 0$.

PRIMERO. Se hallan el vector director de r, el vector normal a π y un punto de r.

Vector director de r: $\vec{u} = (2, 1, -1)$

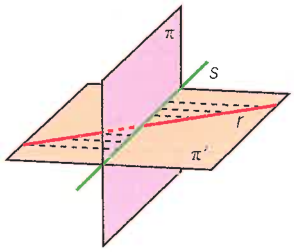
Vector normal a π: $\vec{n} = (2, -3, 1)$

Punto de r: $P(1, 3, 0)$

SEGUNDO. Se calcula el plano π' que pasa por el punto P y tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector normal al plano π.

$$\pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi': -2(x-1) - 4(y-3) - 8z = 0$$
$$\rightarrow \pi': x + 2y + 4z - 7 = 0$$

El plano π' contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

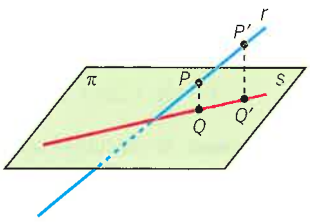


TERCERO. Se halla el corte de los dos planos, π y π', que es la recta s, proyección ortogonal de r sobre π.

$$s: \left.\begin{matrix} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ x + 2y + 4z - 7 = 0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{Se resuelve}} \left\{\begin{matrix} x = \dfrac{25}{7} - 2\lambda \\ y = \dfrac{12}{7} - \lambda \\ z = \lambda \end{matrix}\right.$$

Luego la ecuación de la recta es $s: \left.\begin{matrix} x = \dfrac{25}{7} - 2\lambda \\ y = \dfrac{12}{7} - \lambda \\ z = \lambda \end{matrix}\right\}$

La proyección ortogonal de una recta sobre un plano también se puede calcular escogiendo dos puntos de la recta, calculando su proyección ortogonal sobre el plano y, posteriormente, hallando la recta que pasa por las proyecciones.



ACTIVIDADES

7. Determina la ecuación general de la recta que es proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π en cada caso.

a) $r: \dfrac{x-1}{3} = y = \dfrac{z}{2}$ y $\pi: x - y - z - 1 = 0$

b) $r: \left.\begin{matrix} x = -2 + t \\ y = t \\ z = 3 \end{matrix}\right\}$ y $\pi: 2x - y + 3z - 1 = 0$

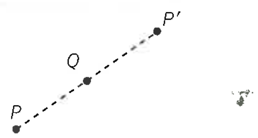
8. Considera el plano $\pi: x - 2y + az - 3 = 0$ y la recta $r: \left.\begin{matrix} y = 2 \\ x - z = 1 \end{matrix}\right\}$.

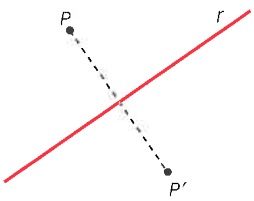
a) Determina el valor del parámetro a para el que la recta r es paralela al plano π.

b) Para ese valor de a, determina la ecuación general de la proyección ortogonal de r sobre π.

3 Puntos simétricos

3.1. Simétrico de un punto respecto de otro punto o de una recta





- El **simétrico de un punto** P **respecto de otro punto** Q es un punto P' tal que el punto Q es el punto medio del segmento PP'.
- El **simétrico de un punto** P **respecto de una recta** r es un punto P' tal que la recta r pasa por el punto medio del segmento PP', y el vector $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular a la recta r.

SABER HACER

Calcular el simétrico de un punto respecto de otro punto

Halla el simétrico del punto $P(0, 2, -1)$ respecto del punto $Q(-1, 0, 2)$.

PRIMERO. Si el simétrico es $P'(a, b, c)$, se halla el punto medio del segmento PP'.

$$P(0, 2, -1) \text{ y } P'(a, b, c) \rightarrow \text{Su punto medio es: } \left(\frac{a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{-1+c}{2}\right)$$

SEGUNDO. Se resuelve el sistema que se forma al igualar el punto medio al punto Q.

$$(-1, 0, 2) = \left(\frac{a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{-1+c}{2}\right) \rightarrow \text{El punto simétrico es } P'(-2, -2, 5).$$

SABER HACER

Calcular el simétrico de un punto respecto de una recta

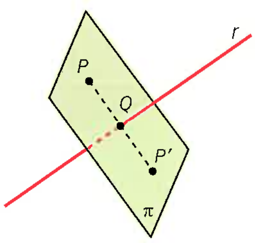
Calcula el simétrico del punto $P(-1, -1, 0)$ respecto de $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+2}{2}$.

PRIMERO. Se halla la proyección ortogonal del punto sobre la recta, para eso se calcula la ecuación del plano perpendicular a la recta que pasa por el punto.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Vector normal: } \vec{n} = (1, 2, 2) \\ P(-1, -1, 0) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: x + 2y + 2z + 3 = 0$$

Se calcula el punto de intersección entre este plano y la recta.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+2}{2} \\ x + 2y + 2z + 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y - 2 = 0 \\ 2x - z - 4 = 0 \\ x + 2y + 2z + 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{array}\right. \rightarrow Q(1, 0, -2)$$



SEGUNDO. Se calcula el simétrico del punto respecto de la proyección.

$$(1, 0, -2) = \left(\frac{-1+a}{2}, \frac{-1+b}{2}, \frac{c}{2}\right) \rightarrow \text{El punto simétrico es } P'(3, 1, -4).$$

ACTIVIDADES

9. Determina el simétrico del punto A con respecto al punto B.

a) $A(1, -2, -1)$ y $B(2, 2, -2)$

b) $A(3, 0, -2)$ y $B\left(-1, \dfrac{1}{2}, 0\right)$

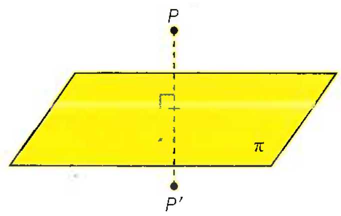
10. Halla el simétrico del punto P con respecto a la recta r.

a) $P(6, -1, -3)$ y $r: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+4}{-1} = z$

b) $P(2, -5, -4)$ y $r: \left.\begin{array}{r} x + y + z - 2 = 0 \\ -x + 2y - 4z - 1 = 0 \end{array}\right\}$

3.2. Simétrico de un punto respecto de un plano

El **simétrico de un punto** P **respecto de un plano** π es otro punto P' tal que el plano π pasa por el punto medio del segmento PP', y el vector $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular al plano π.



SABER HACER

Calcular el simétrico de un punto respecto de un plano

▶ **Calcula el simétrico del punto $P(-1, -1, 0)$ respecto de π: $x + 2y + 2z + 3 = 0$.**

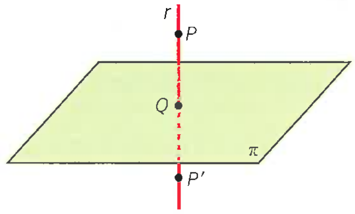
PRIMERO. Se halla la proyección ortogonal del punto sobre el plano.

Se halla la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Vector director: } \vec{n} = (1, 2, 2)\\ P(-1, -1, 0)\end{array}\right\} \rightarrow r: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2}$$

Se calcula el punto de intersección entre este plano y la recta.

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{2}\\ x + 2y + 2z + 3 = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}2x - y + 1 = 0\\ 2x - z + 2 = 0\\ x + 2y + 2z + 3 = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}x = -1\\ y = -1 \rightarrow Q(-1, -1, 0)\\ z = 0\end{array}\right.$$

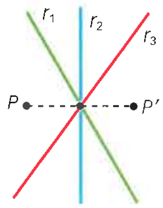


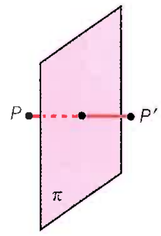
SEGUNDO. Se calcula el simétrico del punto respecto de la proyección.

$$(-1, -1, 0) = \left(\frac{-1+a}{2}, \frac{-1+b}{2}, \frac{c}{2}\right) \rightarrow P'(-1, -1, 0)$$

Hay infinitas rectas respecto de las cuales dos puntos fijados son simétricos.

Dados dos puntos, P y P', existe un único plano π respecto del cual son simétricos. Ese plano contiene al punto medio del segmento PP' y es perpendicular a $\overrightarrow{PP'}$.





EJEMPLO

1 **Si los puntos $P(1, 0, 5)$ y $P'(3, 2, -3)$ son simétricos, halla una recta y el plano respecto de los cuales dichos puntos son simétricos.**

Calculamos Q, el punto medio de P y P', y el vector $\overrightarrow{PP'}$:

$$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{5-3}{2}\right) \rightarrow Q(2, 1, 1) \qquad \overrightarrow{PP'} = (2, 2, -8)$$

Una recta respecto de la cual son simétricos pasa por su punto medio y su vector director será perpendicular a $\overrightarrow{PP'} = (2, 2, -8)$, por ejemplo:

$$\text{Como } (2, 2, 1) \cdot (2, 2, -8) = 0 \rightarrow r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$$

El plano respecto del cual son simétricos pasa por el punto medio y tiene por vector normal a $\overrightarrow{PP'} = (2, 2, -8) \rightarrow \pi$: $2x + 2y - 8z + D = 0$.

$$2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 8 \cdot 1 + D = 0 \rightarrow D = 2 \rightarrow \pi: 2x + 2y - 8z + 2 = 0$$

ACTIVIDADES

11. Halla el punto simétrico del punto P con respecto al plano π.

a) $P(-3, 1, 0)$ y π: $2x + y - z - 1 = 0$

b) $P(0, -2, 5)$ y π: $3x - 2y + z - 2 = 0$

12. Halla la ecuación de π para que A y B sean simétricos.

a) $A(0, -1, -3)$ y $B(2, -3, 1)$

b) $A\left(\frac{3}{2}, -\frac{8}{5}, -1\right)$ y $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, 5\right)$

4 Distancias a puntos y a planos

4.1. Distancia entre dos puntos

La **distancia entre dos puntos** $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ en el espacio es el módulo del vector que tiene por extremos dichos puntos.

