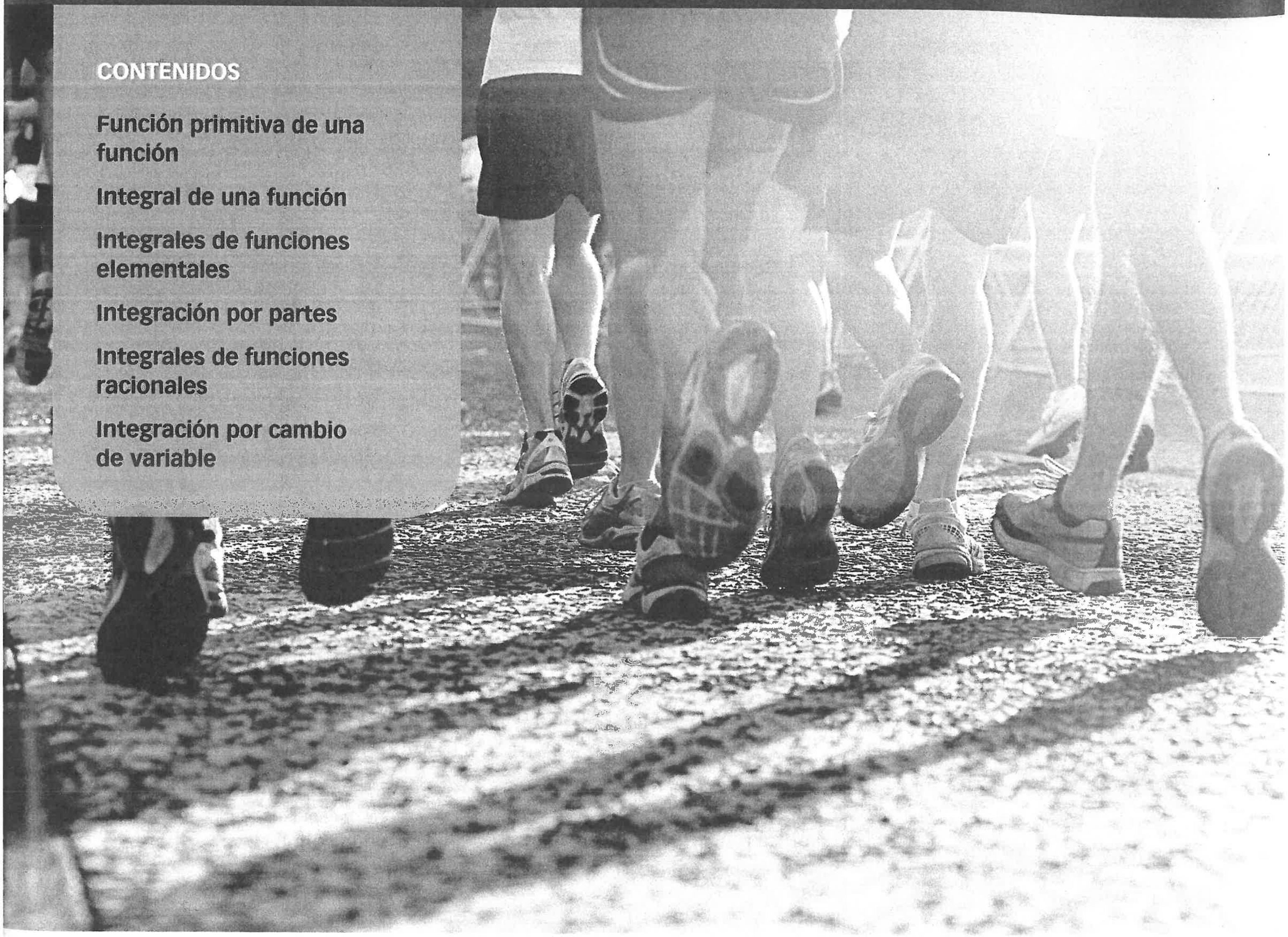
11 Integrales indefinidas



CONTENIDOS

- **Función primitiva de una función**
- **Integral de una función**
- **Integrales de funciones elementales**
- **Integración por partes**
- **Integrales de funciones racionales**
- **Integración por cambio de variable**

Seguro que en alguna ocasión has vivido una situación como esta. Hay unas zapatillas deportivas que se ponen de moda y que todo el mundo quiere. Al principio hay poca gente que las lleva porque son muy caras y no todo el mundo se las puede permitir.

Pero va pasando el tiempo, y cada vez que paseas por la calle ves más gente que lleva las zapatillas que te gustan. Al pararte frente al escaparate de una tienda resulta que el precio de las zapatillas deportivas ha disminuido. Aunque, por desgracia, siguen siendo caras para el dinero que has podido ahorrar.

El tiempo sigue pasando y sigue habiendo cada vez más personas que las tienen. Pero es que además el precio sigue bajando.

Ha llegado tu momento, por fin te las puedes comprar. Aunque a lo mejor siguen bajando su precio y podrías ahorrarte unos euros. Pero… ¿y si el precio no bajase más? ¿Deberías esperar?

Si conforme la marca de zapatillas deportivas vende más, abarata el precio…

¿Cómo se puede saber cuándo el precio se quedará estable?

1 Función primitiva de una función

Se llama **función primitiva** de $f(x)$ a otra función $F(x)$ que cumple que $F'(x) = f(x)$.

EJEMPLOS

1 **Comprueba que $F(x) = x^5$ es una función primitiva de $f(x) = 5x^4$.**

$F'(x) = 5x^4 \rightarrow F'(x) = f(x)$

La función $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

2 **Comprueba que $G(x) = x^5 - 1$ y $H(x) = x^5 + 5$ son funciones primitivas de $f(x) = 5x^4$.**

$G'(x) = 5x^4 - 0 = 5x^4$ $\qquad$ $H'(x) = 5x^4 + 0 = 5x^4$

Las funciones $G(x)$ y $H(x)$ son funciones primitivas de $f(x)$.

Si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, cualquier otra función primitiva de $f(x)$ es de la forma $F(x) + k$, con $k \in \mathbb{R}$.

No olvides

La primitiva de una función no es única.

