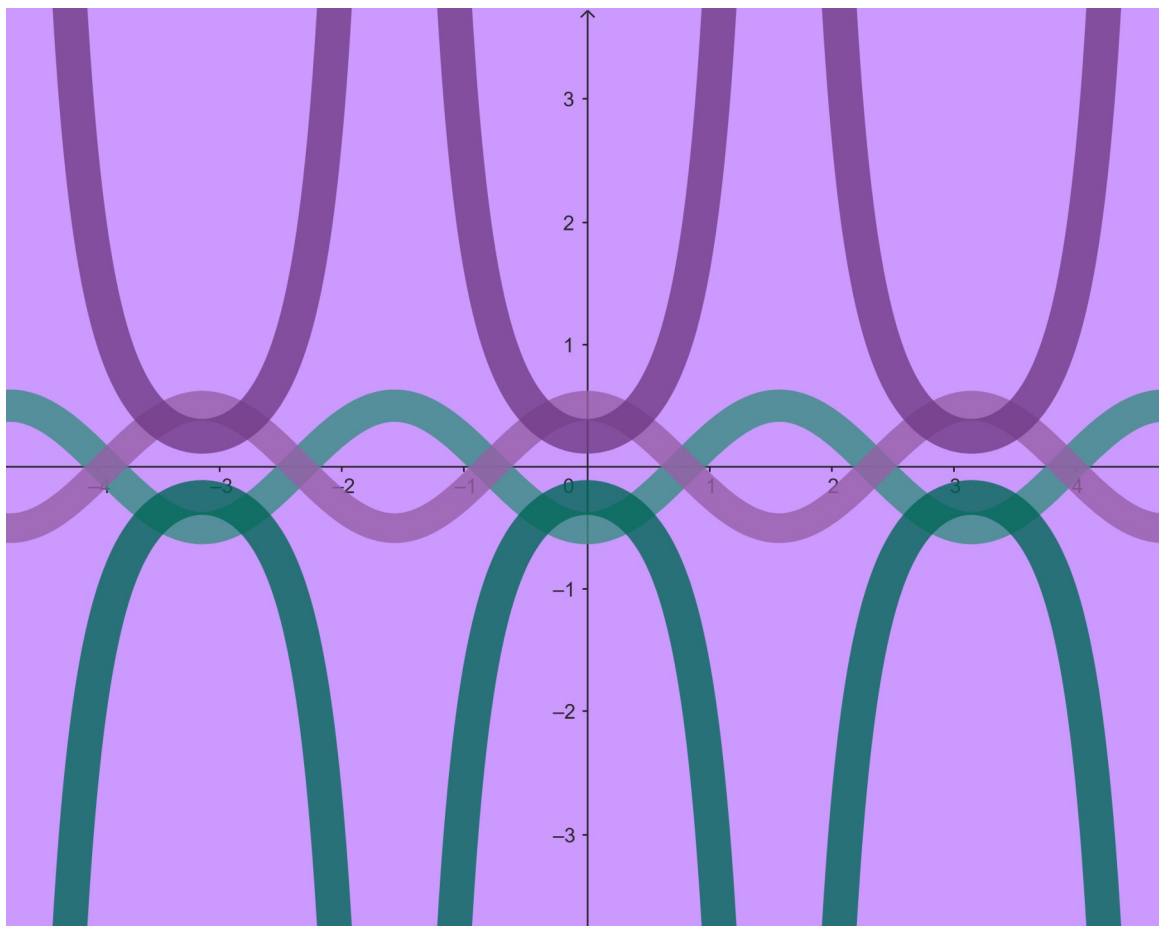




FUNCIÓN



"Función" (elaboración propia)



ÍNDICE

FUNCIÓN

1. COORDENADAS CARTESIANAS.....	1
<i>Exercicios</i>	1
2. CONCEPTO DE FUNCIÓN.....	2
2.1 Representación gráfica.....	3
2.2 Enunciado.....	3
2.3 Táboa de valores.....	3
2.4 Expresión analítica.....	3
<i>Exercicios</i>	4
3. ALGUNHAS PROPIEDADES DAS FUNCIÓNS.....	5
3.1 Dominio de definición, continuidade e rango dunha función.....	5
3.2 Puntos de corte cos eixes.....	6
3.3 Monotonía e extremos relativos.....	7
<i>Exercicios</i>	8
4. FUNCIÓN	9
<i>Exercicios</i>	10
SOLUCIÓN	11

1. COORDENADAS CARTESIANAS

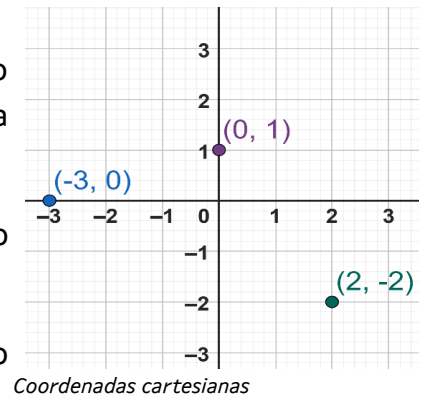
O sistema de coordenadas cartesianas é un método matemático para localizar puntos nun espazo mediante o uso de valores numéricos chamados coordenadas. Este sistema permite representar e analizar relacións espaciais.