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$$

$$d(A, B) = |(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

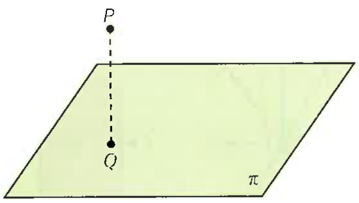
EJEMPLO

2 Calcula la distancia entre los puntos $A(-1, 2, 0)$ y $B(2, 0, -1)$.

$\overrightarrow{AB} = (2 - (-1), 0 - 2, -1 - 0) = (3, -2, -1)$

$d(A, B) = |(3, -2, -1)| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$

4.2. Distancia de un punto a un plano



La **distancia de un punto** P **a un plano** π es la distancia entre el punto P y su proyección sobre el plano π.

Conocida la ecuación del plano π: $Ax + By + Cy + D = 0$, la distancia de un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ al plano π se puede calcular mediante la expresión:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

SABER HACER

Calcular la distancia de un punto a un plano

▶ Halla la distancia del punto $P(2, 1, 0)$ al plano π: $2x - 3y + z - 2 = 0$.

PRIMERO. Se calcula el vector normal al plano y su módulo.

$\vec{n} = (2, -3, 1) \rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{14}$

SEGUNDO. Se sustituyen los datos en la expresión que se utiliza para hallar la distancia.

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14}$$

ACTIVIDADES

13. Determina la distancia entre los puntos $A(1, 4, -2)$ y $B(3, 2, 1)$.

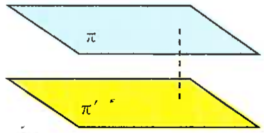
14. Determina los puntos de la recta r: $(\lambda, \lambda, \lambda + 1)$ que se encuentran a 5 unidades de distancia del punto $A(1, 4, -2)$.

15. Determina la distancia del punto $P(0, 1, -3)$ al plano π: $2x - y - 2z + 4 = 0$.

16. Calcula D para que la distancia del punto $P(-1, 3, -2)$ al plano π: $x + 2y + 2z + D = 0$ sea de 4 unidades.

4.3. Distancia entre dos planos

- Si los planos son coincidentes o se cortan, la distancia es cero.
- Si los planos son paralelos, la distancia entre ambos es igual a la distancia entre cualquier punto de uno de los planos al otro plano.



SABER HACER

Calcular la distancia entre dos planos

▶ Halla la distancia que hay entre los planos π_1: $3x - 3y = 0$ y π_2: $x - y = 1$.

PRIMERO. Se determina su posición relativa a partir de sus vectores normales.

$\vec{n}_1 = (3, -3, 0)$ y $\vec{n}_2 = (1, -1, 0)$ son proporcionales, luego los planos son paralelos.

SEGUNDO. Se halla un punto P de uno de los planos paralelos y el módulo del vector normal del otro plano.

$P(x_1, y_1, z_1) = P(1, 1, 2) \in \pi_1$ $\qquad \vec{n}_2 = (1, -1, 0) \rightarrow |\vec{n}_2| = \sqrt{2}$

TERCERO. Se halla la distancia entre el punto $P \in \pi_1$ y el plano π_2.

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \frac{|A'x_1 + B'y_1 + C'z_1 + D'|}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} = \frac{|1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Date cuenta

Si las ecuaciones de los planos paralelos son de la forma:

π: $Ax + By + Cz + D = 0$

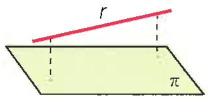
π': $Ax + By + Cz + D' = 0$

para calcular la distancia se utiliza la siguiente expresión:

$$d(\pi, \pi') = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

4.4. Distancia entre una recta y un plano

- Si la recta y el plano tienen algún punto en común, la distancia es cero.
- Si la recta y el plano son paralelos, la distancia entre ambos es igual a la distancia entre cualquier punto de la recta al plano.



SABER HACER

Calcular la distancia entre una recta y un plano

▶ Halla la distancia entre la recta r: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-1}$ y el plano π: $x - y = 2$.

PRIMERO. Se determina su posición relativa.

$\vec{v} = (2, 2, -1), \vec{n} = (1, -1, 0) \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 2 - 2 = 0$

$P(1, 0, 0) \in r$ y no pertenece al plano $\rightarrow r$ y π son paralelos.

SEGUNDO. Se halla un punto P de la recta y el módulo del vector normal al plano.

$P(x_1, y_1, z_1) = P(1, 0, 0) \in r$

$\vec{n} = (1, -1, 0) \rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{2}$

TERCERO. Se halla la distancia entre el punto $P \in r$ y el plano π.

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Date cuenta

Posición relativa de una recta r con vector director $\vec{v}$, y un plano π con vector normal $\vec{n}$:

- Si $\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$, se cortan en un punto.
- Si $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, son paralelos o la recta está contenida en el plano.

ACTIVIDADES

17. Determina la distancia entre los planos π_1: $2x + 2y + z + 1 = 0$ y π_2: $4x + 4y + 2z + 7 = 0$.

18. Los planos de ecuaciones π_1: $-x + 2y + 2z - 1 = 0$ y π_2: $2x - 4y - 4z + D = 0$ se encuentran a una distancia de 3 unidades. Determina los posibles valores de D.

19. Determina el valor del parámetro a para el que la recta de ecuación r: $x = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{1-z}{3}$ sea paralela al plano de ecuación π: $5x - ay + z + 4 = 0$.

Para este valor encontrado, calcula la distancia entre la recta r y el plano π.

5 Distancia de un punto a una recta

La **distancia de un punto** P **a una recta** r se puede calcular con la fórmula:

$$d(P, r) = \frac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}_r|}$$

siendo $\vec{v}_r$ el vector director de la recta y A un punto cualquiera de la recta.

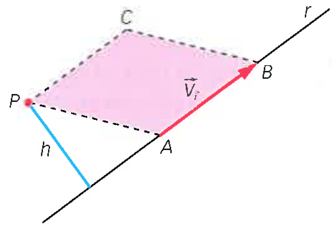
Para demostrar este resultado utilizamos el área del paralelogramo $PABC$:

$$\text{Área} = \text{Base} \cdot \text{Altura} = |\vec{v}_r| \cdot h$$

$$\text{Área} = |\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}|$$

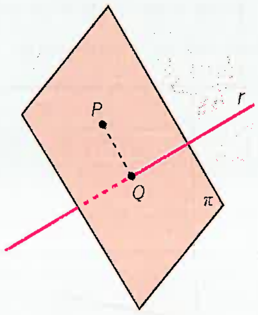
Como $h = d(P, r)$, igualando y despejando h:

$$|\vec{v}_r| \cdot h = |\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}| \rightarrow h = \frac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}_r|}$$



Date cuenta

La distancia de un punto P a una recta r también se puede calcular como la distancia entre el punto P y su proyección ortogonal sobre la recta r.



SABER HACER

Calcular la distancia de un punto a una recta

▶ Halla la distancia del punto $P(1, -3, 2)$ a la recta $r: \left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 1 \\ x + 2z = 3 \end{array}\right\}$.

PRIMERO. Se hallan el vector director $\vec{v}_r$ y un punto A de la recta.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k} = (-4, -6, 2)$$

En las ecuaciones de la recta, si $x = 1 \rightarrow y = 1, z = 1$. Un punto es $A(1, 1, 1)$.

SEGUNDO. Se calcula el vector determinado por el punto P y el punto A de la recta.

$$\overrightarrow{AP} = (1 - 1, -3 - 1, 2 - 1) = (0, -4, 1)$$

TERCERO. Se determina el producto vectorial de los vectores $\vec{v}_r$ y $\overrightarrow{AP}$.

$$\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -6 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 16\vec{k} = (2, 4, 16)$$

CUARTO. Se calculan los módulos de los vectores $\vec{v}_r$, y $\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}$, y se sustituye en la fórmula que permite hallar la distancia del punto a la recta.

$$|\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{4 + 16 + 256} = \sqrt{276} \qquad |\vec{v}_r| = \sqrt{16 + 36 + 4} = \sqrt{56}$$

$$d(P, r) = \frac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}_r|} = \frac{\sqrt{276}}{\sqrt{56}} = \frac{2\sqrt{69}}{2\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{966}}{14}$$

ACTIVIDADES

20. Halla, en cada caso, la distancia del punto a la recta.

a) $P(1, 2, -3)$ y $r: \left.\begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{array}\right\}$

b) $P(3, 0, -1)$ y $r: 2x = y - 5 = 1 - z$

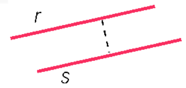
c) $P(-1, 0, 2)$ y el eje OX

21. Sabemos que el punto $P(2, 1, m)$ se encuentra a una distancia de 3 unidades de la recta que tiene por ecuación $r: \left.\begin{array}{r} x - 2z = 1 \\ y = 3 \end{array}\right\}$.
Determina los posibles valores que debe tomar el parámetro m para que se cumpla dicha condición.