Para demostrar esta propiedad tenemos que ver que si $F(x)$ y $G(x)$ son funciones primitivas de $f(x)$, entonces $F(x)$ y $G(x)$ solo se diferencian en una constante, k. Es decir, se verifica que $F(x) - G(x) = k$.

$$\left.\begin{array}{l} F(x) \text{ es una primitiva de } f(x) \rightarrow F'(x) = f(x) \\ G(x) \text{ es una primitiva de } f(x) \rightarrow G'(x) = f(x) \end{array}\right\} \rightarrow F'(x) - G'(x) = 0$$

Como sabemos que la derivada de una resta es la resta de las derivadas:

$$F'(x) - G'(x) = 0 \underset{[f-g]' = f' - g'}{\rightarrow} [F(x) - G(x)]' = 0$$

La única función cuya derivada es 0 es la función constante:

$$[F(x) - G(x)]' = 0 \rightarrow F(x) - G(x) = k$$

EJEMPLO

3 **Comprueba que cualquier función del tipo $F'(x) = x^5 + k$, con $k \in \mathbb{R}$, es una función primitiva de $f(x) = 5x^4$.**

$F'(x) = 5x^5 + 0 = 5x^4 \rightarrow F'(x) = f(x)$ para cualquier valor de k

Así, $F(x) = x^5 + k$, con $k \in \mathbb{R}$, es una función primitiva de $f(x) = 5x^4$.

ACTIVIDADES

1. Asocia cada función con una primitiva suya.

a) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2$ $\qquad$ I) $F(x) = 4x^3 + 3x^2$

b) $f(x) = x^4 + x^3 - 2$ $\qquad$ II) $F(x) = x^5 - x^3 + 2x + 3$

c) $f(x) = 12x^2 + 6x$ $\qquad$ III) $F(x) = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^4}{4} - 2x + 1$

2. Determina una primitiva para cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 8x^3 - 4x + 5$ $\qquad$ c) $f(x) = 3e^x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{8x^3}{5}$ $\qquad$ d) $f(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

2 Integral de una función

La **integral de una función** $f(x)$ es el conjunto de todas sus primitivas, y se representa como $\int f(x)\,dx$. Se lee «la integral de $f(x)$ diferencial de x». Por tanto, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k$$

A k se le llama **constante de integración**.

Date cuenta

La **integración** es el proceso de cálculo de las primitivas de una función.

Es decir, la derivación y la integración son procesos inversos.

$$f(x) \underset{\text{Integración}}{\overset{\text{Derivación}}{\rightleftarrows}} f'(x)$$

EJEMPLO

4 Resuelve estas integrales.

a) $\int 4x^3\,dx = x^4 + k$
porque $[x^4 + k]' = 4x^3$

b) $\int e^x\,dx = e^x + k$
porque $[e^x]' = e^x$

Propiedades de la integral

Suma y resta: $\int [(f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Producto por un número: $\int [k \cdot f(x)]\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$

EJEMPLO

5 Resuelve las siguientes integrales.

a) $\int (5x^4 + 2x)\,dx = \int 5x^4\,dx + \int 2x\,dx = x^5 + x^2 + k$, porque $[x^5 + x^2 + k]' = 5x^4 + 2x$

$\int (f+g) = \int f + \int g$

b) $\int 3e^x\,dx = 3\int e^x dx = 3e^x + k$, porque $[3e^x]' = 3e^x$

$\int (kf) = k\int f$

Se escribe así

A veces, escribimos para abreviar:

$$\int f(x)\,dx = \int f$$

$$\int g(x)\,dx = \int g$$

ACTIVIDADES

3. Calcula la integral de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$
b) $f(x) = 2\cos x$
c) $f(x) = 4x^3 - \operatorname{sen} x$
d) $f(x) = 2x - e^x$
e) $f(x) = 3 - e^{-x}$
f) $f(x) = 5 - 4x - \cos x$
g) $f(x) = 5e^x + 2\cos x$
h) $f(x) = 7\operatorname{sen} x + 4\cos x$

4. Si $\int f(x)\,dx = F(x) + k$ y $\int g(x)\,dx = G(x) + k$, halla:

a) $\int [f(x) + g(x)]\,dx$
b) $\int [2f(x) - g(x)]\,dx$
c) $\int \left[\frac{1}{2}f(x) - 2g(x)\right]dx$
d) $\int [-f(x) + b \cdot g(x)]\,dx$

3 Integrales de funciones elementales

3.1. Integral de la función constante

La **integral de una constante** es igual a esa constante multiplicada por x.

$$\int c\,dx = cx + k, \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

EJEMPLO

6 Resuelve las siguientes integrales.

a) $\int 5\,dx = 5x + k$

b) $\int -5\,dx = -5x + k$

3.2. Integral de las funciones potenciales

$$n \neq -1 \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \qquad \int f(x)^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + k$$

Date cuenta

Para comprobar los resultados de estas integrales hay que derivar.

$\int c\,dx = cx + k \rightarrow [cx + k]' = c$

$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k \rightarrow$

$\rightarrow \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k\right]' = \dfrac{\cancel{(n+1)}x^n}{\cancel{n+1}} = x^n$

EJEMPLO

7 Resuelve estas integrales.

a) $\int x^6\,dx = \dfrac{x^{6+1}}{6+1} + k = \dfrac{x^7}{7} + k$

b) $\int \dfrac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \dfrac{x^{-2+1}}{-2+1} + k = \dfrac{x^{-1}}{-1} + k = -\dfrac{1}{x} + k$

c) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + k = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k = \dfrac{2\sqrt{x^3}}{3} + k$

d) $\int \left(x - \dfrac{1}{4x^3}\right)dx = \int x\,dx - \int \dfrac{1}{4}x^{-3}\,dx = \dfrac{x^{1+1}}{1+1} - \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{x^{-3+1}}{-3+1} + k = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{8x^2} + k$

e) $\int (3x^2 - 7)^4\, 6x\,dx$ Si $f(x) = 3x^2 - 7 \rightarrow f'(x) = 6x$

$$\int (3x^2 - 7)^4\, 6x\,dx = \frac{(3x^2 - 7)^{4+1}}{4+1} + k = \frac{(3x^2 - 7)^5}{5} + k$$

f) $\int \dfrac{1}{(3x^2 - 7)^4} \cdot 6x\,dx = \int (3x^2 - 7)^{-4} 6x\,dx = \dfrac{(3x^2 - 7)^{-4+1}}{-4+1} + k = -\dfrac{1}{3(3x^2 - 7)^3} + k$

ACTIVIDADES

5. Calcula la integral de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 + 3x - 2$ b) $f(x) = \dfrac{3}{x^3}$ c) $f(x) = 3\sqrt[4]{x^3}$

6. Resuelve.

a) $\int (1 - x)^2\,dx$ b) $\int (1 - x^2)^2\,dx$ c) $\int 2x\sqrt{x^2 + 3}\,dx$

SABER HACER

Resolver una integral donde falta un factor numérico

Halla esta integral: $\int (3x^4-2)^3 x^3\,dx$

PRIMERO. Se elige el tipo de integral al que corresponde.