Componse de:

- Eixes coordenados: son dúas liñas perpendiculares, unha horizontal (o eixe X) e outra vertical (o eixe Y).
- Orixe: É o punto onde os eixes se cruzan, e ten coordenadas $(0,0)$.
- Coordenadas: Son pares de números que indican a posición exacta dun punto respecto á orixe. Escríbense como (x,y) . O primeiro número indica canto se despraza ao longo do eixe X e o segundo ao longo do eixe Y.

Exemplo:

- Para representar o punto $(2,-2)$, tes que colocarte no $(0,0)$ e moverte dos lugares á dereita e dos lugares cara abaixo.
- Para representar o punto $(-3,0)$, tes que colocarte no $(0,0)$ e moverte tres lugares á esquerda.
- Para representar o punto $(0,1)$, tes que colocarte no $(0,0)$ e subir 1 lugar.



EXERCICIOS

Exercicio 1

Representa as coordenadas $(0,-2)$, $(3,1)$, $(-1,0)$.

2. CONCEPTO DE FUNCIÓN

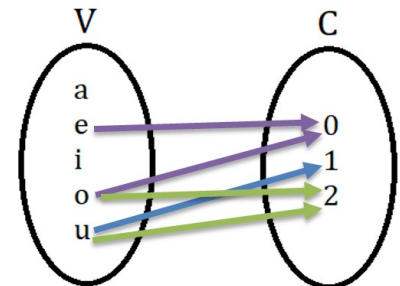
Unha relación, R , entre dúas magnitudes, X e Y , é un criterio que nos permite asociar elementos de X con elementos de Y .

Exemplo: Entre o conxunto das vogais $V=\{a,e,i,o,u\}$ e o dos números $C=\{0,1,2\}$ consideramos a relación: "Unha vogal está relacionada cun número se a vogal aparece no nome galego do número"

0: cero $\rightarrow$ está relacionado con "e" e con "o".

1: un $\rightarrow$ está relacionado con "u"

2: dous $\rightarrow$ está relacionado con "o" e con "u"



Relación R

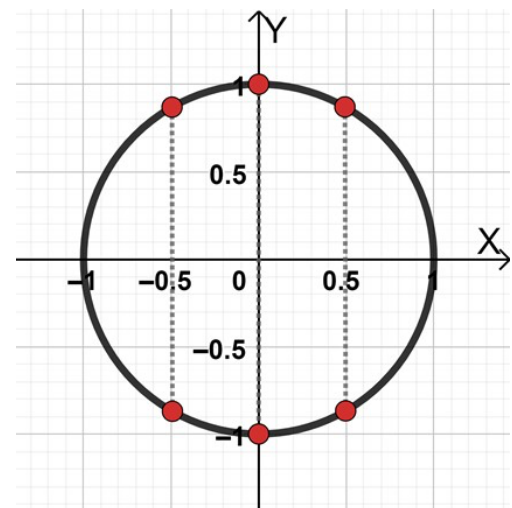
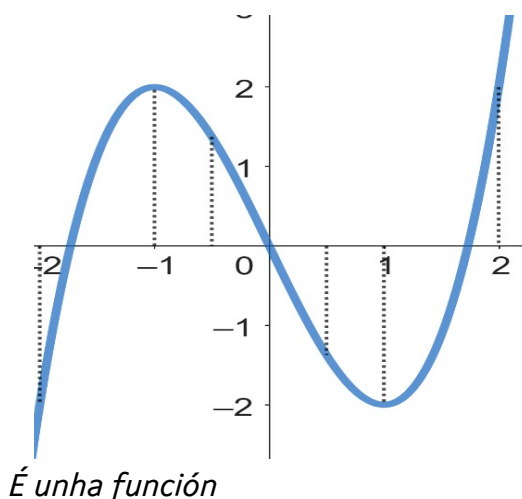
Tamén poderíamos representalos como pares:

$$R=\{(e,0),(o,0),(u,1),(o,2),(u,2)\}$$

Unha función f é unha relación entre dúas variables numéricas, X e Y , na que a cada valor de X correspóndelle un único valor de Y .

A X chamámoslle variable independente e a Y variable dependente, posto que cada valor de y depende do correspondente valor de x . Escríbese $y=f(x)$, f é o nome da función e (x) indica a variable da que depende y .

A relación anterior non é unha función, xa que á vogal "o" correspóndenlle dous valores e para ser unha función só lle pode corresponder un.



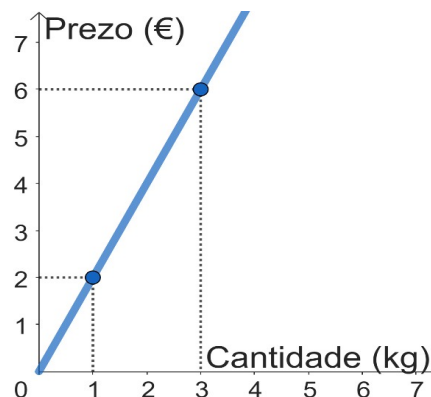
As funcións poden presentarse de distintas formas: representación gráfica, enunciado, táboa de valores e expresión analítica.

2.1 Representación gráfica

A gráfica dunha función é o conxunto de todos os puntos do plano cartesiano (x, y) que verifican a relación $y=f(x)$.

A gráfica da dereita mostra o prezo dunha bolsa de laranxas, en función do seu peso.

Utilizando esta gráfica poderíamos deducir o prezo de calquera cantidade. Buscamos no eixe horizontal (x) a cantidade desexada e subimos en liña recta ata "chocar" coa recta azul. Despois trasladámonos en horizontal e observamos con que prezo se corresponde mirando o valor no eixe vertical (y). Por exemplo, o prezo de 1 kg de laranxas é 2€ e 3 kg custan 6€.



