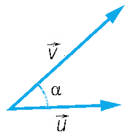
7 Aplicaciones del producto escalar

7.1. Ángulo entre dos vectores



Consideramos la expresión del producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Si tomamos $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, la expresión en coordenadas del coseno del ángulo formado por ambos es:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3 \\ |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}\end{array}\right\} \rightarrow \cos\alpha = \frac{u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

Para cada valor de a, tal que $0 \le a \le 1$, existen dos ángulos cuyo coseno vale a: $\cos\alpha = a$ y $\cos(360° - \alpha) = a$. Consideraremos que el ángulo entre los dos vectores es el menor de estos.

No olvides

Consideramos que el ángulo entre dos vectores es el menor de 180° o π radianes.

EJEMPLO

11 Halla el ángulo que forman los vectores.

a) $\vec{u} = (-2, 3, 0)$ $\quad \vec{v} = (2, 1, -1)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{-2\cdot 2 + 3\cdot 1 + 0\cdot(-1)}{\sqrt{(-2)^2+3^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{78}}$$

Si $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{78}} \rightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{78}}\right) = 96°\ 30'\ 5''$

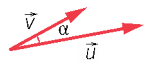
b) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ $\quad \vec{v} = (-2, -4, -6)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{1\cdot(-2)+2\cdot(-4)+3\cdot(-6)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(-6)^2}} = \frac{-28}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{56}} = -1$$

Si $\cos\alpha = -1 \rightarrow \alpha = \arccos(-1) = 180°$

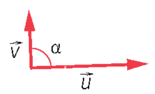
El signo del producto escalar de dos vectores es el mismo que el signo del coseno del ángulo que forman.

- Si el producto escalar es positivo, el ángulo que forman es agudo.



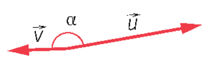
$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v} > 0 \\ \cos\alpha > 0\end{array}\right\}$

- Si el producto es cero, el ángulo que forman es recto, y son perpendiculares.



$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \\ \cos\alpha = 0\end{array}\right\}$

- Si el producto es negativo, el ángulo que forman es obtuso.



$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v} < 0 \\ \cos\alpha < 0\end{array}\right\}$

ACTIVIDADES

17. Determina el ángulo formado por estos vectores.

a) $\vec{u} = (3, -1, 1)$ y $\vec{v} = (-1, 2, 4)$

b) $\vec{u} = (4, -3, 2)$ y $\vec{v} = (2, -1, -1)$

18. Calcula el valor de m para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

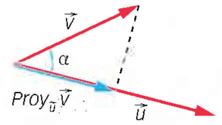
a) $\vec{u} = (0, -3, 2)$ y $\vec{v} = (m, -m+2, 6)$

b) $\vec{u} = (-1, m, 1)$ y $\vec{v} = (-2, 1, m+1)$

7.2. Proyección de un vector sobre otro vector

Conocemos, por la interpretación geométrica del producto escalar, cuál es el módulo de la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|Proy_{\vec{u}}\vec{v}| \rightarrow |Proy_{\vec{u}}\vec{v}| = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|}$$



La **proyección de un vector** $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ sobre un vector $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es un vector de coordenadas:

$$Proy_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|}\cdot\vec{u} = \frac{u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}\cdot(u_1, u_2, u_3)$$

EJEMPLO

12 Dados los vectores $\vec{u} = (2, -1, 1)$ y $\vec{v} = (-2, 0, -1)$, calcula la proyección del vector $\vec{v}$ sobre el vector $\vec{u}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 0 + 1\cdot(-1) = -5 \\ |\vec{u}| = \sqrt{2^2+(-1)^2+1^2} = 2{,}45\end{array}\right\} \rightarrow Proy_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{-5}{2{,}45}\cdot(2, -1, 1) =$$

$$= (-4{,}08;\ 2{,}04;\ -2{,}04)$$

La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ tiene módulo $-2{,}04$ y coordenadas $(-4{,}08; 2{,}04; -2{,}04)$.

El signo negativo del módulo nos indica que tiene sentido contrario al vector $\vec{u}$.

7.3. Vector perpendicular a otro vector

Dos **vectores son perpendiculares** cuando su producto escalar es 0.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \perp \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \rightarrow u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3 = 0$$

Se escribe así

$\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow$ Significa que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

$\vec{u} \parallel \vec{v} \rightarrow$ Significa que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos.

SABER HACER

Calcular los vectores perpendiculares a otro vector

▶ Dado el vector $\vec{u} = (1, -1, 2)$, calcula los vectores perpendiculares a él.

PRIMERO. Se escribe la condición de perpendicularidad para un vector genérico $\vec{v}$.

$$\vec{u} = (1, -1, 2) \perp \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \rightarrow (1, -1, 2)\cdot(v_1, v_2, v_3) = v_1 - v_2 + 2v_3 = 0$$

SEGUNDO. Se resuelve la ecuación despejando una incógnita en función de las otras.

$$v_1 - v_2 + 2v_3 = 0 \rightarrow v_1 = v_2 - 2v_3 \rightarrow v_1 = \lambda - 2\mu,\ v_2 = \lambda,\ v_3 = \mu$$

TERCERO. Se escribe la solución en forma vectorial, y se descompone la solución en la suma de dos vectores, siendo cada uno dependiente de un parámetro.

$$(v_1, v_2, v_3) = (\lambda - 2\mu, \lambda, \mu) = (\lambda, \lambda, 0) + (-2\mu, 0, \mu)$$

CUARTO. Se saca factor común a cada parámetro, obteniendo dos vectores que forman una base de los vectores perpendiculares al dado.

$$(\lambda, \lambda, 0) + (-2\mu, 0, \mu) = \lambda(1, 1, 0) + \mu(-2, 0, 1) \rightarrow \mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$$

Todo vector perpendicular a $\vec{u}$ es combinación lineal de los elementos de la base $\mathcal{B}$.

ACTIVIDADES

19. Calcula la $Proy_{\vec{u}}\ \vec{v}$ con $\vec{u} = (4, -1, 2)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 1)$.

20. Determina dos vectores perpendiculares a $\vec{u} = (0, 1, -2)$.