6 Distancias entre rectas

6.1. Distancia entre rectas paralelas y secantes

- Si las rectas son secantes o son coincidentes, la distancia entre dichas rectas es cero.
- Si las rectas son paralelas, la distancia entre ellas es igual a la distancia entre cualquier punto de una a la otra.



EJEMPLO

3 Calcula la distancia entre estas dos rectas.

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{-2} \qquad s: \left.\begin{matrix} -2y+2z+2=0 \\ 2x+y-1=0 \end{matrix}\right\}$$

Determinamos la posición relativa de las rectas, y para ello calculamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r: \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -2, -2) \\ P_r(1, 0, -2) \end{cases}$$

Calculamos el vector director de s.

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (0, -2, 2) \times (2, 1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2i + 4j + 4k \rightarrow \vec{v}_s = (-2, 4, 4)$$

Calculamos un punto de s. Si hacemos $x = 1$:

$$x = 1 \rightarrow \left.\begin{matrix} -2y+2z+2=0 \\ 2+y-1=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} -2y+2z+2=0 \\ y=-1 \end{matrix}\right\} \rightarrow 2+2z+2=0 \rightarrow z=-2$$

Luego $P_s(1, -1, -2)$ es un punto de la recta s.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ 1-1 & -1-0 & -2-(-2) \end{pmatrix} = 2$$

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son proporcionales entre sí, pero no son proporcionales al vector $\overrightarrow{P_rP_s}$; por tanto, las rectas r y s son paralelas.

Para hallar la distancia entre las dos rectas, calculamos la distancia entre un punto de r y la recta s.

$$\vec{v}_s \times \overrightarrow{P_rP_s} = (-2, 4, 4) \times (0, -1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4i + 2k = (4, 0, 2)$$

$$d(P, s) = \frac{|\vec{v}_s \times \overrightarrow{P_rP_s}|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{4+16+16}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

ACTIVIDADES

22. Determina razonadamente la distancia entre la recta de ecuaciones $r: \left.\begin{matrix} x-3y=1 \\ z=2 \end{matrix}\right\}$ y la recta s, que es la intersección de los siguientes planos.

$\pi_1: 3x + y - z - 11 = 0 \qquad \pi_2: x + y - 5 = 0$

23. Determina la posición relativa de estas dos rectas.

$$r: \left.\begin{matrix} 2x+y-3z-1=0 \\ -x+2y-z-7=0 \end{matrix}\right\} \qquad s: \frac{1-5x}{7} = -y = \frac{z+3}{-1}$$

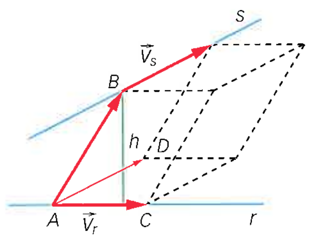
Calcula de manera razonada la distancia entre estas dos rectas.

6.2. Distancia entre dos rectas que se cruzan

La **distancia entre dos rectas**, r y s, que se cruzan se calcula con la fórmula:

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$$

siendo $\vec{v}_r$ el vector director de la recta r, A un punto de la recta r, $\vec{v}_s$ el vector director de la recta s y B un punto de la recta s.



Para comprobar este resultado utilizamos el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$.

$$\text{Volumen} = (\text{Área Base}) \cdot \text{Altura} = |\vec{v}_r \times \vec{v}_s| \cdot h$$

$$\text{Volumen} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$$

Como $d(r, s) = h$, igualando y despejando h:

$$|\vec{v}_r \times \vec{v}_s| \cdot h = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| \rightarrow h = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$$

No olvides

! Si $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son los vectores directores de r y s, respectivamente, y $A \in r$ y $B \in s$:

- $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = 0 \rightarrow$ Son paralelas
- $\left.\begin{matrix}\vec{v}_r \times \vec{v}_s \neq 0\\ [\overrightarrow{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = 0\end{matrix}\right\} \rightarrow$ Se cortan.
- $\left.\begin{matrix}\vec{v}_r \times \vec{v}_s \neq 0\\ [\overrightarrow{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] \neq 0\end{matrix}\right\} \rightarrow$ Se cruzan.

SABER HACER

Calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan

▶ Halla la distancia entre las siguientes rectas:

$$r: \left.\begin{matrix}3x - 2y = 1\\ x + 2z = 3\end{matrix}\right\} \qquad s: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = z - 4$$

PRIMERO. Se determinan los vectores directores y un punto de cada recta.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix} = -4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k} = (-4, -6, 2)$$

En las ecuaciones de r, si $x = 1 \rightarrow y = 1, z = 1 \rightarrow$ Un punto de r es $A(1, 1, 1)$.

$\vec{v}_s = (2, 3, 1)$ y un punto de la recta s es $B(0, -1, 4)$.

SEGUNDO. Se calcula un vector determinado por los puntos de cada recta que se han obtenido.

$$\overrightarrow{AB} = (0 - 1, -1 - 1, 4 - 1) = (-1, -2, 3)$$

TERCERO. Se determina el producto mixto de los vectores directores de la recta y el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & -6 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix} = -12\vec{i} + 8\vec{j} = (-12, 8, 0)$$

$$[\overrightarrow{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = (-1, -2, 3) \cdot (-12, 8, 0) = 12 - 16 + 0 = -4$$

CUARTO. Se sustituyen los datos obtenidos en la fórmula, y se opera.

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_r]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{|-4|}{\sqrt{144 + 64 + 0}} = \frac{4}{\sqrt{208}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$$

ACTIVIDADES

24. Determina la posición relativa de estas rectas.

$$r: \left.\begin{matrix}y + z = 3\\ x - z = -1\end{matrix}\right\} \qquad s: \frac{x+2}{3} = y = \frac{z}{2}$$

Calcula la distancia entre la recta r y la recta s.

25. Sean $r: (m + 2t, -t, -2 + t)$ y $s: \left.\begin{matrix}2x - 3y + 4z - 1 = 0\\ x + z - 2 = 0\end{matrix}\right\}$

a) Halla el valor de m para el que r y s no son coplanarias.

b) Para $m = 1$, calcula la distancia entre las dos rectas.

7 Lugares geométricos. La esfera

7.1. Lugar geométrico en el espacio

Un **lugar geométrico** es el conjunto de todos los puntos del espacio que cumplen una determinada propiedad geométrica.

EJEMPLO

4 Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de dos puntos fijos $A(0, 0, 0)$ y $B(1, 2, 3)$.

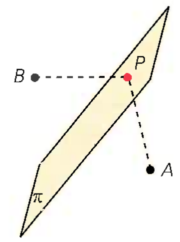
Sea $P(x, y, z)$ un punto del espacio que pertenece al lugar geométrico.

$$d(A, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$$
$$d(B, P) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}$$

Igualando ambas distancias, obtenemos la ecuación del lugar geométrico:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z + 14} \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z + 14 \rightarrow 2x + 4y + 6z - 14 = 0$$

El lugar geométrico pedido es el plano π: $2x + 4y + 6z - 14 = 0$.



7.2. Superficie esférica

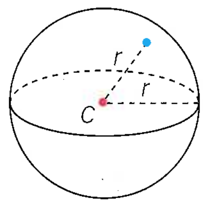
Una **esfera** es el lugar geométrico de los puntos del espacio que están a la misma distancia de un punto fijo, llamado **centro**. A la distancia constante se la denomina **radio**.

La **ecuación de la esfera** de centro $C(a, b, c)$ y radio r es:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Considerando $A = -2a$, $B = -2b$, $C = -2c$ y $D = a^2 + b^2 + c^2 - r^2$, obtenemos la **ecuación general de la esfera**:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$



EJEMPLO

5 Halla la ecuación de la esfera de centro $C(-1, 2, 3)$ y que pasa por el origen.

$$d(O, C) = r \rightarrow \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

La ecuación de la esfera es:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (\sqrt{14})^2 \rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$$

La ecuación general de la esfera se obtiene desarrollando la expresión anterior:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = 14 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z = 0$$

ACTIVIDADES

26. Determina la ecuación de la esfera cuyo centro es el punto $C(3, -2, 1)$, sabiendo que $A(1, 0, 2)$ pertenece a ella.

27. Calcula el centro y el radio de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y - 2z + 26 = 0$.

SABER HACER

Ángulos en el espacio

Determinar un plano que forma un cierto ángulo con otro plano

Halla el valor de *a* para que los planos π_1: $x - y + az - 1 = 0$ y π_2: $2x - y + 2z + 5 = 0$ formen un ángulo de 45°.

PRIMERO. Se calculan los vectores normales de los dos planos.

$$\vec{n}_{\pi_1} = (1, -1, a) \qquad \vec{n}_{\pi_2} = (2, -1, 2)$$

SEGUNDO. Se aplica la fórmula que permite calcular el ángulo.

$$\cos 45^\circ = \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{|\vec{n}_{\pi_1}| \cdot |\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{|(1, -1, a) \cdot (2, -1, 2)|}{\sqrt{a^2+2} \cdot \sqrt{9}} = \frac{3+2a}{3\sqrt{a^2+2}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3+2a}{3\sqrt{a^2+2}}$$

TERCERO. Se resuelve la ecuación resultante para calcular el parámetro.

$$\left(3\sqrt{2(a^2+2)}\right)^2 = (6+4a)^2 \rightarrow 2a^2 - 48a = 0 \rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = 24$$

Se obtienen dos valores porque hay dos planos que forman un ángulo de 45° con π_2.