Representación gráfica dunha función

2.2 Enunciado

Daniela ten contratada unha tarifa de móbil: 2 xigas por 15€ fixos ao mes e 2,50€ por cada xiga extra.

2.3 Táboa de valores

Unha táboa de valores é unha táboa na que situamos ordenadamente as cantidades correspondentes de dúas magnitudes relacionadas.

Exemplo:

Nº de xigas	1	2	3	4	5	6	10
Prezo mensual (€)	15	15	17,5	20	22,5	25	35

2.4 Expresión analítica

Unha expresión analítica é unha fórmula que nos permite calcular os valores de y a partir dos de x .

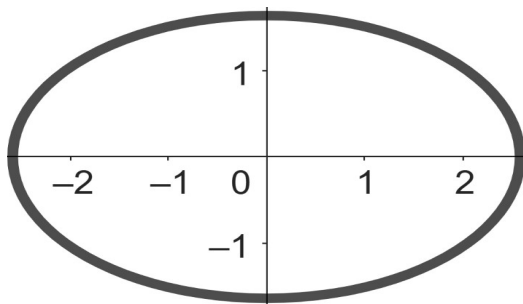
Exemplo:

Sexan x : número de xigas consumidos e y : prezo mensual (€), entón: $y=15+(x-2) \cdot 2,5$

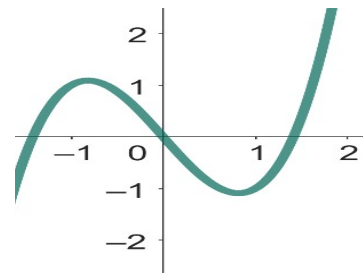
EXERCICIOS**Exercicio 2**

Determina se as seguintes gráficas son ou non funcións:

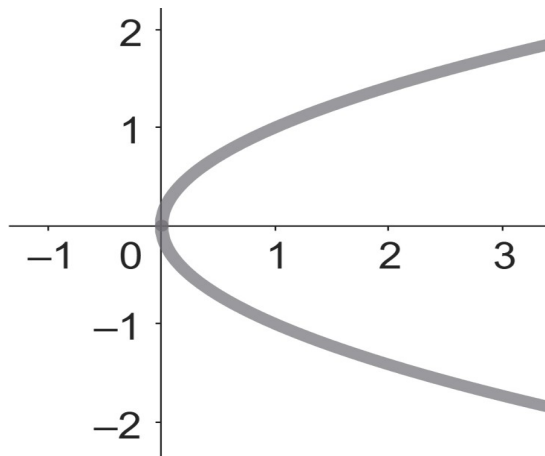
a)

*Exercicio 2a*

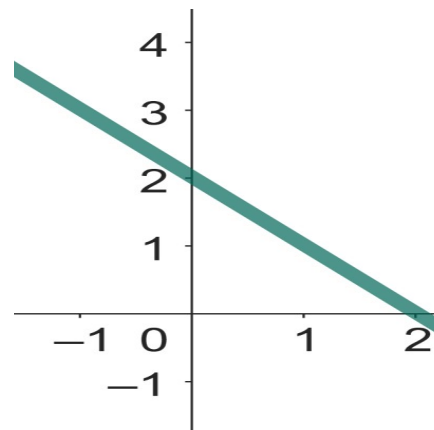
b)

*Exercicio 2b*

c)

*Exercicio 2c*

d)

*Exercicio 2d***Exercicio 3**

Expresa o seguinte enunciado mediante unha gráfica e unha táboa de valores:

Clara sae da súa casa ás 8:30 da mañá. Tarda 15 minutos en chegar á escola que está a 1 km da súa casa. Sae da escola ás 14:20 e vai a comer á casa da súa avoa, tarda 10 minutos en chegar e recorre 750 m. Está alí ata as 16:00 e regresa á casa. Como está cansada, tarda media hora en regresar.

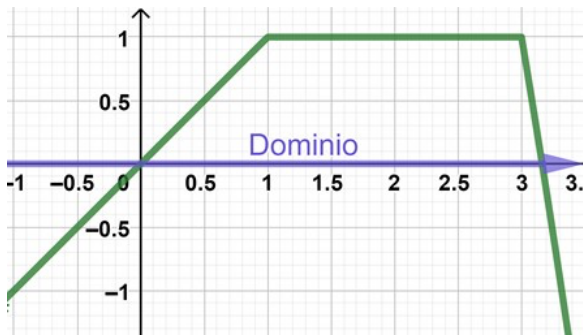
3. ALGUNHAS PROPIEDADES DAS FUNCIÓNS

3.1 Dominio de definición, continuidade e rango dunha función

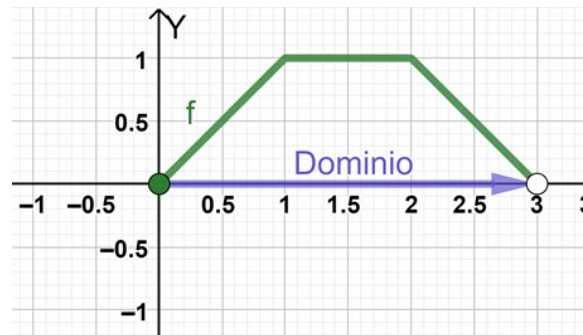
Definimos o dominio dunha función $f(x)$ como o conxunto de todos os valores de x para os cales podemos calcular o correspondente y . Denótase por $Dom f$.

