Resumen

En una de esas peculiaridades que de vez en cuando se dan en la ciencia, nos encontramos con el caso de las matrices y los determinantes. Hay evidencias de que ambos se conocían entre dos y cuatro siglos antes de nuestra era, cuando para resolver ciertos problemas se organizaba la información en forma de tablas y se explicaban las reglas aritméticas para hallar la solución. Sin embargo, cuando fueron redescubiertos para la Matemática moderna, se desarrollaron antes los determinantes que las matrices.

Fue Carl Friedlich Gauss (el príncipe de los matemáticos) el primero que usó el término "determinante" en sus 'Disquisiciones Aritméticas' de 1801, pero con un significado diferente al nuestro. La idea actual de determinante se debe a Augustin Louis Cauchy, mientras que el término "matriz" lo acuñó 50 años después James Joseph Sylvester dando a entender que una matriz es "la madre de los determinantes".

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés

Revisor: Eduardo Cuchillo

Adaptados por: Sonia López

1. CONCEPTO DE DETERMINANTE

1.1. Definición

Dada una matriz cuadrada de orden *n*,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama **determinante de la matriz *A*** y se representa por $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ **al número real** que se deduce de la siguiente fórmula:

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{i(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

Es decir, el determinante de una matriz cuadrada es el número real que se obtiene sumando todos los *n* factorial (*n*!) productos posibles de *n* elementos (orden de la matriz) de la matriz, de forma que en cada producto haya un elemento de cada *fila* y uno de cada columna, precedido cada producto con el signo + ó − según que la permutación de los subíndices que indican la columna tenga un número de inversiones, respecto del orden natural, que sea par o impar.

Esta definición no es práctica ni entendible a este nivel. Los determinantes de orden superior se resolverán con otros métodos, ya que aplicando la definición sería muy laborioso.

1.2. Determinantes de orden dos y tres. Regla de Sarrus

1.2.1. Determinantes de orden dos

Dada una matriz de orden 2,
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

se llama determinante de la matriz A

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

al número:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Es decir, se multiplican los elementos de la diagonal principal y se le resta el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

1.2.2. Determinantes de orden tres. Regla de Sarrus

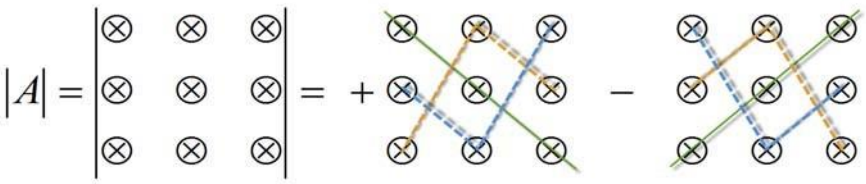
Dada una matriz cuadrada de orden 3,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 2_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

se llama determinante de la matriz A al número:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Este desarrollo procedente de la definición de determinante, puede recordarse fácilmente con este diagrama, conocido como la **regla de Sarrus:**



Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot(-2) + 2\cdot 1\cdot 3 + (-1)\cdot 6\cdot 3 - 3\cdot 5\cdot 3 - 1\cdot 6\cdot 1 - 2(-1)(-2) = -10 + 6 - 18 - 45 - 6 - 4 = -77$$

Actividades propuestas

1. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$

2. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & - \end{vmatrix}$

2.- PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1ª) ***El determinante de una matriz A es igual al determinante de su traspuesta.***

$$|A| = |A^t|$$

En determinantes todo lo que se diga para la filas de un determinante será igualmente válido para las columnas, y viceversa, pudiendo hablar simplemente de **líneas de un determinante**.

2ª) ***Si los elementos de una fila o de una columna se multiplican todos por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.***

$$\begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k \cdot a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Esta propiedad tiene dos implicaciones:

1.- Nos permite sacar fuera los factores comunes a todos los elementos de una línea.

2.- $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$, siendo n la dimensión de la matriz

3ª) ***Si los elementos de una línea se pueden descomponer en suma de dos o más sumandos, el determinante será igual a la suma de dos determinantes (o más) que tienen todas las restantes líneas iguales y en dicha línea tienen los primeros, segundos, etc. sumandos.***

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4ª) ***Si en un determinante los elemento de una línea son nulos, el determinante es nulo.***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés

Revisor: Eduardo Cuchillo

Adaptados por: Sonia López

5ª) *Si en una matriz se permutan dos filas (o dos columnas), el determinante cambia de signo.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

6ª) *Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales, el determinante es nulo.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a & a \\ a_{21} & b & b \\ a_{31} & c & c \end{vmatrix} = 0$$

7ª) *Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas proporcionales, su determinante es nulo.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a & k \cdot a \\ a_{21} & b & k \cdot b \\ a_{31} & c & k \cdot c \end{vmatrix} = 0$$

8ª) *Si los elementos de una línea son combinación lineal de las restantes líneas paralelas, el determinante es nulo.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & r \cdot a_{11} + s \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & r \cdot a_{21} + s \cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & r \cdot a_{31} + s \cdot a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

9ª) *Si a los elementos de una línea se le suma una combinación lineal de las restantes líneas paralelas, el determinante no varía.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + (r \cdot a_{11} + s \cdot a_{12}) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + (r \cdot a_{21} + s \cdot a_{22}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + (r \cdot a_{31} + s \cdot a_{32}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

10ª) *El* determinante *del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices:*

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$