PRACTICA

28. Halla el valor de *a* para que la recta $r: \left.\begin{array}{r} 2x - 3y = -1 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\}$ y el plano π: $ax - y + z = 5$ formen un ángulo de 30°.

Proyecciones ortogonales

Calcular una recta perpendicular a otra recta que pasa por un cierto punto

Sean la recta r: $x + 1 = y - 2 = \frac{z-3}{4}$ y el punto $P(1, 2, 1)$. Halla la recta que pasa por *P* y corta perpendicularmente a *r*.

PRIMERO. Se calcula la proyección ortogonal de *P* sobre *r*.

Se halla el plano que pasa por *P* y es perpendicular a *r*.

$$\pi: \begin{cases} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 1, 4) \rightarrow x + y + 4z + D = 0 \\ P(1, 2, 1) \rightarrow 1 + 2 + 4 + D = 0 \rightarrow D = -7 \end{cases}$$

$$\pi: x + y + 4z - 7 = 0$$

Se halla la intersección entre el plano y la recta.

$$\left.\begin{array}{r} x + 1 = y - 2 = \frac{z-3}{4} \\ x + y + 4z - 7 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z + 7 = 0 \\ x + y + 4z - 7 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow Q\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

SEGUNDO. Se halla el vector de extremos el punto que se ha calculado y el que da el problema.

$$\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{4}{3} - 1, \frac{5}{3} - 2, \frac{5}{3} - 1\right) = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

TERCERO. La recta que se busca tiene como vector director $\overrightarrow{PQ}$ y pasa por *P*.

Se toma como vector director de la recta un múltiplo de $\overrightarrow{PQ}$.

$$s: \frac{x-1}{-7} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

PRACTICA

29. Dados $P(-1, 0, 2)$ y $r: \left.\begin{array}{r} x - y + 1 = 0 \\ x - 2z - 2 = 0 \end{array}\right\}$, halla la recta que pasa por *P* y corta perpendicularmente a *r*.

Proyecciones ortogonales

Calcular un plano paralelo a una recta que pasa por un cierto punto

Dados la recta r: $x - 2 = y = \frac{z}{-1}$ y el punto $P(0, -2, 3)$, halla uno de los planos que contienen a *P* y es paralelo a *r*.

PRIMERO. Se calcula la proyección ortogonal de *P* sobre *r*.

Se halla el plano que pasa por *P* y es perpendicular a *r*.

$$\pi: \begin{cases} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 1, -1) \rightarrow x + y - z + D = 0 \\ P(0, -2, 3) \rightarrow 0 - 2 - 3 + D = 0 \rightarrow D = 5 \end{cases}$$

$$\pi: x + y - z + 5 = 0$$

Se calcula la intersección entre el plano y la recta.

$$\left.\begin{array}{r} x - 2 = y = \frac{z}{-1} \\ x + y - z + 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y - 2 = 0 \\ -x - z + 2 = 0 \\ x + y - z + 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow Q\left(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

SEGUNDO. Se calcula el vector de extremos el punto que se ha calculado y el que da el problema.

$$\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{3} + 2, \frac{7}{3} - 3\right) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

TERCERO. El plano que se busca tiene como vector normal el que se ha calculado y contiene el punto que da el problema.

$$\pi': \begin{cases} \vec{n} = \overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \rightarrow -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + D = 0 \\ P(0, -2, 3) \rightarrow 0 + \frac{2}{3} - \frac{6}{3} + D = 0 \rightarrow D = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\pi': x + y + 2z + 4 = 0$$

PRACTICA

30. Considera $P(2, -2, 1)$ y $r: \left.\begin{array}{r} 2x - y = 0 \\ x - 2z + 1 = 0 \end{array}\right\}$.

Halla el plano que contiene a *P* y es paralelo a *r*.

Puntos simétricos

Calcular una recta simétrica respecto de un plano

Determina la ecuación de la recta simétrica de la recta r: $x = y = z$ respecto del plano π: $2x + y - z - 6 = 0$.

PRIMERO. Se toman dos puntos de la recta y se calculan sus simétricos respecto del plano.

Dos puntos de la recta son: $P(0, 0, 0) \in r$ $\quad Q(1, 1, 1) \in r$

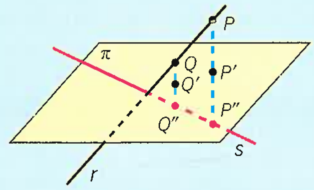
Se hallan las ecuaciones de dos rectas perpendiculares al plano, una que pase por P y la otra por Q.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Vector director: } \vec{n} = (2, 1, -1)\\ P(0, 0, 0)\end{array}\right\} \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1} \qquad \left.\begin{array}{r}\text{Vector director: } \vec{n} = (2, 1, -1)\\ Q(1, 1, 1)\end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

Se calcula la intersección entre las rectas y el plano.

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}\\ 2x + y - z - 6 = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}x - 2y = 0\\ x + 2z = 0\\ 2x + y - z - 6 = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}x = 2\\ y = 1\\ z = -1\end{array}\right. \rightarrow P'(2, 1, -1)$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}\\ 2x + y - z - 6 = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}x - 2y + 1 = 0\\ x + 2z - 3 = 0\\ 2x + y - z - 6 = 0\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{7}{3}, y = \frac{5}{3}, z = \frac{1}{3} \rightarrow Q'\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$$



Se calcula el simétrico de cada punto respecto de su proyección en el plano.

$$(2, 1, -1) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) \rightarrow P''(4, 2, -2)$$

$$\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{c+1}{2}\right) \rightarrow Q''\left(\frac{11}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

SEGUNDO. La recta buscada es la que pasa por los dos puntos calculados.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Vector director: } \overrightarrow{P''Q''} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)\\ P''(4, 2, -2)\end{array}\right\} \rightarrow s: (x, y, z) = (4, 2, -2) + \lambda\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

PRACTICA

31. Determina la ecuación de la recta simétrica de la recta $r: x + 2 = y - 1 = z + 1$ respecto del plano $\pi: x - z + 2 = 0$.

Puntos simétricos

Calcular el simétrico de un punto respecto a un plano cuando depende de parámetros

Determina los valores de a y b para que los puntos $A(1, 0, 1)$ y $B\left(\frac{1}{3}, a, b\right)$ sean simétricos respecto del plano π: $x - y + z = 1$.

PRIMERO. Se calcula el punto simétrico del punto cuyas coordenadas se conocen con respecto al plano.

Se halla la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por A.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Vector director: } \vec{n}(1, -1, 1)\\ A(1, 0, 1)\end{array}\right\} \rightarrow r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

Se calcula el punto de intersección entre esta recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}\\ x - y + z - 1 = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}x + y - 1 = 0\\ x - z = 0\\ x - y + z - 1 = 0\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{2}{3} \rightarrow Q\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Se calcula el punto simétrico de A.

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1 + x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{1 + z_0}{2}\right) \rightarrow P'\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

SEGUNDO. El punto calculado y el punto que da el problema tienen que ser el mismo. Se igualan sus coordenadas y se halla el valor de los parámetros.

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, a, b\right) \rightarrow a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$$

PRACTICA

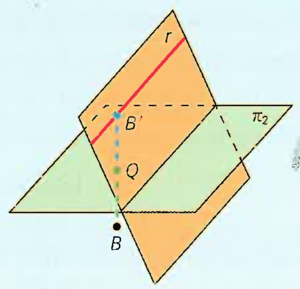
32. Determina los valores de a y b para que los puntos $P(2, 1, 0)$ y $B\left(a, b, \frac{1}{7}\right)$ sean simétricos respecto del plano $\pi: 2x - 3y + z - 2 = 0$.

SABER HACER

Puntos simétricos

Resolver problemas de simetrías

Calcula la recta contenida en el plano π_1: $x + y + z = 3$, paralela al plano π_2: $x = 0$, y que pasa por el punto simétrico a $B(-1, 1, 1)$ respecto de π_2.



PRIMERO. Se calcula la simetría que se pide.

Se calcula el simétrico de $B(-1, 1, 1)$ respecto de π_2: $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Vector director: } \vec{n} = (1, 0, 0)\\ B(-1, 1, 1)\end{array}\right\} \rightarrow r: \left\{\begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1\end{array}\right.$$

Se calcula la intersección entre π_2 y r.

$$x = 0 \xrightarrow{x=-1+\lambda,\ y=1,\ z=0} -1 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1 \rightarrow Q(0, 1, 1)$$

Se calcula B', el simétrico del punto B con respecto del plano π_2.

$$(0, 1, 1) = \left(\frac{-1+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{1+c}{2}\right) \rightarrow B'(1, 1, 1)$$

SEGUNDO. La recta que se busca tiene como vector director el producto vectorial de los vectores normales de los dos planos y pasa por el punto que se ha calculado

$$\left.\begin{array}{r}\text{Vector director: } \vec{v} = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = (1, 1, 1) \times (1, 0, 0) = (0, 1, -1)\\ B'(1, 1, 1)\end{array}\right\} \rightarrow r: \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda\end{array}\right.$$

PRACTICA

33. Calcula la recta contenida en el plano π: $y - z = 0$, paralela al plano *OXY*, y que pasa por el punto simétrico a $B(0, 1, -1)$ respecto de *OXY*.

