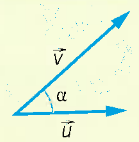
6 Producto escalar

Se llama **producto escalar** de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y se escribe $\vec{u} \cdot \vec{v}$, al número real que resulta al multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$



Se escribe así

El producto escalar de dos vectores, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, también se puede escribir como $<\vec{u}, \vec{v}>$.

EJEMPLO

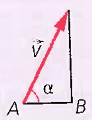
8 Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u} = (-1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (0, 1, 1)$, sabiendo que el ángulo que forman es $\alpha = 60°$.

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \cos 60° = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Recuerda

En un triángulo rectángulo, el cateto contiguo a uno de los ángulos distinto del recto es igual a la hipotenusa por el coseno de dicho ángulo.

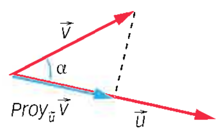
$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$



6.1. Interpretación geométrica del producto escalar

El producto escalar de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, equivale al producto del módulo de cualquiera de ellos por el módulo de la proyección del otro sobre él.

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, no nulos, la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, $Proy_{\vec{u}}\vec{v}$, es el cateto, que sigue la dirección de $\vec{u}$, del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $\vec{v}$.



Al ser un triángulo rectángulo, la medida del cateto, que es el módulo de $Proy_{\vec{u}}\vec{v}$, es: $|Proy_{\vec{u}}\vec{v}| = |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$

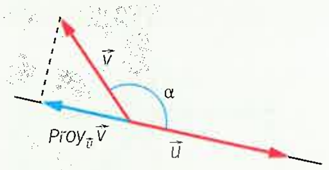
Sustituyendo este valor en la expresión del producto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha = |\vec{u}| \cdot |Proy_{\vec{u}}\vec{v}|$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\alpha = |\vec{v}| \cdot |Proy_{\vec{v}}\vec{u}|$$

Date cuenta

Cuando el módulo de la proyección es un número negativo, el signo negativo indica que la proyección y el vector sobre el que se proyecta tienen sentido contrario.



EJEMPLO

9 Dados los vectores $\vec{u} = (1, -1, 0)$ y $\vec{v} = (0, 1, -1)$ que forman un ángulo de 120°, calcula $|Proy_{\vec{u}}\vec{v}|$ aplicando la definición de producto escalar.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |Proy_{\vec{u}}\vec{v}| \end{array}\right\} \rightarrow |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha = |\vec{u}| \cdot |Proy_{\vec{u}}\vec{v}|$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot |Proy_{\vec{u}}\vec{v}| \rightarrow |Proy_{\vec{u}}\vec{v}| = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ACTIVIDADES

13. Calcula, en cada caso, el producto escalar, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, aplicando la definición.

a) $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (-4, 2, -2)$ y $\alpha = 180°$

b) $\vec{u} = (-2, 3, 2)$, $\vec{v} = (1, 2, -2)$ y $\alpha = 90°$

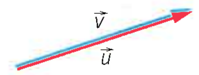
14. Los vectores $\vec{u} = (-1, 0, 1)$ y $\vec{v} = (-1, -1, 0)$ forman un ángulo de 60°. Aplicando la definición de producto escalar, calcula:

a) $|Proy_{\vec{u}}\vec{v}|$ b) $|Proy_{\vec{v}}\vec{u}|$

6.2. Propiedades

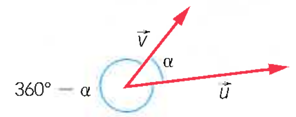
- El producto escalar de un vector por sí mismo es el cuadrado de su módulo: $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 0° = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| = |\vec{v}|^2$$



- Propiedad conmutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\alpha = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos(360° - \alpha) = \vec{v} \cdot \vec{u}$$



- Propiedad distributiva respecto de la suma:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

- Propiedad respecto al producto por números reales:

$$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) \qquad \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

- El producto escalar de dos vectores no nulos es cero si, y solo si, los vectores son perpendiculares:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha = 0 \rightarrow \cos\alpha = 90° \rightarrow \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son perpendiculares.}$$

Se escribe así

$\widehat{\vec{u}\vec{v}}$ = Ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

6.3. Expresión en coordenadas del producto escalar

En el sistema de referencia canónico, el producto escalar de dos vectores, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, es:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Para comprobarlo, multiplicamos primero los vectores de la base canónica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, de módulo 1 y perpendiculares entre sí:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0° = 1 \qquad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 90° = 0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 0° = 1 \qquad \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos 90° = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos 0° = 1 \qquad \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = |\vec{j}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos 90° = 0$$

Aplicando la propiedad distributiva, podemos calcular el producto escalar de dos vectores dados en coordenadas:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}) \cdot (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Recuerda

En el **sistema de referencia canónico** en el espacio $\{O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}\}$:

- El punto fijo es el origen de coordenadas, $O(0, 0, 0)$.
- Los vectores de la base $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ tienen módulo 1 y son perpendiculares entre sí.
- Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, esto significa que $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$.

EJEMPLO

10 Dados los vectores $\vec{u} = (1, -1, 0)$ y $\vec{v} = (0, 1, -1)$, calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = -1$

b) $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = 2$

c) $3\vec{u} \cdot \vec{v}$ $3\vec{u} = (3, -3, 0)$

$3\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = -3$

ACTIVIDADES

15. Dados, en el sistema de coordenadas canónico, los vectores $\vec{u} = (-3, 1, -1)$, $\vec{v} = (0, 2, -2)$ y $\vec{w} = (-1, 3, -5)$, calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ d) $\vec{v} \cdot 2\vec{w}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{w}$ e) $2\vec{u} \cdot 3\vec{v}$

c) $-\vec{v} \cdot \vec{w}$ f) $(\vec{u} - \vec{w}) \cdot 2\vec{v}$

16. Sean los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, -1, m + 2)$ en el sistema de coordenadas canónico. Halla el valor de m para que se verifique lo siguiente:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$ d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ e) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

c) $\vec{v} \cdot \vec{u} = 3$ f) $\vec{u} \perp \vec{v}$