En este caso, es de tipo potencial: $\int f(x)^n f'(x)\,dx$

$$f(x)=3x^4-2 \rightarrow f'(x)=12x^3$$

SEGUNDO. Si falta alguno de los factores numéricos en la integral para completar la derivada, se multiplica y se divide por él.

Se multiplica y se divide por 12 $\rightarrow \int \frac{(3x^4-2)^3x^3}{12}\cdot 12\,dx$

TERCERO. Se saca de la integral el factor numérico que no se necesita para completar la derivada, $f'(x)$, y se resuelve la integral.

$$\frac{1}{12}\int (3x^4-2)^3\cdot 12x^3dx=\frac{1}{12}\cdot\frac{(3x^4-2)^4}{4}+k=\frac{(3x^4-2)^4}{48}+k$$

En una integral siempre se puede introducir o extraer un número como factor, pero nunca un término que contenga la variable x.

EJEMPLO

3 Resuelve las siguientes integrales.

a) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2-1}}dx=\int 2x(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}}dx$ Si $f(x)=3x^2-1\rightarrow f'(x)=6x$

$$\int 2x(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{3}\int 6x(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+k=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+k=\frac{2\sqrt{3x^2-1}}{3}+k$$

b) $\int(\sqrt{3x}+1)^2dx$ Si $f(x)=\sqrt{3x}+1\rightarrow f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$

Se necesita $\sqrt{x}$ para completar la derivada de la función. Como no se puede introducir ningún término con x, se desarrolla la potencia del polinomio.

$$\int(\sqrt{3x}+1)^2dx=\int(3x+2\sqrt{3x}+1)\,dx=\int 3x\,dx+2\sqrt{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int 1\,dx=$$

$$=\frac{3x^2}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^3}+x+k$$

No olvides

- $\int f(x)\,dx=\int\frac{k\cdot f(x)}{k}dx$
- $\int\frac{k\cdot f(x)}{k}dx=\begin{cases}\frac{1}{k}\int k\cdot f(x)\,dx\\ k\int\frac{f(x)}{k}dx\end{cases}$

ACTIVIDADES

7. Halla las siguientes integrales.

a) $\int x(x^2+3)\,dx$

b) $\int (x-2)(x^2-4x+1)^3dx$

8. Calcula la integral de las siguientes funciones.

a) $\int\sqrt{2x-1}\,dx$

b) $\int x\sqrt{x^2-2}\,dx$

c) $\int e^{2x}dx$

d) $\int (x+1)e^{x^2+2x-1}dx$

3.3. Integral de tipo logarítmico

Se escribe así

Como no existen los logaritmos de números negativos, al calcular integrales de tipo logarítmico se toman valores absolutos.

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + k$$

$$n = -1 \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + k \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + k$$

EJEMPLO

9 Halla la integral indefinida $\int \frac{5}{4x+3}dx$.

Si $f(x) = 4x + 3 \rightarrow f'(x) = 4$ $\qquad \int \frac{5}{4x+3}dx = \frac{5}{4}\int \frac{4}{4x+3}dx = \frac{5}{4}\ln|4x+3| + k$

$$\boxed{\int \frac{f'}{f} = \ln|f|}$$

SABER HACER

Resolver una integral del tipo $\int \frac{f'(x)}{f^n(x)}$

Calcula las integrales. a) $\int \frac{5x}{1-2x^2}dx$ b) $\int \frac{5x}{(1-2x^2)^3}dx$

PRIMERO. Si $n \neq 1$, se expresa la potencia del denominador con exponente negativo, y se calcula $f'(x)$.

a) $n = 1$

$f(x) = 1 - 2x^2 \rightarrow f'(x) = -4x$

b) $\int \frac{5x}{(1-2x^2)^3}dx = \int 5x(1-2x^2)^{-3}dx$

$f(x) = 1 - 2x^2 \rightarrow f'(x) = -4x$

SEGUNDO. Si falta alguno de los factores en la integral para completar la derivada, se multiplica y se divide por dicho factor numérico.

En ambas integrales se necesita multiplicar y dividir por -4.

a) $\int \frac{5x}{1-2x^2}dx = \int \frac{(-4)5x}{(-4)(1-2x^2)}dx = \frac{5}{-4}\int \frac{-4x}{1-2x^2}dx$

b) $\int \frac{5x}{(1-2x^2)^3}dx = \int \frac{-4}{-4}5x(1-2x^2)^{-3}dx = \frac{5}{-4}\int -4x(1-2x^2)^{-3}dx$

TERCERO. Se resuelve la integral resultante.

a) $\int \frac{5x}{1-2x^2}dx = -\frac{5}{4}\int \frac{-4x}{1-2x^2}dx = -\frac{5}{4}\ln|1-2x^2| + k$

b) $\int \frac{5x}{(1-2x^2)^3}dx = -\frac{5}{4}\int -4x(1-2x^2)^{-3}dx = -\frac{5}{4}\cdot\frac{(1-2x^2)^{-3+1}}{-3+1} + k =$

$$= -\frac{5}{4}\cdot\frac{(1-2x^2)^{-2}}{-2} + k = \frac{5(1-2x^2)^{-2}}{8} + k = \frac{5}{8(1-2x^2)^2} + k$$

No olvides

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx \longrightarrow$ Integral de tipo logarítmico

$\int \frac{f'(x)}{f^n(x)}dx \xrightarrow{\text{Si } n \neq 1}$ Integral de una función potencial