Puntos simétricos

Calcular el plano de simetría de dos puntos

Considera los puntos $P(2,3,1)$ y $Q(0,1,1)$. Halla la ecuación del plano respecto del cual estos puntos son simétricos.

PRIMERO. Se calcula el punto medio del segmento cuyos extremos son los dos puntos que se dan.

Sea R el punto medio de PQ:

$$R\left(\frac{2+0}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (1, 2, 1)$$

SEGUNDO. El plano buscado tiene como vector normal el vector de extremos los dos puntos que se dan y contiene al punto medio que se ha calculado.

$$\pi: \left\{\begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{PQ} = (-2, -2, 0) \rightarrow -2x - 2y + D = 0 \\ R(1, 2, 1) \xrightarrow{-2x-2y+D=0} -2 - 4 + D = 0 \rightarrow D = 6\end{array}\right.$$

El plano buscado es:

π: $-2x - 2y + 6 = 0$.

PRACTICA

34. Considera los puntos:

$P(-3, 0, -1)$ y $Q(2, 1, 1)$

Halla la ecuación del plano respecto del cual estos puntos son simétricos.

Distancias

Buscar puntos que están a una cierta distancia

Determina los puntos de la recta r: $(\lambda, 1 + \lambda, 2\lambda)$ que se encuentran a una distancia de 3 unidades del plano π: $2x - 2y + z + 1 = 0$.

PRIMERO. Se toma un punto genérico de la recta y se calcula el módulo del vector normal del plano.

$$P(\lambda, 1 + \lambda, 2\lambda) \in r \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{n} = (2, -2, 1) \rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{9} = 3$$

SEGUNDO. Se halla la distancia del punto de la recta al plano.

$$d(p, \pi) = \frac{|2 \cdot \lambda - 2 \cdot (1 + \lambda) + 2\lambda + 1|}{3} = \frac{|2\lambda - 1|}{3}$$

TERCERO. Se impone la condición que nos pide el problema y se resuelve la ecuación.

$$\frac{|2\lambda - 1|}{3} = 3 \rightarrow |2\lambda - 1| = 9 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\lambda - 1 = 9 \rightarrow \lambda = 5 \\ 2\lambda - 1 = -9 \rightarrow \lambda = -4\end{array}\right.$$

Los puntos son $P(\lambda, 1 + \lambda, 2\lambda) \xrightarrow{\lambda=5} P(5, 6, 10)$

$\xrightarrow{\lambda=-4} Q(-4, -3, -8)$

PRACTICA

35. Determina los puntos de la recta r: $(0, 1 + \lambda, 1)$ que se encuentran a una distancia de $\sqrt{5}$ unidades del plano π: $x - 2y - 2 = 0$.

Distancias

Determinar una recta que está a una cierta distancia de otra recta

Calcula m para que la distancia entre las rectas r y s sea de $\sqrt{2}$ unidades.

$$r: x = -y = z - m \qquad s: \left.\begin{array}{r} x + 2y = 7 \\ x - z = 3 \end{array}\right\}$$

PRIMERO. Se calculan los vectores directores y un punto de cada recta.

$$r: x = -y = z - m \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -1, 1) \\ A(0, 0, m) \end{cases} \qquad s: \left.\begin{array}{r} x + 2y = 7 \\ x - z = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (1, 2, 0) \times (1, 0, -1) = (-2, 1, -2) \\ \text{Para } x = 3 \rightarrow B(3, 2, 0) \end{cases}$$

SEGUNDO. Se aplica la fórmula de la distancia entre las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3, 2, -m) \\ \vec{v}_r \times \vec{v}_s = (1, -1, 1) \times (-2, 1, -2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = i - k = (1, 0, -1) \\ \left|[\overrightarrow{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]\right| = (3, 2, -m) \cdot (1, 0, -1) = 3 + m \end{array}\right\} \rightarrow d(r, s) = \frac{\left|[\overrightarrow{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{|3 + m|}{\sqrt{2}}$$

TERCERO. Se impone la condición que pide el problema y se resuelve la ecuación.

$$\frac{|3 + m|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \rightarrow |3 + m| = 2 \rightarrow \begin{cases} 3 + m = 2 \rightarrow m = -1 \\ 3 + m = -2 \rightarrow m = -5 \end{cases}$$

Existen dos rectas cuya distancia a la recta s es $\sqrt{2}$ unidades.

Para $m = -1$: $r: x = -y = z + 1$

Para $m = -5$: $r: x = -y = z + 5$

PRACTICA

36. Dadas las rectas $r: x = -y = z - 1$ y $s: x - 2 = y = z - m$, halla m para que la distancia entre ellas sea de $\sqrt{2}$ unidades.

Distancias

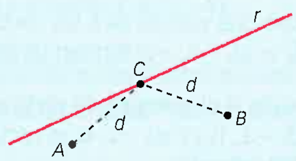
Calcular puntos de una recta que equidistan de otros dos puntos

Se dan los puntos $A(2, 1, 1)$ y $B(1, 0, -1)$ y la recta $r: x - 5 = y = \dfrac{z + 2}{-2}$. Calcula razonadamente el punto C de r que equidista de A y B.

PRIMERO. Se escribe la recta en forma paramétrica para determinar las coordenadas de un punto genérico de la recta.

Un punto de la recta es $P(5, 0, -2)$ y un vector director es $\vec{v} = (1, 1, -2)$.

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 5 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - 2\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \text{Un punto genérico de la recta será de la forma } C(5 + \lambda, \lambda, -2 - 2\lambda)$$



SEGUNDO. Se calcula la distancia de C a los puntos A y B.

$$d(C, A) = \sqrt{(-3 - \lambda)^2 + (1 - \lambda)^2 + (3 + 2\lambda)^2} = \sqrt{6\lambda^2 + 16\lambda + 19}$$

$$d(C, B) = \sqrt{(-4 - \lambda)^2 + (-\lambda)^2 + (1 + 2\lambda)^2} = \sqrt{6\lambda^2 + 12\lambda + 17}$$

TERCERO. Se igualan los resultados para calcular el valor del parámetro.

$$d(C, A) = d(C, B) \rightarrow \sqrt{6\lambda^2 + 16\lambda + 19} = \sqrt{6\lambda^2 + 12\lambda + 17} \rightarrow 6\lambda^2 + 16\lambda + 19 = 6\lambda^2 + 12\lambda + 17 \rightarrow 4\lambda = -2 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

El punto pedido es:

$$C(5 + \lambda, \lambda, -2 - 2\lambda) \xrightarrow{\lambda = -\frac{1}{2}} C\left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$$

PRACTICA

37. Considera los puntos $P(-3, 0, -1)$ y $Q(2, 1, 1)$ y la recta $r: x + 1 = y = -z$. Calcula el punto A de r que equidista de los dos puntos.

Ángulos

38. Considera las rectas que se cortan en el punto $P(1, 0, -1)$ y cuyos vectores directores son $\vec{u} = (2, 1, -2)$ y $\vec{v} = (2, -2, -1)$, respectivamente. Determina el ángulo que forman al cortarse.

39. Determina los ángulos que describen las siguientes parejas de rectas.

a) $r: \left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{array}\right\}$ $\quad s: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z+1}{2}$

b) $r: \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-1}{2}$ $\quad s: \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$

c) $r: \left.\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 2 - 4\lambda \\ z = 7 + 14\lambda \end{array}\right\}$ $\quad s: \left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 6 \\ -x + 4z = 0 \end{array}\right\}$

d) $r: \left.\begin{array}{r} 2x - y + 3z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 5 \end{array}\right\}$ $\quad s: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$

40. Dos rectas que se cortan en el punto $P(5, -2, 7)$ y cuyos vectores directores son $\vec{u} = (0, 1, 1)$ y $\vec{v} = (a, 1, 0)$, respectivamente, forman un ángulo de 60°. Determina los posibles valores del parámetro a.

41. Clasifica en agudo, obtuso o recto el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ según el signo de $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

42. ¿Para qué valores de k los vectores $\vec{a} = (k, 3, 5)$ y $\vec{b} = (2, -4, -2)$ forman un ángulo obtuso?

43. Decide si el triángulo de vértices $A(-2, 4, 0)$, $B(3, -3, 1)$ y $C(6, -2, 4)$ es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.

44. Calcula el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$, sabiendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$ y que $|\vec{a} + \vec{b}| = 6$.

45. Determina el ángulo formado entre la recta $r: \dfrac{x}{2} = y = z$ y el plano $\pi: 2x - y - z = 0$.

46. Calcula el ángulo que forman estas parejas de rectas y planos.

a) $\pi: x - 2y + 3z = 8$ $\quad r: \left.\begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array}\right\}$

b) $\pi: x - 3y - z = 6$ $\quad r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{-4}$

c) $\pi: 2x + 2y + 2z = -3$ $\quad r: \left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = 8 \\ -2x + y + z = 4 \end{array}\right\}$

47. Determina el valor o los valores del parámetro m para que la recta $r: x = \dfrac{y}{m} = -z$ y el plano $\pi: x - z = 0$ formen un ángulo de 30°.

48. Comprueba que los planos $\pi_1: y + 2z = 0$ y $\pi_2: 3y + z = 0$ contienen al eje OX y determina el ángulo que forman.