Na gráfica dunha función, o seu dominio é fácil de visualizar, basta con localizar os valores de x nos que existe a gráfica.

Exemplo:



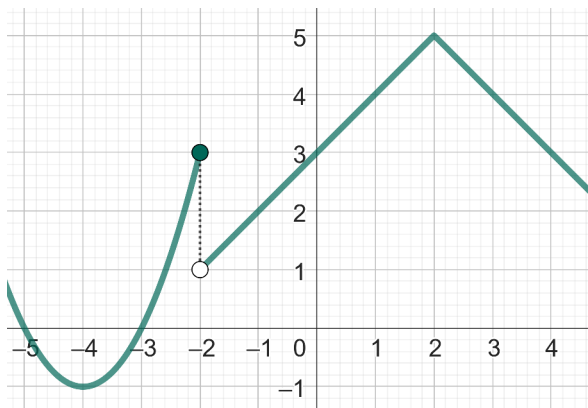
Dominio $\mathbb{R}$



Dominio $[0, 3)$

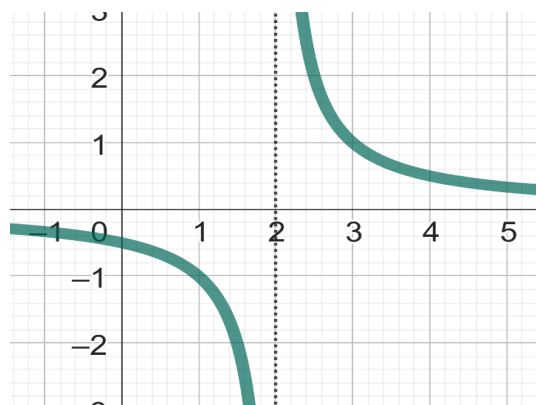
O dominio desta función é $\mathbb{R}$, xa que O dominio comeza en $x=0$ e remata en $x=3$. continúa cara ambos lados e non ten ocos Ademais, no 3 non está representada.

Unha función é continua en todo $\mathbb{R}$ cando a súa gráfica pode debuxarse dun só trazo ou sen levantar o lapis do papel. As funcións que non son continuas nalgún punto chámanse descontinuas. Podemos encontrar diversos tipos de descontinuidades, observe as seguintes gráficas:



Descontinua en -2

A función é descontinua en $x=-2$



Descontinua en 2

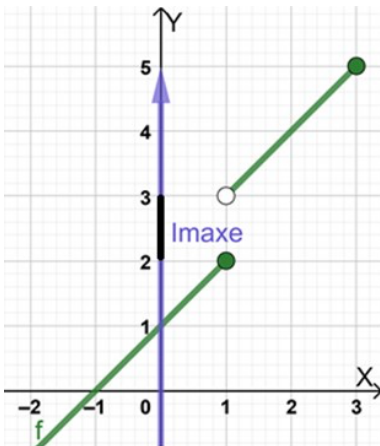
A función é descontinua en $x=2$

A imaxe ou rango dunha función, f , é o conxunto dos posibles valores de y . Denótase por $Rg(f)$.

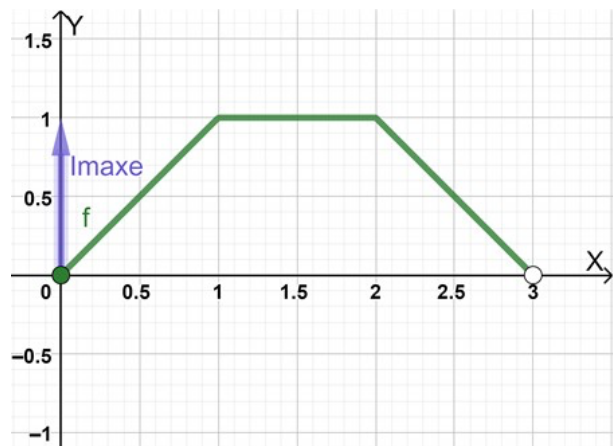
Ao igual que ocorría co dominio, é sinxelo calcular a imaxe a partir da súa gráfica.

Exemplo:

Estuda as imaxes das seguintes funcións a partir da súas gráficas.



Imaxe infinita



Imaxe finita

A variable y toma todos os valores menores que 2 e todos os que están entre $y=3$ e $y=5$ (ambos incluídos).
sen incluír o 3.

3.2 Puntos de corte cos eixes

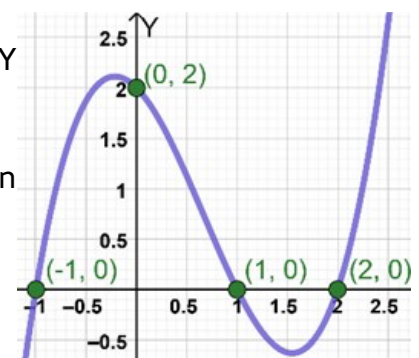
Os puntos de corte cos eixes, son puntos da gráfica da función que están sobre o eixe X ou sobre o eixe Y.

- Un punto de corte co eixe X ten coordenadas $(x, 0)$.
- Un punto de corte co eixe Y ten coordenadas $(0, y)$.

Unha función ten como máximo un punto de corte co eixe Y pero pode ter varios co eixe X.

Exemplo: Localiza os puntos de corte da función da ilustración da dereita.