ACTIVIDADES

9. Resuelve estas integrales de tipo logarítmico.

a) $\int \frac{4x}{2x^2+1}dx$ c) $\int \frac{x+1}{x^2+2x}dx$

b) $\int \frac{x^2}{x^3+3}dx$ d) $\int \frac{5x}{1-x^2}dx$

10. Halla las siguientes integrales.

a) $\int \frac{4x^3}{x^4+2}dx$ c) $\int \frac{4x^3}{\sqrt[3]{x^4+2}}dx$

b) $\int \frac{4x^3}{(x^4+2)^2}dx$ d) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}dx$

3.4. Integral de las funciones exponenciales

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k \qquad \int a^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + k$$

$$\int e^x\,dx = e^x + k \qquad \int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + k$$

EJEMPLO

10 Resuelve estas integrales de funciones exponenciales.

a) $\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + k$

b) $\int 2^{3x^2-2} \cdot 6x\,dx$

Si $f(x) = 3x^2 - 2 \rightarrow f'(x) = 6x$ $\qquad \int 2^{3x^2-2} \cdot 6x\,dx = \frac{2^{3x^2-2}}{\ln 2} + k$

$$\boxed{\int a^f \cdot f' = \frac{a^f}{\ln a}}$$

c) $\int e^{3x}\,dx$

Si $f(x) = 3x \rightarrow f'(x) = 3$

Para que sea de tipo $\int e^f \cdot f'$ se necesita un 3 dentro de la integral.

$$\int e^{3x}\,dx = \int \frac{e^{3x} \cdot 3}{3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{3x} \cdot 3\,dx = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} + k$$

d) $\int 5x^2 e^{x^3}\,dx$

Si $f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$

Para que sea de tipo $\int e^f \cdot f'$ se necesita un 3 dentro de la integral y sobra un 5.

$$\int 5x^2 e^{x^3}\,dx = 5\int \frac{3x^2 e^{x^3}}{3}\,dx = \frac{5}{3}\int e^{x^3} \cdot 3x^2\,dx = \frac{5}{3} \cdot e^{x^3} + k$$

e) $\int 7^{-\frac{x}{2}}\,dx$

Si $f(x) = -\frac{x}{2} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}$

Para que sea de tipo $\int a^f \cdot f'$ se necesita un $-\frac{1}{2}$ dentro de la integral.

$$\int 7^{-\frac{x}{2}}\,dx = \int 7^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{-2}{-2}\,dx = -2\int 7^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{-2}\,dx = -2 \cdot \frac{7^{-\frac{x}{2}}}{\ln 7} + k$$

ACTIVIDADES

11. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int 3^{\frac{x}{2}}\,dx$

b) $\int e^{x+1}\,dx$

c) $\int \left(\frac{1}{2}\right)^{4x}\,dx$

d) $\int (e^{-3x} + e^{x-2})\,dx$

12. Halla estas integrales de funciones exponenciales.

a) $\int 7^{x^2+1} \cdot 2x\,dx$

b) $\int 5e^{\frac{x}{2}+2}\,dx$

c) $\int \frac{3^{5x-1}}{7}\,dx$

d) $\int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx$

3.5. Integral de las funciones trigonométricas

$$\int sen\ x\ dx = -cos\ x + k \qquad \int sen\ f(x) \cdot f'(x)\ dx = -cos\ f(x) + k$$

$$\int cos\ x\ dx = sen\ x + k \qquad \int cos\ f(x) \cdot f'(x)\ dx = sen\ f(x) + k$$

$$\int (1 + tg^2\ x)\ dx = tg\ x + k \qquad \int (1 + tg^2\ f(x)) \cdot f'(x)\ dx = tg\ f(x) + k$$

$$\int \frac{1}{cos^2\ x}\ dx = tg\ x + k \qquad \int \frac{1}{cos^2\ f(x)} \cdot f'(x)\ dx = tg\ f(x) + k$$

EJEMPLO

11 Resuelve las siguientes integrales.

a) $\int sen\ (x + 2)\ dx$

Si $f(x) = x + 2 \rightarrow f'(x) = 1$ $\qquad \int sen\ (x+2)\ dx = -cos\ (x + 2) + k$

b) $\int \frac{cos\ (\ln 3x)}{3x}\ dx$

Si $f(x) = \ln 3x \rightarrow f'(x) = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$

$$\int \frac{cos\ (\ln 3x)}{3x}\ dx = \frac{1}{3}\int cos\ (\ln 3x) \cdot \frac{1}{x}\ dx = \frac{1}{3}\ sen\ (\ln 3x) + k$$

c) $\int (1 + tg^2\ (2 - x))\ dx$

Si $f(x) = 2 - x \rightarrow f'(x) = -1 \rightarrow$ Se necesita un -1 dentro de la integral.

$$\int (1 + tg^2\ (2 - x))\ dx = \int \frac{[1 + tg^2(2 - x)] \cdot (-1)}{-1}\ dx = -\int [1 + tg^2(2 - x)] \cdot (-1)\ dx =$$
$$= -tg(2 - x) + k$$

d) $\int \frac{\sqrt{3}}{cos^2 \frac{x}{2}}\ dx$

Si $f(x) = \frac{x}{2} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \rightarrow$ Se necesita un $\frac{1}{2}$ y sobra $\sqrt{3}$.

$$\int \frac{\sqrt{3}}{cos^2 \frac{x}{2}}\ dx = \sqrt{3}\int \frac{2}{2\ cos^2 \frac{x}{2}}\ dx = 2\sqrt{3}\int \frac{1}{cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}\ dx = 2\sqrt{3}\ tg\ \frac{x}{2} + k$$