49. Halla el ángulo que definen estas parejas de planos.

a) $\alpha: 2x - y + 3z = -9$ $\quad \beta: 2x - 2y - 2z = 19$

b) $\alpha: -x + 5y + 3z = -1$ $\quad \beta: 3x + 5y + 7z = 9$

c) $\alpha: -4x + 12y - 28z = -13$ $\quad \beta: \left.\begin{array}{l} x = -2 + t + 3s \\ y = 2 - 2t + s \\ z = 1 - t \end{array}\right\}$

50. Estudia la posición relativa entre las rectas r y s. En caso de que sean secantes, determina el ángulo que forman y su punto de intersección.

$r: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{4} = 3 - z$ $\quad s: \left.\begin{array}{r} x + 3y = 2 \\ 2y + z = 5 \end{array}\right\}$

51. Determina la posición relativa entre las siguientes rectas y, si fuese posible, el ángulo que determinan y su punto de intersección.

$r: (2 - \lambda, 3 + \lambda, 1 + \lambda)$ $\quad s: \left.\begin{array}{r} x + y - 5 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{array}\right\}$

52. Calcula el valor de m para que las rectas r y s sean secantes.

$r: \left.\begin{array}{r} x + y + z + 3 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{array}\right\}$ $\quad s: (-1 + 2\lambda, -1 + \lambda, m - 2\lambda)$

Para ese valor de m, halla el ángulo que forman r y s y el punto de intersección entre ellas.

53. Considera las siguientes rectas.

$r: \left.\begin{array}{l} x = -2 + t \\ y = 4 - t \\ z = m - 2t \end{array}\right\}$ $\quad s: x = y = z$

a) Estudia la posición relativa de las rectas en función del parámetro m.

b) En caso de que sean secantes para algún valor de m, determina el punto de intersección y el ángulo que forman.

54. Considera la recta $r: \dfrac{x}{3} = \dfrac{2y}{5} = -z$ y el plano $\pi: x + 2y - z - 9 = 0$.

a) Estudia la posición relativa entre la recta y el plano.

b) Determina el ángulo formado por la recta y el plano.

55. Considera la recta $r: \left.\begin{array}{r} x - 2y + z - 3 = 0 \\ -3x + y - z + 4 = 0 \end{array}\right\}$ y el plano $\pi: ax + y - 2z - 1 = 0$.

a) Comprueba que el punto $A(1, -1, 0)$ pertenece a la recta r.

b) Sabiendo que el punto $A(1, -1, 0)$ también pertenece al plano π, determina el ángulo formado entre ambos.

56. Sean la recta y el plano con las siguientes ecuaciones.

$$r:\left(1+2\lambda, \frac{\lambda}{2}, a-3\lambda\right) \qquad \pi: x+2y+az-2=0$$

a) Determina la posición relativa entre la recta y el plano en función de los valores del parámetro a.

b) Para $a=0$, determina el ángulo formado por la recta y el plano.

c) Cuando $a=1$, determina la ecuación del plano perpendicular al dado y que contenga a la recta.

57. Considera el punto $P(2, 0, 0)$, la recta $r: \frac{x}{3}=y=\frac{z}{-1}$ y el plano $\pi: x+y-z-5=0$.

a) Comprueba que el punto no pertenece a la recta ni al plano.

b) Comprueba que la recta y el plano son secantes en un punto, determina ese punto y encuentra el ángulo formado entre ambos.

c) Encuentra el ángulo formado por el plano que contiene a la recta r y al punto P con el plano π.

58. Considera los planos de ecuaciones $\pi_1: ax+y+2z+1=0$, $\pi_2: -2x+ay+5z+1=0$ y $\pi_3: 4x-y+az-2=0$. Demuestra que hay un único valor de a para el que los planos son secantes dos a dos y, para ese valor, determina los ángulos formados por cada par de planos.

Proyecciones ortogonales

59. Determina la proyección ortogonal del punto $P(3, 1, 5)$ sobre el eje:

a) OX b) OY c) OZ

A partir de los resultados obtenidos, generaliza la proyección ortogonal de un punto cualquiera sobre los ejes de coordenadas.

60. Determina, en cada uno de los casos, la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r:

a) $P(2, 2, 0)$ y $r: (\lambda, -\lambda, 3+\lambda)$

b) $P(-1, 3, 1)$ y $r: \frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{2}=-z$

c) $P\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ y $r: \left.\begin{array}{r} 2x-y=6 \\ x+z=-1 \end{array}\right\}$

d) $P(-3, 0, 1)$ y $r: \left.\begin{array}{r} x=10-3t \\ y=2t \\ z=-5 \end{array}\right\}$

61. Determina, en cada caso, la proyección ortogonal del punto sobre el plano.

a) $P(3, 3, 1)$ y $\pi: x+y+z-3=0$

b) $P\left(1, -\frac{1}{2}, 0\right)$ y $\pi: -3x+2y-4z-25=0$

c) $P(2, 0, -1)$ y $\pi: \left.\begin{array}{r} x=\lambda \\ y=\beta \\ z=3\beta-11-2\lambda \end{array}\right\}$

62. Determina la proyección ortogonal del punto $P(-1, 4, -3)$ sobre el plano:

a) OXY b) OXZ c) OYZ

A partir del resultado obtenido, generaliza la proyección ortogonal de un punto cualquiera sobre los planos coordenados.

63. Sin calcularlo, deduce cuál de estos puntos es la proyección ortogonal del punto $P(1, 0, 1)$ sobre el plano $\pi: x+y-z-3=0$.

$A(-1, 4, 0)$ $B(0, -1, 2)$ $C(2, 1, 0)$

64. Determina, en cada uno de los casos, la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

a) $r: (2\lambda, -1+\lambda, 5-\lambda)$
$\pi: -x+2y-3z+1=0$

b) $r: \frac{x}{-3}=y-2=\frac{3-z}{3}$
$\pi: x-3y-2z+5=0$

c) $r: \left.\begin{array}{r} -x+3y-1=0 \\ 2y-z+4=0 \end{array}\right\}$
$\pi: -2x+y-z+4=0$

d) $r: \frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{2}=z$
$\pi: 4x-4y-2z-7=0$

65. Determina la proyección ortogonal de la recta $r: (1-\lambda, \lambda, -2\lambda)$ sobre el plano:

a) OXY b) OXZ c) OYZ

66. Determina la proyección ortogonal de cada uno de los ejes de coordenadas sobre el plano de ecuación $\pi: x-y-z+9=0$.

67. Dados la recta $r: \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$, el plano $\pi: x-y+2z+1=0$ y el punto $P(2, 1, -5)$, calcula:

a) La proyección ortogonal del punto P sobre el plano π.

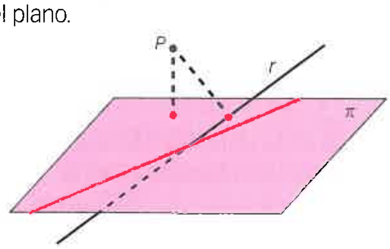
b) La proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

68. Considera el plano $\pi: x+y-4z+7=0$, la recta $r: \left.\begin{array}{r} x=2 \\ z=3 \end{array}\right\}$ y el punto $P(3, -2, 1)$.

a) Determina la proyección ortogonal del punto sobre el plano.

b) Determina la proyección ortogonal del punto sobre la recta.

c) Determina la proyección ortogonal de la recta sobre el plano.



Simetrías

69. Determina el punto simétrico del punto $P(-2, 3, 1)$ respecto al eje:

a) OX b) OY c) OZ

A partir del resultado obtenido, generaliza el punto simétrico de un punto cualquiera sobre los ejes de coordenadas.

70. Determina, en cada uno de los casos, el punto simétrico del punto P respecto de la recta r.

a) $P(-1, 2, 3)$ y $r: (-2\lambda, -1+\lambda, 2)$

b) $P(0, -2, 0)$ y $r: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = z - 6$

c) $P(-1, 2, 13)$ y $r: \left.\begin{matrix} x - 2y = 8 \\ -2x + y + z = 1 \end{matrix}\right\}$

d) $P\left(2, 2, \dfrac{1}{2}\right)$ y $r: (1-2\lambda, 3+2\lambda, -1-\lambda)$

71. Determina el punto simétrico de $P(2, -1, 0)$ respecto del plano:

a) OXY b) OXZ c) OYZ

Saca conclusiones a partir de los resultados que hayas obtenido.

72. Halla el punto simétrico del punto A respecto de la recta r siendo $A(1, 2, 1)$ y $r: x + 1 = y - 2 = \dfrac{z-3}{4}$.

73. Determina, en cada uno de los casos, el punto simétrico del punto P respecto del plano π.

a) $P(1, 0, 1)$ y $\pi: 2x - y - 5z - 12 = 0$

b) $P(-1, 1, 0)$ y $\pi: 3x + 2y - 38 = 0$

c) $P\left(0, \dfrac{1}{2}, -1\right)$ y $\pi: -2y + 5z - 23 = 0$

74. Encuentra la recta simétrica de la recta de ecuación $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-1}$ respecto del plano:

a) OXY b) OXZ c) OYZ

75. Determina, en cada uno de los casos, la recta simétrica de la recta r respecto del plano π.

a) $r: (2\lambda, -1+\lambda, 5-\lambda)$ $\pi: -x + 2y - 3z + 1 = 0$

b) $r: \dfrac{x}{-3} = y - 2 = \dfrac{3-z}{3}$ $\pi: x - 3y - 2z + 5 = 0$

c) $r: \left.\begin{matrix} -x + 3y - 1 = 0 \\ 2y - z + 4 = 0 \end{matrix}\right\}$ $\pi: -2x + y - z + 4 = 0$

d) $r: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+3}{2} = z$ $\pi: 4x - 4y - 2z - 7 = 0$

76. Determina la recta simétrica de cada uno de los ejes de coordenadas con respecto al plano $\pi: -x + y + z - 2 = 0$.

77. Para cada valor de a, los puntos $P(1, 2, 3)$ y $A(0, 1, a)$ son simétricos respecto a un plano.

Halla, de forma razonada, la ecuación de dicho plano. En particular, encuentra el plano para $a = 2$.