- Puntos de corte co eixe OX: $(-1, 0), (1, 0), (2, 0)$.
- Punto de corte co eixe OY: $(0, 2)$



Cortes cos eixes

3.3 Monotonía e extremos relativos

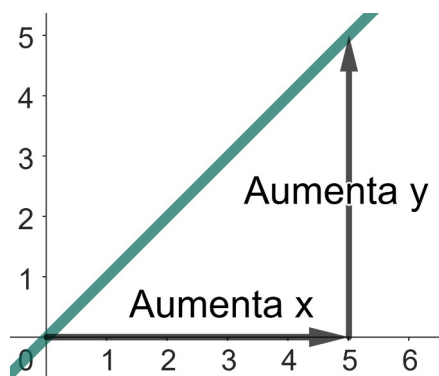
Dada unha función $y=f(x)$ e os valores de $x=a$ e $x=b$, tal que $a<b$:

- Se $f(b)>f(a)$, entón a función é crecente entre a e b .
- Se $f(b)<f(a)$, entón a función é decrecente entre a e b .
- A función é constante entre a e b se non é crecente nin decrecente.

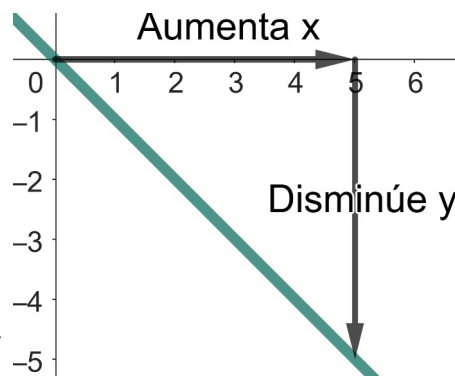
Ao estudo do crecemento e decrecemento dunha función chámasele estudo da monotonía.

Observando a gráfica dunha función é sinxelo pescudar se esta é crecente ou decrecente.

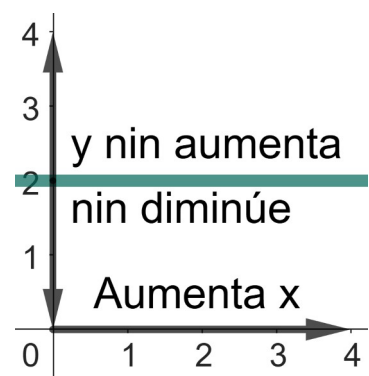
- Se ao avanzar de esquerda a dereita a función aumenta (o valor de y é maior), dicimos que a función é crecente. Dito doutra forma, se ao aumentar x aumenta y .
- Se ao avanzar de esquerda a dereita a función diminúe (o valor de y é menor), dicimos que a función é decrecente. Dito doutra forma, se ao aumentar x diminúe y .
- Se ao avanzar de esquerda a dereita a función nin aumenta nin diminúe, dicimos que a función é constante.



Función crecente



Función decrecente



Función constante

Un máximo local (ou relativo) é un punto onde a función toma o maior valor respecto dos puntos que están moi próximos. Un punto é un máximo relativo se a función é crecente á esquerda do punto e decrecente á súa dereita. Unha función pode ter varios máximos locais.

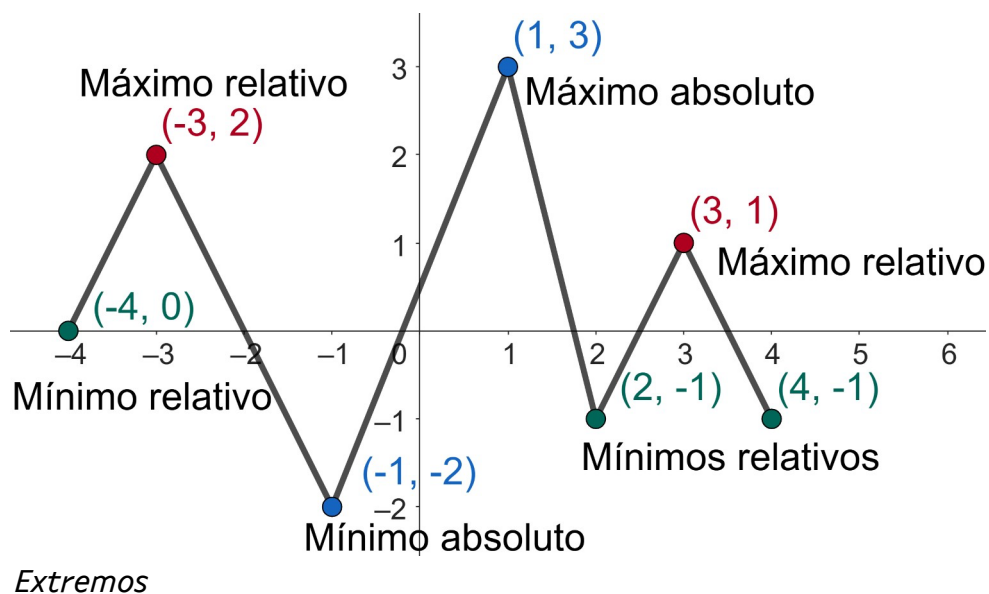
O maior valor da función chámase máximo absoluto. Solo hai un máximo absoluto.

Un mínimo local (ou relativo) é un punto onde a función toma o menor valor respecto dos puntos que están moi próximos. Un punto é un mínimo relativo se a función é decrecente á esquerda do punto e crecente á súa dereita. Pode haber varios mínimos locais.

O valor máis baixo da función chámase mínimo absoluto. Solo hai un mínimo absoluto.