ACTIVIDADES

13. Calcula estas integrales de funciones trigonométricas.

a) $\int sen\ 2x\ dx$

b) $\int cos\ (x + 1)\ dx$

c) $\int \frac{sen \frac{x}{2}}{2}\ dx$

d) $\int sen\ (-x)\ dx$

14. Halla las integrales de funciones trigonométricas que aparecen a continuación.

a) $\int \frac{1}{cos^2\ (x + 1)}\ dx$

b) $\int -3\ sen\ (2x + 1)\ dx$

c) $\int (x + 1) \cdot cos\ (x^2 + 2x)\ dx$

d) $\int \frac{x}{cos^2(x^2 - 3)}\ dx$

3.6. Integral de tipo funciones arco

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{arc sen}\,x + k \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}}\cdot f'(x)\,dx = \text{arc sen}\,f(x) + k$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{arc cos}\,x + k \qquad \int \frac{-1}{\sqrt{1-f^2(x)}}\cdot f'(x)\,dx = \text{arc cos}\,f(x) + k$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{arc tg}\,x + k \qquad \int \frac{1}{1+f^2(x)}\cdot f'(x)\,dx = \text{arc tg}\,f(x) + k$$

EJEMPLO

12 Resuelve estas integrales de funciones trigonométricas.

a) $\int \frac{5}{\sqrt{1-(5x)^2}}\,dx$

Si $f(x) = 5x \rightarrow f'(x) = 5$

$$\int \frac{5}{\sqrt{1-(5x)^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}\cdot 5\,dx = \text{arc sen}\,5x + k$$

b) $\int \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

Si $f^2(x) = 4x^2 \rightarrow f(x) = 2x \rightarrow f'(x) = 2 \rightarrow$ Se necesita un 2 dentro de la integral.

$$\int \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = 3\int \frac{2}{2\sqrt{1-(2x)^2}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot 2\,dx = \frac{3}{2}\,\text{arc sen}\,2x + k$$

c) $\int \frac{1}{1+\ln^2(x^2+1)}\cdot\frac{6x}{x^2+1}\,dx$

Si $f(x) = \ln(x^2+1) \rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \rightarrow$ Se descompone 6 en $3\cdot 2$.

$$\int \frac{1}{1+\ln^2(x^2+1)}\cdot\frac{6x}{x^2+1}\,dx = 3\int \frac{1}{1+\ln^2(x^2+1)}\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$
$$= 3\,\text{arc tg}\,[\ln(x^2+1)] + k$$

d) $\int \frac{1}{(1+e^{-2x})e^x}\,dx = \int \frac{1}{1+e^{-2x}}\cdot\frac{1}{e^x}\,dx$

Si $f^2(x) = e^{-2x} \rightarrow f(x) = e^{-x} \rightarrow f'(x) = -e^{-x} = -\frac{1}{e^x}$

$$\int \frac{1}{(1+e^{-2x})e^x}\,dx = \int -\frac{1}{1+e^{-2x}}\cdot\left(-\frac{1}{e^x}\right)dx =$$
$$= -\int \frac{1}{1+e^{-2x}}\cdot\left(-\frac{1}{e^x}\right)dx = -\text{arc tg}\,\frac{1}{e^x} + k$$

ACTIVIDADES

15. Resuelve estas integrales de tipo funciones arco.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\,dx$ b) $\int \frac{x}{1+(x-3)^2}\,dx$

16. Halla la solución de las siguientes integrales.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\,dx$ b) $\int \frac{x}{1+9x^4}\,dx$

4 Integración por partes

La **integración por partes** se emplea para transformar integrales de tipo $\int u(x) \cdot v'(x)\,dx$, donde la función $v'(x)$ es fácil de integrar, en otra expresión en la que aparece una nueva integral más sencilla de resolver.

Se escribe así

La derivada de una función $v(x)$ se puede expresar como $v'(x)$, como hemos hecho hasta ahora, o como dv, notación que utilizaremos para el método de integración por partes.

$$v'(x)\,dx = dv$$
$$u'(x)\,dx = du$$

Para integrar por partes aplicamos la siguiente fórmula:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)\,dx$$

De forma abreviada, escribimos: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Para demostrar este resultado partimos de la derivada de una función $u(x) \cdot v(x)$:

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Integrando en ambos miembros de la igualdad y despejando, resulta:

$$\int [u(x) \cdot v(x)]'\,dx = u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x)\,dx + \int u(x) \cdot v'(x)\,dx$$

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)\,dx$$

No olvides

Este método es útil para el cálculo de integrales de tipo:

$\int P(x) \cdot e^x\,dx \quad \int P(x) \cdot \ln x\,dx$

$\int P(x) \cdot sen\,x\,dx \quad \int P(x) \cdot cos\,x\,dx$

donde $P(x)$ es un polinomio, y también para el cálculo de las integrales de tipo:

$\int e^x \cdot sen\,x\,dx \quad \int e^x \cdot cos\,x\,dx$

SABER HACER

Resolver una integral por partes

Calcula esta integral: $\int \ln x\,dx$

PRIMERO. Se determinan los dos factores en la función que hay que integrar, teniendo en cuenta que uno de ellos, la función dv, debe ser fácil de integrar.

En este caso, a la hora de elegir dv, se puede optar entre dos opciones:

- $dv = \ln x\,dx \rightarrow v = \int \ln x\,dx$, que no se sabe calcular.
- $dv = dx \rightarrow v = \int dx$, que es una integral fácil de calcular.

Por tanto, se eligen $dv = dx$ y $u = \ln x$.

SEGUNDO. Se calculan v y du.

$dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \qquad u = \ln x \rightarrow du = [\ln x]' = \frac{1}{x}dx$

TERCERO. Se aplica la fórmula para la integración por partes: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$$\int \ln x\,dx = x \cdot \ln x - \int \left(x \cdot \frac{1}{x}\right)dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + k = x(\ln x - 1) + k$$

ACTIVIDADES

17. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int (x^2 + x)e^{-2x+1}\,dx$ b) $\int x^2 \cdot cos\,3x\,dx$

18. Resuelve mediante el método de integración por partes.

a) $\int 2x^2 \cdot \ln x\,dx$ b) $\int x^2 \cdot 2^x\,dx$

5 Integrales de funciones racionales

Para **integrar funciones racionales** descomponemos la función en una suma de fracciones algebraicas cuyas integrales resulten más sencillas de resolver.