78. Escribe las ecuaciones implícitas de una recta con la dirección del vector $(1, -1, 0)$ y que pasa por P', el punto simétrico de $P(0, -2, 0)$ respecto al plano $\pi: x + 3y + z = 5$.

Distancias

79. Calcula la distancia entre los puntos A y B en cada uno de estos casos.

a) $A(1, -1, 3)$ y $B(3, 1, 4)$

b) $A(-2, 1, -5)$ y $B(1, 0, -7)$

80. ¿Es isósceles el triángulo de vértices $A(2, 5, -1)$, $B(3, -2, 4)$ y $C(-2, -3, 11)$?

81. Determina las distancias que hay entre los puntos $P(1, 0, 3)$, $Q(4, 5, 1)$ y $R(10, 15, -3)$. ¿Qué puedes decir de los tres puntos?

82. Determina la distancia del origen de coordenadas al plano:

a) OXY b) OXZ c) OYZ

83. Determina la distancia entre el punto P y el plano π en cada caso.

a) $P(-3, 5, -4)$ y $\pi: -x + 2y + 2z + 1 = 0$

b) $P\left(0, \dfrac{1}{2}, -3\right)$ y $\pi: 2x - 2y - z + 1 = 0$

c) $P\left(7, -6, \dfrac{3}{5}\right)$ y $\pi: 3x - 4y + 6 = 0$

84. Determina un punto de la recta $r: \left.\begin{matrix} x - z = 2 \\ y + 2z = 3 \end{matrix}\right\}$ que se encuentre a una distancia de $\sqrt{6}$ unidades del plano de ecuación $\pi: x - y - 2z + 5 = 0$.

85. Halla la distancia al plano $\pi: 8x - 4y + z - 5 = 0$ de los puntos $P(2, 4, 12)$, $Q(0, -1, 1)$ y $R(1, 3, 2)$. ¿Qué puedes decir del punto Q? ¿Y qué tienen en común P y R?

86. Determina el punto del plano π más cercano al punto A y la distancia que los separa, en cada uno de los siguientes casos.

a) $A(0, -1, 1)$ y $\pi: x - y - z - 3 = 0$

b) $A(-2, 1, -4)$ y $\pi: 3x + 5y - 2z + 7 = 0$

87. Dados la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+2}{2}$ y los planos $\pi_1: 3x + 4y = 1$ y $\pi_2: 4x - 3z = 1$, determina los puntos de la recta que equidistan de ambos planos.

88. Encuentra los puntos de $r: \left.\begin{matrix} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{matrix}\right\}$ que disten $\dfrac{1}{3}$ del plano $\pi: 2x - y + 2z + 1 = 0$.

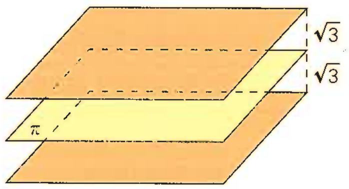
89. Calcula la distancia entre las siguientes parejas de planos.

a) $\pi: \left.\begin{array}{l} x = -4 + 2\lambda + 2\mu \\ y = 1 + \lambda - \mu \\ z = 2 - \lambda - 5\mu \end{array}\right\}$ $\quad \pi': \left.\begin{array}{l} x = 4 + 4\mu \\ y = 3 + \lambda + \mu \\ z = -4 + 2\lambda - 4\mu \end{array}\right\}$

b) $\pi: \left.\begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda - \mu \\ y = -2\lambda + \mu \\ z = 3 + \mu \end{array}\right\}$ $\quad \pi': \left.\begin{array}{l} x = 5 + 4\lambda \\ y = -1 + \lambda - 2\mu \\ z = 8 + 3\lambda + 2\mu \end{array}\right\}$

c) $\pi: 2x - 4y + z - 7 = 0$ $\quad \pi': -x + 3y - 5z + 9 = 0$

90. Considera el plano de ecuación $\pi: 5x - y + 7z + 1 = 0$. Calcula dos planos paralelos a él que se encuentren a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades.



91. Sea el plano $\pi: x + 2y + 3z = 12$. Halla la ecuación de los planos paralelos a π y cuya distancia al origen de coordenadas sea de $\sqrt{14}$ unidades.

92. Dos caras de un cubo están en los planos $\pi_1: 2x - 2y + z - 1 = 0$ y $\pi_2: 2x - 2y + z - 5 = 0$. Calcula la longitud de la arista del cubo.

93. Determina la distancia entre el eje:

a) OX y el plano de ecuación $y + z - 3 = 0$.

b) OY y el plano de ecuación $2x + z + 5 = 0$.

c) OZ y el plano de ecuación $-3x + 4y - 2 = 0$.

94. Determina la distancia entre la recta que pasa por los puntos $A(-1, 1, 1)$ y $B(-3, 2, -5)$, y el plano de ecuación $2x - 2y - z + 3 = 0$.

95. Determina, en cada caso, la distancia entre la recta r y el plano π.

a) $r: \left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 1 \\ -x + y + 3z = 2 \end{array}\right\}$ $\quad \pi: x + 2y - z + 6 = 0$

b) $r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{2y-1}{6} = \dfrac{z}{-4}$ $\quad \pi: x - 2y - z + 3 = 0$

c) $r: \left.\begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = -5 + 2t \\ z = -1 + 4t \end{array}\right\}$ $\quad \pi: 2x - 3y + z - 7 = 0$

96. Determina la ecuación de un plano paralelo a la recta $r: x = \dfrac{y}{-2} = z - 1$ y que contenga a los puntos $A(2, -3, 5)$ y $B(-4, 1, 1)$. Calcula la distancia de la recta r al plano encontrado.

97. El plano π es el que pasa por los puntos $P_1(-3, 0, 0)$, $P_2(1, -1, -1)$ y $P_3(-1, 0, -1)$.

Encuentra los dos puntos de la recta:

$$(\lambda, 1, -2 - \lambda)$$

que están a distancia 1 del plano π.

98. Dados el plano $\pi: 2x + y - z + 6 = 0$, la recta $r: x = y = \dfrac{z-2}{2}$ y el punto $A(-2, 2, 1)$, determina un punto P de la recta r de manera que la recta que pase por los puntos P y A sea paralela al plano π.

Halla la ecuación de esa recta paralela y la distancia del punto P al plano.

99. Calcula los valores del parámetro D para el que la distancia de la recta $r: \dfrac{x-3}{-4} = -y = z - 1$ al plano $\pi: x - 2y + 2z + D = 0$ sea igual a 2 unidades.

100. Determina para qué valores del parámetro D la distancia entre la recta $r: \left.\begin{array}{r} x = 3 \\ y + z = 1 \end{array}\right\}$ y el plano $\pi: 3x + y + z + D = 0$ es de $2\sqrt{11}$ unidades.

101. Calcula la distancia del punto $P(2, -1, 3)$ a los ejes OX, OY y OZ.

102. Determina la distancia entre el punto y la recta en cada uno de los siguientes casos.

a) $P(2, 2, 0)$ y $r: (\lambda, -\lambda, 3 + \lambda)$

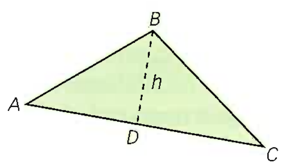
b) $P(-1, 3, 1)$ y $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-3}{2} = -z$

c) $P\left(0, \dfrac{1}{2}, 0\right)$ y $r: \left.\begin{array}{r} 2x - y = 6 \\ x + z = -1 \end{array}\right\}$

d) $P(-3, 0, 1)$ y $r: \left.\begin{array}{r} x = 10 - 3t \\ y = 2t \\ z = -5 \end{array}\right\}$

103. Halla la distancia entre el origen de coordenadas y la recta intersección de los planos de ecuaciones $\pi_1: x + y + 2z = 4$ y $\pi_2: 2x - y + z = 2$.

104. Calcula la longitud de la altura que parte del vértice B en el triángulo de vértices $A(3, -1, -2)$, $B(4, 2, 1)$ y $C(5, 3, 4)$.



105. Se consideran los puntos $A(2, -1, 0)$, $B(3, 1, 1)$, $C(0, 1, 2)$ y $D(5, 4, m)$ y el plano $\pi: 2x + 2y - z + 1 = 0$.

Halla en tu cuaderno:

a) El valor de m para que los 4 puntos sean coplanarios (estén en un mismo plano).

b) El ángulo que forma el plano que determinan los puntos A, B y C con el plano π.

c) La ecuación de los planos paralelos a π y que se encuentren a 2 unidades de distancia.

d) El punto P del plano π que se encuentre más próximo al punto $Q(-1, 2, 0)$.