Aos máximos e mínimos relativos chámaseles extremos relativos e ao máximo e mínimo absoluto chámaseles extremos absolutos.

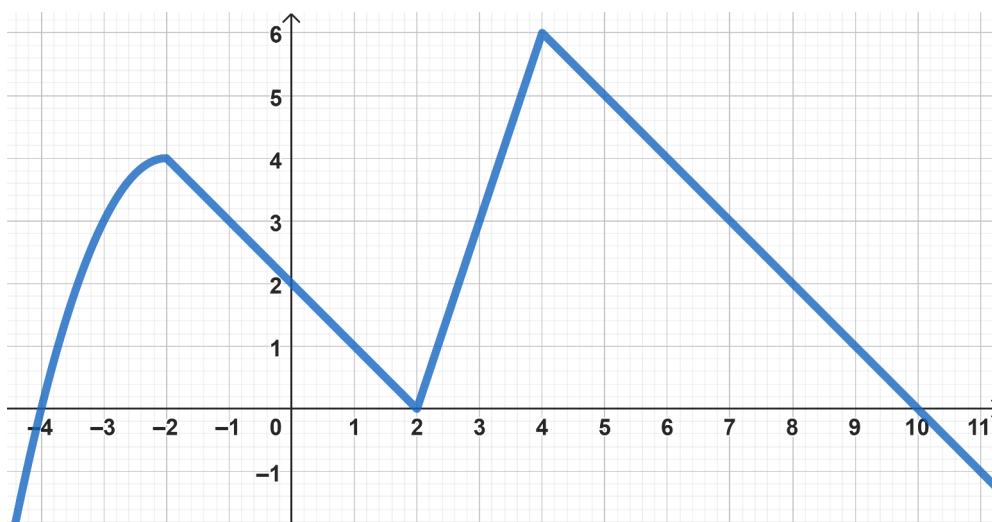
Exemplo:



EXERCICIOS

Exercicio 4

Estuda a función da seguinte gráfica (dominio, imaxe, puntos de corte cos eixes, monotonía, máximos e mínimos).



Exercicio 4

4. FUNCIÓNS LINEAIS

Unha función lineal é aquela cuxa representación gráfica é unha liña recta. A súa expresión analítica é do tipo $y=mx+n$, onde m e n son números reais. O valor m chámase pendente, indica a súa inclinación, e n é a ordenada no orixe.

- Se $m=0 \rightarrow y=n$, a función lineal é constante (é unha recta horizontal).
- Se $m \neq 0$
 - $n=0 \rightarrow y=mx$, a función recibe o nome de función de proporcionalidade directa. É unha recta que pasa polo orixe de coordenadas, $(0,0)$.
 - $n \neq 0 \rightarrow y=mx+n$, a función recibe o nome de función afín. Estas rectas non pasan pola orixe de coordenadas, se non polo punto $(0,n)$.

Ademais,

- Se $m > 0$ a función é crecente.
- Se $m < 0$ a función é decrecente.

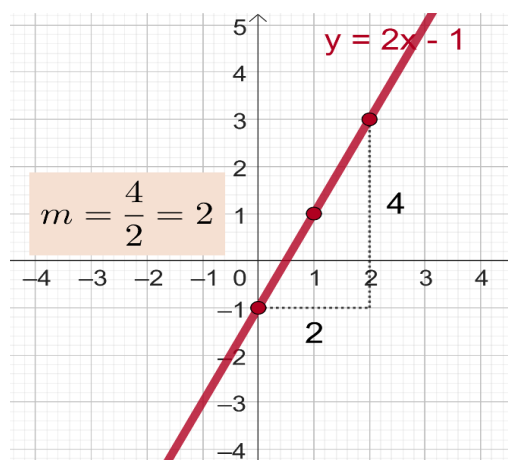
Existen outro tipo de rectas paralelas ao eixe Y cuxa expresión analítica é da forma $x=a$.

Para representar unha función lineal basta encontrar dous puntos da recta. Isto faremolo mediante unha táboa de valores onde escolleremos dous ou máis valores para a variable x e calcularemos os valores correspondentes de y substituíndo a x na expresión analítica da función.

Para calcular a pendente dunha recta, a partir da súa representación gráfica, escollemos dous puntos da recta, calculamos a diferenza das y e as x e as dividimos.

Exemplo:

$y=2x-1$	
x	y
0	$2 \cdot 0 - 1 = -1$
1	$2 \cdot 1 - 1 = 1$



Pendente de $y=2x-1$

Para obter a ecuación dunha recta podemos utilizar a súa expresión analítica ($y=mx+n$) ou a ecuación punto-pendente: $y=y_0+m(x-x_0)$, sendo (x_0, y_0) un punto da recta.

Poden darse os seguintes casos:

- Coñecemos a súa pendente e un dos seus puntos.

Exemplo: Calcula a ecuación da recta cuxa pendente é $m=-2$ e que pasa por $(1,3)$.

OPCIÓN 1: Mediante a ecuación $y=mx+n$

- Substitúo a pendente e o punto e despexo $n: 3=-2 \cdot 1+n \rightarrow n=5$
- Substitúo m e n na ecuación: $y=-2x+5$

OPCIÓN 2: Mediante a ecuación punto-pendente $y=y_0+m(x-x_0)$.