5.1. Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador

Para resolver $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, con *grado* $[P(x)] <$ *grado* $[Q(x)]$, se calculan las raíces del polinomio del denominador $Q(x)$. Podemos obtener los siguientes casos:

El polinomio del denominador solo tiene raíces reales simples

Para calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, con $Q(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-n)$, lo descomponemos:

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{N}{x-n}$ con $A, B, \ldots, N \in \mathbb{R}$, y calculamos:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A}{x-a}dx + \int \frac{B}{x-b}dx + \ldots + \int \frac{N}{x-n}dx$$

Date cuenta

Una integral racional en la que el denominador solo tiene raíces reales simples se puede descomponer en una suma de integrales de tipo logarítmico.

SABER HACER

Resolver una integral racional en la que el denominador solo tiene raíces reales simples

Calcula esta integral: $\int \frac{2x+1}{x^2-5x+4}dx$

PRIMERO. Se factoriza el polinomio del denominador, $Q(x)$.

$$x^2-5x+4=0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2-4\cdot 4}}{2} = \frac{5\pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2-5x+4 = (x-4)(x-1)$$

SEGUNDO. Se descompone la fracción como una suma de fracciones cuyos numeradores son constantes y los denominadores son cada uno de los factores del polinomio $Q(x)$.

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+4} = \frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{(x-1)} \rightarrow \frac{2x+1}{x^2-5x+4} = \frac{A(x-1)+B(x-4)}{(x-4)(x-1)}$$

TERCERO. Se calculan las constantes, igualando los numeradores y resolviendo el sistema que resulta.

$$2x+1 = A(x-1)+B(x-4) \rightarrow 2x+1 = (A+B)x - A - 4B \rightarrow \left.\begin{matrix} 2 = A+B \\ 1 = -A-4B \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} A = 3 \\ B = -1 \end{matrix}\right\}$$

CUARTO. Se resuelve la integral utilizando la descomposición obtenida.

$$\int \frac{2x+1}{x^2-5x+4}dx = \int \frac{3}{x-4}dx + \int \frac{-1}{x-1}dx = 3\ln|x-4| - \ln|x-1| + k$$

Recuerda

Dos polinomios son iguales cuando los coeficientes de los términos del mismo grado también lo son.

$$2x+1 = A(x-1)+B(x-4) \rightarrow \left.\begin{matrix} 2 = A+B \\ 1 = -A-4B \end{matrix}\right\}$$

ACTIVIDADES

19. Resuelve estas integrales racionales.

a) $\int \frac{2}{x^2-1}dx$ b) $\int -\frac{3}{x^2+x-2}dx$

20. Calcula las integrales racionales.

a) $\int \frac{2x+1}{x^4-5x^2+4}dx$ b) $\int \frac{7x-2}{x^3-2x^2-x+2}dx$

El polinomio del denominador tiene una raíz real múltiple

Date cuenta

Una integral racional en la que el denominador solo tiene una raíz real múltiple se puede descomponer en una suma de integrales en la que una de ellas es de tipo logarítmico, y el resto, del tipo potencial.

Para calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, siendo $Q(x) = (x-a)^n$, hacemos la descomposición:

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{N}{(x-a)^n}$, con $A, B, \ldots, N \in \mathbb{R}$, y calculamos:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A}{x-a}\,dx + \int \frac{B}{(x-a)^2}\,dx + \ldots + \int \frac{N}{(x-a)^n}\,dx$$

SABER HACER

Resolver una integral racional en la que el denominador solo tiene una raíz real múltiple

Calcula esta integral: $\int \frac{2x+1}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx$

PRIMERO. Se factoriza el polinomio del denominador, $Q(x)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 12 & -8 \\ 2 & & 2 & -8 & 8 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow x^3-6x^2+12x-8 = (x-2)(x^2-4x+4) = (x-2)(x-2)^2 = (x-2)^3$$

SEGUNDO. Se descompone la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como una suma de fracciones cuyos numeradores son constantes y los denominadores son cada una de las potencias sucesivas de la factorización de $Q(x)$.

$$\frac{2x+1}{(x-2)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} \rightarrow \frac{2x+1}{(x-2)^3} = \frac{A(x-2)^2+B(x-2)+C}{(x-2)^3}$$

TERCERO. Se calculan las constantes, igualando los numeradores y resolviendo el sistema que resulta.

$$2x+1 = A(x-2)^2+B(x-2)+C \rightarrow 2x+1 = Ax^2+(B-4A)x+4A-2B+C$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A \\ 2 = B-4A \\ 1 = 4A-2B+C \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=0 \\ B=2 \\ C=5 \end{array}\right.$$

$$\frac{2x+1}{(x-2)^3} = \frac{0}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{5}{(x-2)^3} = \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{5}{(x-2)^3}$$

CUARTO. Se resuelve la integral sustituyendo la expresión original por la descomposición obtenida equivalente a ella.

$$\int \frac{2x+1}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx = \int \left(\frac{2}{(x-2)^2} + \frac{5}{(x-2)^3}\right)dx = \int \frac{2}{(x-2)^2}\,dx + \int \frac{5}{(x-2)^3}\,dx =$$

$$= 2\int (x-2)^{-2}\,dx + 5\int (x-2)^{-3}\,dx =$$

$$= -\frac{2}{x-2} - \frac{5}{2(x-2)^2} + k$$

ACTIVIDADES

21. Resuelve estas integrales racionales.

a) $\int \frac{x^2}{(x-1)^3}\,dx$ b) $\int -\frac{3x-2}{(2-x)^2}\,dx$

22. Calcula las integrales racionales.

a) $\int \frac{-2x^2+1}{x^3+6x^2+12x+8}\,dx$ b) $\int \frac{x-2}{x^4}\,dx$

El polinomio del denominador tiene raíces reales simples y múltiples

En el caso de que $Q(x)$ tenga raíces reales simples y múltiples, descomponemos $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ como una suma de fracciones algebraicas en la que los numeradores son constantes y los denominadores son cada uno de los factores de $Q(x)$, en el caso de raíces simples, y cada una de las potencias sucesivas de la factorización, en el caso de raíces múltiples.