106. Determina la distancia entre las siguientes rectas.

a) $r: x = y = z$
$s: x = y - 1 = z + 2$

b) $r: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = 2z$
$s: (x, y, z) = (1, 3, 0) + t(-6, -4, -2)$

c) $r: \left.\begin{array}{l} 2x - y + 3z - 3 = 0 \\ x + 3y + 5z - 1 = 0 \end{array}\right\}$
$s: \dfrac{x-5}{2} = y = -z$

107. Demuestra que las rectas que aparecen a continuación son paralelas.

$$L_1: \left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = 3 + t \end{array}\right\} \qquad L_2: \left.\begin{array}{l} 3x - y + 4 = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{array}\right\}$$

Encuentra la ecuación del plano paralelo al determinado por dichas rectas y que diste de él $\sqrt{6}$.

108. En cada uno de los siguientes casos, determina la distancia entre las rectas dadas utilizando estos tres métodos:

- **Método 1:** Calculando el plano que contiene a r y es paralelo a s y, después, hallando $d(P_s, r)$.
- **Método 2:** Calculando la recta secante perpendicular común a r y s y, después, hallando la distancia entre los puntos de corte con ellas.
- **Método 3:** Utilizando la fórmula de la distancia entre dos rectas que se cruzan.

a) $r: \left.\begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}$ y $s: \dfrac{x-1}{3} = y - 3 = \dfrac{z+1}{2}$

b) $r: \left.\begin{array}{l} 2x - y + 2z = 3 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{array}\right\}$ y $s: x = y = z$

c) $r: \left.\begin{array}{r} -x + 2z = 2 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$ y $s: \left.\begin{array}{r} x - 3 = y \\ z = 1 \end{array}\right\}$

109. Sean P y Q los puntos del espacio de coordenadas $P(0, 0, 0)$ y $Q(0, 1, 2)$. Encuentra la condición que debe cumplir un punto de coordenadas $A(x, y, z)$ para que la distancia de A hasta P sea igual que la distancia de A hasta Q.

¿El conjunto de todos los puntos que satisfacen esta condición forma un plano? Razona la contestación.

110. Dado el plano $\pi: x + 3y + z = 4$:

a) Determina la distancia del origen de coordenadas al plano π.

b) Calcula el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π.

c) Calcula el ángulo que forma el plano π y el plano de ecuación $x = 0$.

d) Calcula el volumen del tetraedro T determinado por el plano π y los planos coordenados.

Lugares geométricos. La esfera

111. Determina la ecuación general del lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los puntos:

a) $A(-3, 1, 1)$ y $B(1, 3, 5)$

b) $A(-1, 4, 2)$ y $B(3, -2, 1)$

112. Determina la ecuación general del lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los planos:

a) $\pi_1: x + 2y - 2z + 3 = 0$
$\pi_2: 2x - y + 2z - 7 = 0$

b) $\pi_1: 3x + 4z + 9 = 0$
$\pi_2: 4x - 3y + 6 = 0$

113. Halla todos los puntos tales que, unidos con los puntos $A(3, 5, -1)$, $B(5, 9, -5)$ y $C(6, 2, 2)$, formen un tetraedro de 15 unidades de volumen.

114. Encuentra los puntos de la recta:

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{2}$$

que equidistan de los planos $\alpha: x + y - z + 1 = 0$ y $\beta: x - y + z + 2 = 0$.

115. Determina la ecuación de la esfera de centro el punto C y radio r en cada uno de los casos.

a) $C(-2, 1, 3)$ y $r = 4$

b) $C(4, -1, 0)$ y $r = \sqrt{2}$

116. Determina la ecuación de la esfera de centro el punto C, sabiendo que el punto A se encuentra en su superficie.

a) $C(-1, 2, 3)$ y $A(2, 3, 2)$

b) $C(0, -1, 1)$ y $A(3, -1, 5)$

117. Determina la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$ y $D(0, 0, 1)$. Calcula también su centro y su radio.

118. Determina la ecuación del plano tangente a la esfera, de centro el punto C, en el punto A.

a) $C(-1, 2, 3)$ y $A(2, 3, 2)$

b) $C(0, -1, 1)$ y $A(3, -1, 5)$

119. Conocidas las ecuaciones de la esfera, determina su centro y su radio en cada caso.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 2 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z + 11 = 0$

120. La esfera de centro C es tangente al plano π. Determina en cada caso la ecuación de la esfera y el punto de tangencia.

a) $C(2, -1, 3)$ y $\pi: x - y + z = 0$

b) $C(-3, 1, 0)$ y $\pi: 4x - 3y + 5 = 0$

121. Determina la ecuación de una esfera que tiene su centro en la recta $r: \left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ z - x = 1 \end{array}\right\}$ y es tangente al plano $\pi: x - y + 2z - 4 = 0$ en el punto $P(3, 1, 1)$.

122. Estudia si esta ecuación corresponde a una esfera. En caso afirmativo, calcula su centro y su radio.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2 = 0$$

123. Halla la ecuación del plano tangente a la esfera de centro $C(1, 2, -1)$ en el punto $A(-2, 1, 3)$.

Problemas con ángulos y distancias

124. Considera las rectas r y s de ecuaciones:

$$r: \left.\begin{array}{l} x + 2y - z - 3 = 0 \\ x - y - 3z + 6 = 0 \end{array}\right\} \qquad s: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+a}{3}$$

a) Estudia, en función del parámetro a, la posición relativa de las rectas.

b) Determina la ecuación general de la recta secante perpendicular común a las rectas para $a = 1$.

c) Para $a = 1$, calcula la distancia entre ambas rectas.

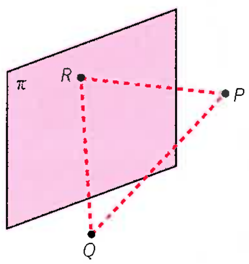
125. Un helicóptero situado en el punto $P(1, 2, 1)$ quiere aterrizar en el plano $\pi: x + y + 3z = 0$.

a) Calcula la ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que le lleve al punto más cercano a π.

b) Halla dicho punto.

c) Calcula la distancia que debe recorrer.

126. Construye un triángulo equilátero de forma que dos de sus vértices sean $P(1, 2, 3)$ y $Q(-1, 4, 3)$ y el tercer vértice R esté en el plano $\pi: x + y + z = 2$. ¿Qué área tiene?



127. Sean los puntos $A(\lambda, 2, \lambda)$, $B(2, -\lambda, 0)$ y $C(\lambda, 0, \lambda + 2)$.

a) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A, B y C estén alineados?

b) Comprueba que si A, B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles.

c) Calcula la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor de $\lambda = 0$, y halla la distancia de este plano al origen de coordenadas.

128. Dadas las rectas $r_1: x = y = z$, $r_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$ y $r_3: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$, determina sus tres puntos de corte A, B y C, respectivamente, con el plano $\pi: 5x - 4y + 7z + 1 = 0$ y halla el área del triángulo ABC.

129. Considera la recta $r: \left.\begin{array}{r} x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{array}\right\}$ y los puntos $P(1, 2, 3)$ y $Q(-1, 0, 1)$.

a) Determina el punto simétrico de P respecto de r.

b) Calcula un punto R de la recta r de modo que el triángulo PQR sea rectángulo en Q y determina su área.

130. Dados los planos $\pi_1: x - 2y = 1$, $\pi_2: x + 2z = 2$ y el punto $P(1, -2, 3)$, calcula el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y las proyecciones de este sobre los planos π_1 y π_2.

131. Tenemos un punto $A(12, -1, 1)$ y una recta r que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$ y tiene como vector director al vector $\vec{v}(3, 4, 0)$. Encuentra el punto o los puntos de la recta r que determinan, junto con A y P, un triángulo de área igual a 50 unidades cuadradas.

132. Sean los puntos $A(1, 3, -2)$, $B(2, 2m + 1, m)$ y $C(m + 1, 4, 3)$.

a) Determina para qué valor de m el triángulo ABC es rectángulo, con el ángulo recto en el vértice A.

b) Para $m = 0$, determina el punto o los puntos D de la recta $r: (\lambda, 3, \lambda)$ tales que el volumen del tetraedro formado por los puntos A, B, C y D sea de $0{,}5\ u^3$.

133. Considera el plano π, perpendicular al segmento $\overline{PQ}$ por su punto medio, con $P(8, 13, 8)$ y $Q(-4, -11, -8)$.

a) Calcula la ecuación del plano π.

b) Obtén la proyección ortogonal del origen sobre π.

c) Halla el volumen del tetraedro determinado por los puntos en los que el plano π corta a los ejes coordenados y el origen de coordenadas.

134. Dados el punto $P(1, 1, 3)$ y la recta $r: \left.\begin{array}{r} 2x - y - 2z + 3 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{array}\right\}$, calcula un punto R de la recta r tal que el triángulo PQR sea rectángulo en P, con Q el punto de corte de la recta r con el plano OXY. Determina su área.

135. Halla el área del triángulo de vértices ABC, sabiendo que A es el punto de corte de la recta $r: x - 1 = \frac{y+2}{3} = 3 - z$ y el plano $\pi_1: x - y + z + 1 = 0$, B es el punto de corte de la recta r con el plano $\pi_2: z = 2$ y C es la proyección ortogonal del punto B sobre el plano π_1.

136. Halla la ecuación general del plano que equidista de los puntos $P(2, 1, 3)$ y $Q(0, 3, -1)$ y es paralelo al plano $\pi: 3x - y + z + 1 = 0$.