- Substitúo a pendente e o punto: $y=3-2(x-1)$
- Simplifico: $y=3-2x+2 \rightarrow y=-2x+5$

- Coñecemos dous dos seus puntos e con eles calculamos a pendente utilizando a fórmula $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, sendo (x_1, y_1) e (x_2, y_2) as coordenadas dos puntos.

Exemplo: Calcula a ecuación da recta que pasa polos puntos $(2,1)$ e $(1,3)$.

- Calculo $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-1}{1-2}=\frac{2}{-1}=-2$.
- Utilizo unha das opcións do exemplo anterior.



EXERCICIOS

Exercicio 5

Indica cal é a pendente e a ordenada na orixe das seguintes rectas e se son crecentes, decrecentes ou constantes:

- a) $y=3x$ b) $y=-2x+2$ c) $y=-x$ d) $y=3$

Exercicio 6

Representa as rectas do exercicio 4 e calcula a pendente a partir da gráfica.

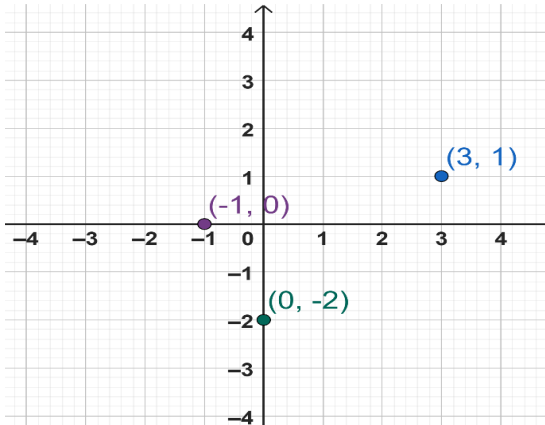
Exercicio 7

Obtén a ecuación da recta que pasa polos puntos $(1,0)$ e $(2,3)$.

SOLUCIÓNS

Exercicio 1

Representa as coordenadas $(0,-2)$, $(3,1)$, $(-1,0)$.

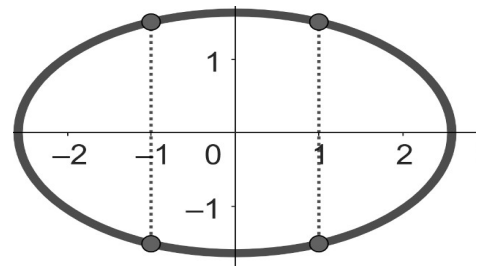


Solución exercicio 1

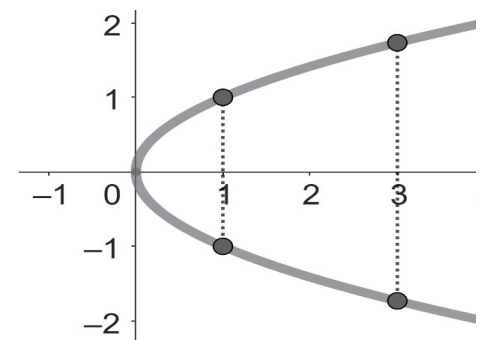
Exercicio 2

Determina se as seguintes gráficas son ou non funcións:

- a) Non é unha función, hai valores de x aos que se lles asocia máis dunha y , por exemplo $x=1$ e $x=-1$.
- b) É unha función, xa que a cada valor de x só lle corresponde unha única y .
- c) Non é unha función, hai valores de x aos que se lles asocia máis dunha y , por exemplo $x=1$ e $x=3$.
- d) É unha función, xa que a cada valor de x só lle corresponde unha única y .



Solución exercicio 2a



Solución exercicio 2c

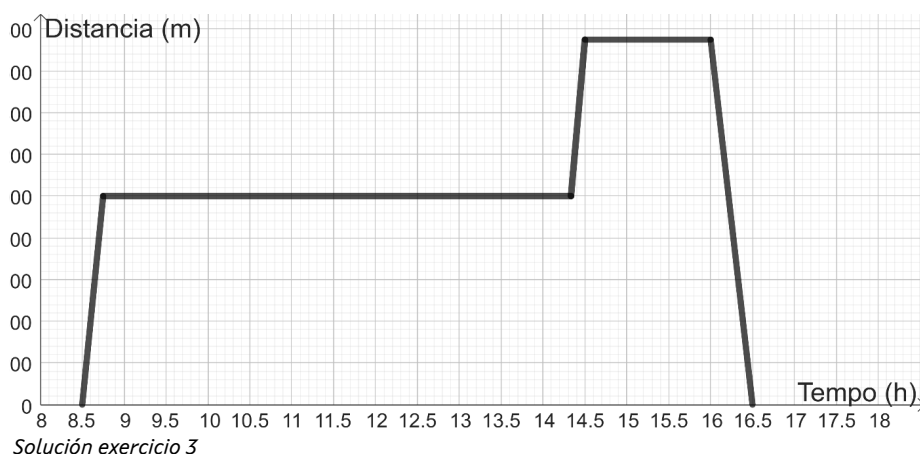
Exercicio 3

Expresa o seguinte enunciado mediante unha gráfica e unha táboa de valores:

Clara sae da súa casa ás 8:30 da mañá. Tarda 15 minutos en chegar á escola que está a 1 km da súa casa. Sae da escola ás 14:20 e vai a comer á casa da súa avoa, tarda 10 minutos en chegar e recorre 750 m. Está alí ata as 16:00 e regresa á casa. Como está cansada, tarda media hora en regresar.