SABER HACER

Resolver una integral racional en la que el denominador tiene raíces simples y múltiples

Calcula esta integral: $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3-5x^2+8x-4}\,dx$

PRIMERO. Se factoriza el polinomio del denominador, $Q(x)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 8 & -4 \\ 1 & & 1 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \\ 2 & & 2 & -4 & \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\rightarrow x^3-5x^2+8x-4=(x-1)(x-2)(x-2)=$$
$$=(x-1)(x-2)^2$$

SEGUNDO. Se descompone la fracción $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ como una suma de fracciones en la que los numeradores son constantes y los denominadores son los factores correspondientes a las raíces simples y múltiples de $Q(x)$.

$$\frac{2x+1}{x^3-5x^2+8x-4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}=$$
$$=\frac{A(x-2)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}$$

TERCERO. Se calculan las constantes, igualando los polinomios del numerador.

$$2x+1=A(x-2)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-1)$$
$$2x+1=Ax^2-4Ax+4A+Bx^2-3Bx+2B+Cx-C$$
$$2x+1=(A+B)x^2+(-4A-3B+C)x+(4A+2B-C)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0=A+B \\ 2=-4A-3B+C \\ 1=4A+2B-C \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=3 \\ B=-3 \\ C=5 \end{array}\right. \rightarrow \frac{2x+1}{x^3-5x^2+8x-4}=\frac{3}{x-1}-\frac{3}{x-2}+\frac{5}{(x-2)^2}$$

CUARTO. Se resuelve la integral aplicando la descomposición obtenida.

$$\int \frac{2x+1}{x^3-5x^2+8x-4}\,dx=\int \frac{3}{x-1}\,dx-\int \frac{3}{x-2}\,dx+\int \frac{5}{(x-2)^2}\,dx=$$
$$=3\ln|x-1|-3\ln|x-2|-\frac{5}{x-2}+k$$

Recuerda

Para determinar las raíces enteras de un polinomio de grado mayor que 2 podemos utilizar la regla de Ruffini.

ACTIVIDADES

23. Resuelve esta integral racional.

$$\int \frac{4x^2-2x}{(x+2)(x-3)^2}\,dx$$

24. Calcula la integral racional.

$$\int \frac{-x^2+7x}{x^3-x^2-x+1}\,dx$$

El polinomio del denominador tiene alguna raíz no real

Recuerda

La integral de una fracción algebraica de tipo $\frac{Mx+N}{x^2+a^2}$ es:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{Mx}{x^2+a^2}\,dx + \int \frac{N}{x^2+a^2}\,dx = \frac{M}{2}\ln|x^2+a^2| + \frac{N}{a}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{a}$$

Para calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, siendo $Q(x)$ un polinomio con un factor irreducible de segundo grado, x^2+a^2, descomponemos $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en una suma de fracciones algebraicas en la que a x^2+a^2 le corresponde la fracción $\frac{Mx+N}{x^2+a^2}$.

SABER HACER

Resolver una integral racional en la que el denominador tiene raíces no reales

▶ Halla esta integral: $\int \frac{x^2+4}{x^4-1}\,dx$

PRIMERO. Se factoriza el polinomio del denominador, $Q(x)$.

	1	0	0	0	−1
1		1	1	1	1
	1	1	1	1	0
−1		−1	0	−1	
	1	0	1	0	

$\rightarrow x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

SEGUNDO. Se descompone la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como una suma de fracciones, teniendo en cuenta que a cada factor irreducible de segundo grado de $Q(x)$ le corresponde un numerador de primer grado, $Mx+N$.

$$\frac{x^2+4}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1} = \frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

TERCERO. Se calculan las constantes, igualando los polinomios del numerador.

$$x^2+4 = A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)(x+1)$$

$$x^2+4 = (A+B+M)x^3+(A-B+N)x^2+(A+B-M)x+(A-B-N)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0=A+B+M \\ 1=A-B+N \\ 0=A+B-M \\ 4=A-B-N \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\frac{5}{4} \\ B=-\frac{5}{4} \\ M=0 \\ N=-\frac{3}{2} \end{array}\right. \rightarrow \frac{x^2+4}{x^4-1} = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$$

CUARTO. Se resuelve la integral aplicando la descomposición obtenida.

$$\int \frac{x^2+4}{x^4-1}\,dx = \frac{5}{4}\cdot\int\frac{1}{x-1}\,dx - \frac{5}{4}\cdot\int\frac{1}{x+1}\,dx - \frac{3}{2}\cdot\int\frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{5}{4}\ln|x-1| - \frac{5}{4}\ln|x+1| - \frac{3}{2}\,\text{arc tg}\,x + k$$

No olvides

El factor x, en la factorización de un polinomio, corresponde a la raíz 0. Así, si un polinomio tiene el factor x^2, significa que 0 es una raíz doble del polinomio.

ACTIVIDADES

25. Resuelve estas integrales racionales.

a) $\int \frac{2}{x^2+1}\,dx$ b) $\int -\frac{3x-2}{2+x^2}\,dx$

26. Calcula las integrales racionales.

a) $\int \frac{-2x^2+1}{x^3-x^2+3x-3}\,dx$ b) $\int \frac{x-2}{x^2(x^2+1)}\,dx$

5.2. Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador

Para resolver $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, con *grado* $[P(x)] \geq$ *grado* $[Q(x)]$, dividimos el polinomio del numerador $P(x)$ entre el polinomio del denominador $Q(x)$, y obtenemos como resultado un polinomio más una fracción algebraica en la que el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x) \rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

SABER HACER

Resolver una integral racional en la que el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador

Calcula esta integral: $\int \frac{2x^4 - 4x^2 + 4x + 1}{x^3 - 3x + 2}\,dx$

PRIMERO. Se divide el numerador entre el denominador y se descompone $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$.