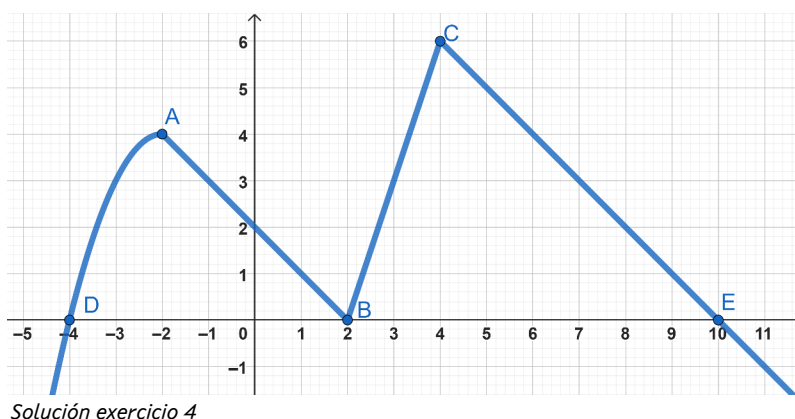
Tempo (h)	8,5	8,75	14,3	14,5	16	16,5
Distancia (m)	0	1000	1000	1750	1750	0

Gráfica



Exercicio 4

Estuda a función da seguinte gráfica (dominio, imaxe, puntos de corte cos eixes, monotonía, máximos e mínimos).



Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$

Cortes co eixe X: $(-4,0)$, $(2,0)$, $(10,0)$

Imaxe: $Im f = \text{Desde } -\infty \text{ a } 6$

Corte co eixe y: $(0,2)$



Decreciente: De -2 a 2 e de 4 a $+\infty$

Máximos: $x=-2$ (relativo) e $x=4$ (absoluto)

Crecente: De $-\infty$ a -2 e de 2 a 4 .

Mínimo: $x=2$ (relativo)

Exercicio 5

Indica cal é a pendente e a ordenada na orixe das seguintes rectas e se son crecentes, decrecentes ou constantes:

a) $y=3x$

$m=3$

$n=0$, pasa
polo $(0,0)$

É crecente
porque $m>0$

b) $y=-2x+2$

$m=-2$

$n=2$, pasa
polo $(0,2)$

É decrecente
porque $m<0$

c) $y=-x$

$m=-1$

$n=0$, pasa
polo $(0,0)$

É decrecente
porque $m<0$

d) $y=3$

$m=0$

$n=3$, pasa
polo $(0,3)$

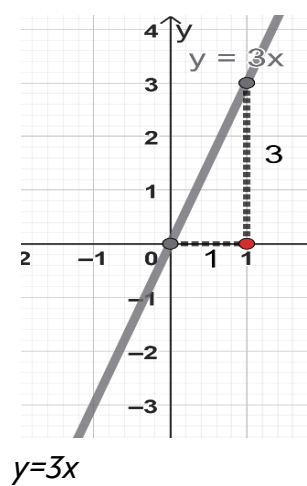
É constante
porque $m=0$

Exercicio 6

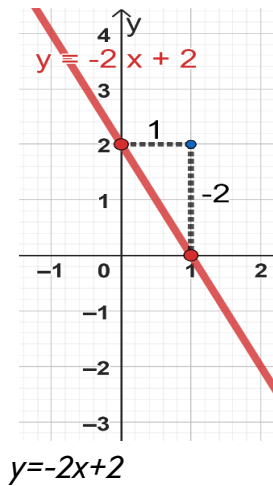
Representa as rectas do exercicio 4, calcula a pendente a partir da gráfica e compara se coincide cos resultados do exercicio 4.

Podemos utilizar os puntos obtidos no exercicio anterior, así só é preciso calcular 1 máis. Para o apartado d) non é preciso facer táboa, o valor de y sempre é 3.

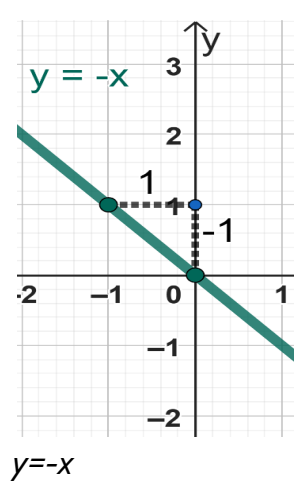
$y=3x$		$y=-2x+2$		$y=-x$		$y=3$	
x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	2	0	0	0	3
1	3	1	0	-1	1	1	3



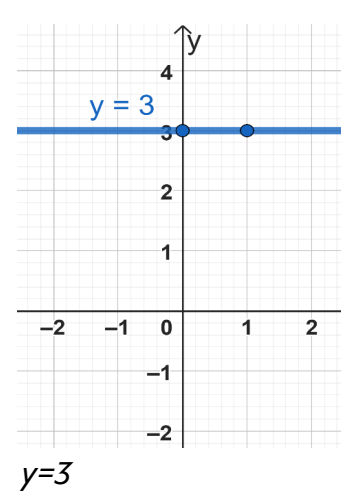
$$m = \frac{3}{1} = 3$$



$$m = \frac{-2}{1} = -2$$



$$m = \frac{-1}{1} = -1$$



$$m = \frac{0}{1} = 0$$

Exercicio 7

Obtén a ecuación da recta que pasa polos puntos (1,0) e (2,3).

- Calculamos a súa pendente: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$
- Utilizamos a ecuación punto-pendente, $y = y_0 + m(x - x_0)$, co punto (1,0):
 $y = 0 + 3(x - 1) \rightarrow y = 3x - 3$