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{2x^4} - 4x^2 + 4x + 1 & x^3 - 3x + 2 \\ \hline
\cancel{-2x^4} + 6x^2 - 4x & 2x \\
\qquad 2x^2 \qquad\quad + 1 &
\end{array}$$

$$\frac{2x^4 - 4x^2 + 4x + 1}{x^3 - 3x + 2} = 2x + \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x + 2}$$

SEGUNDO. Se resuelve la nueva integral racional que se obtiene en la que el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$$

Operando resulta:

$$\frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{x + 2}$$

$$\int \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x + 2}\,dx = \int \frac{1}{x - 1}\,dx + \int \frac{1}{(x - 1)^2}\,dx + \int \frac{1}{x + 2}\,dx =$$
$$= \ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} + \ln|x + 2| + k$$

TERCERO. Se utiliza el resultado obtenido para proceder a la resolución de la integral planteada inicialmente.

$$\int \frac{2x^4 - 4x^2 + 4x + 1}{x^3 - 3x + 2}\,dx = \int 2x\,dx + \int \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x + 2}\,dx =$$
$$= x^2 + \ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} + \ln|x + 2| + k$$

ACTIVIDADES

27. Resuelve estas integrales racionales.

a) $\int \frac{2x^4}{(x - 1)^3}\,dx$ b) $\int -\frac{3x^3 - 2}{(2 - x)^2}\,dx$

28. Calcula las integrales racionales.

a) $\int \frac{-2x^5 + 1}{x^4 - 2x^2 + 1}\,dx$ b) $\int \frac{x^6 - 1}{x^2(x^2 + 1)(x - 1)}\,dx$

6 Integración por cambio de variable

Date cuenta

Si hacemos:

$$x = g(t)$$

y tomamos derivadas en ambos miembros, tenemos:

$$dx = g'(t)\,dt$$

Por tanto, resulta:

$$\int f(x)\,dx = \int f[g(t)]\,g'(t)\,dt$$

No olvides

Los **métodos de integración** (por partes, por cambio de variable, e integrales de funciones racionales) son técnicas que nos permiten transformar unas integrales en otras más sencillas de resolver.

La **integración por cambio de variable** o **método de sustitución** consiste en definir una variable t como parte de la función de x que queremos integrar. Sustituyendo, la integral se transforma en otra de variable t, más fácil de integrar.

SABER HACER

Resolver una integral mediante un cambio de variable

Calcula estas integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}\,dx$

PRIMERO. Se define t, teniendo en cuenta que parte de la función que se va a integrar tendrá que responder a la derivada de t.

a) Como $\frac{1}{x}$ es la derivada de $\ln x$, se toma: $t = \ln x \rightarrow dt = \frac{1}{x}\,dx$

b) Se considera: $t = 1 + 3x^2 \rightarrow dt = 6x\,dx$

SEGUNDO. Se sustituyen t y dt en la integral.

a) $$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\frac{1}{t}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}\,dx}_{dt} = \int \frac{1}{t}\,dt$$

b) $$\int \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{\underbrace{1+3x^2}_{t}}} \cdot \underbrace{6x\,dx}_{dt} = \frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

TERCERO. Se resuelve la integral de variable t que se obtiene.

a) $$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + k$$

b) $$\int \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + k = \frac{\sqrt{t}}{3} + k$$

CUARTO. Se reemplaza, en la primitiva que se ha obtenido, t por su expresión en x.

a) $$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + k \underset{t=\ln x}{=} \ln|\ln x| + k$$

b) $$\int \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{\sqrt{t}}{3} + k \underset{t = 1+3x^2}{=} \frac{\sqrt{1+3x^2}}{3} + k$$

ACTIVIDADES

29. Resuelve mediante un cambio de variable.

a) $\displaystyle\int x\cdot 2^{x^2-3}\,dx$ c) $\displaystyle\int x\cdot\ln(1+x^2)\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{2x}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

30. Resuelve las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+6x}}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\text{arc tg } x}{1+x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\text{arc sen } x)^5\sqrt{1+x^2}}\,dx$

Algunos cambios de variable frecuentes

- Para calcular una integral de tipo $\int sen^n x \cos^m x\, dx$:
  - Si n es impar, aplicamos el cambio de variable $t = \cos x$.
  - Si n es par y m es impar, aplicamos el cambio de variable $t = sen\, x$.
  - Si n y m son pares, aplicamos las fórmulas trigonométricas:

$$sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

- Para calcular una integral de tipo $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, aplicamos el cambio de variable $\frac{x}{a} = sen\, t$.

EJEMPLO

13 **Calcula estas integrales.**

a) $\int sen^3 x \cos^5 x\, dx$ $\qquad n = 3 \rightarrow n$ es impar.

Se aplica el cambio: $t = \cos x \rightarrow dt = -sen\, x\, dx$

$$\int sen^3 x \cos^5 x\, dx = -\int sen^2 x \cos^5 x(-sen\, x)\, dx =$$

$$= -\int (1-\cos^2 x)\cos^5 x(-sen\, x)\, dx =$$

$$= -\int (1-t^2)t^5\, dt = -\frac{t^6}{6} + \frac{t^8}{8} + k = -\frac{\cos^6 x}{6} + \frac{\cos^8 x}{8} + k$$

b) $\int sen^2 x \cos^2 x\, dx$ $\qquad n = 2$ y $m = 2 \rightarrow n$ y m son pares.

$$\int sen^2 x \cos^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int 1\, dx - \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{8}\left(\int 1\, dx + \int \cos 4x\, dx\right) = \frac{x}{4} - \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{4} sen\, 4x\right) + k$$

c) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ $\quad$ Se hace el cambio de variable: $x = sen\, t \rightarrow dx = \cos t\, dt$

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \sqrt{1 - sen^2 t}\cos t\, dt = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt$$

Se aplica la fórmula trigonométrica: $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$

$$\int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \int \frac{1}{2}\, dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\, dt = \frac{t}{2} + \frac{sen\, 2t}{4} + k =$$

$$= \frac{arc\, sen\, x}{2} + \frac{sen\, 2(arc\, sen\, x)}{4} + k$$

Date cuenta

Como $sen\, 2x = 2\, sen\, x \cos x$, entonces $sen\, 2(arc\, sen\, x)$ es:

$$sen\, 2(arc\, sen\, x) =$$

$$= 2\underbrace{sen(arc\, sen\, x)}_{x}\underbrace{\cos(arc\, sen\, x)}_{\sqrt{1-x^2}}$$

De este modo, resulta:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{arc\, sen\, x}{2} +$$

$$+ \frac{sen\, 2(arc\, sen\, x)}{4} + k =$$

$$= \frac{arc\, sen\, x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + k$$

ACTIVIDADES

31. Calcula estas integrales.

a) $\int sen^5 x \cos^2 x\, dx$ $\qquad$ b) $\int \sqrt{4-x^2}\, dx$

32. Halla la solución de las integrales.

a) $\int sen^2 x\, dx$ $\qquad$ b) $\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{4}\, dx$