



PATRÓNS



"Números brancos sobre fondo vermello" (Black Ice, CC-BY-SA-4.0)



ÍNDICE

PATRÓNS

1. SUCESIÓN NUMÉRICAS.....	1
<i>Exercicios</i>	1
2. PROGRESIÓN ARITMÉTICAS.....	2
2.1 Termo xeral dunha progresión aritmética.....	2
2.2 Suma dos n primeiros termos dunha progresión aritmética.....	2
<i>Exercicios</i>	2
3. PROGRESIÓN XEOMÉTRICAS.....	3
3.1 Termo xeral dunha progresión xeométrica.....	3
3.2 Suma dos n primeiros termos dunha progresión xeométrica.....	3
3.3 Suma dos infinitos termos dunha progresión xeométrica.....	3
<i>Exercicios</i>	4
4. MOSAICOS, FRISOS E ROSETÓNS.....	5
SOLUCIÓN.....	6

1. SUCESIÓN NUMÉRICAS

Unha sucesión de números reais é unha secuencia ordenada de números que seguen un patrón ou unha regra específica.

Exemplo:

- Sucesión a: 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2,...
- Sucesión b: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729,...

Chámase termo dunha sucesión a cada un dos elementos que a constitúen.

Para representar os diferentes termos dunha sucesión úsase unha mesma letra con distintos subíndices. Estes subíndices indican o lugar que ocupa ese termo na sucesión.

Exemplo:

- O termo 1 da sucesión a é $a_1=5$ e o termo 5 é $a_5=1$.
- O termo 2 da sucesión b é $b_2=3$ e o termo 7 é $b_7=729$.

Chámase termo xeral dunha sucesión, a , ao termo que ocupa o lugar n -ésimo, a_n .

Xeralmente o termo xeral nos proporciona unha fórmula que nos permite calcular calquera termo da sucesión se máis que coñecer a súa posición.

Exemplo:

- O termo xeral da sucesión a é $a_n=6-n$. A partir del podemos calcular, por exemplo, o termo 100: $a_{100}=6-100=-94$.
- O termo xeral da sucesión b é $b_n=3^{n-1}$. A partir del podemos calcular, por exemplo, o termo 20: $b_{20}=3^{20-1}=3^{19}$.

Existen outras formas de definir unha sucesión.

- Dando unha propiedade que cumbran todos os seus termos. Exemplo: a sucesión dos números primos é 2,3,5,7,11,13,...
- Por unha lei de recorrencia. A máis coñecida é a Sucesión de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,...) que se obtén mediante a lei de recorrencia: $a_1=1, a_2=1, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$.



EXERCICIOS

Exercicio 1

Escrebe os 10 primeiros termos das seguintes sucesións, o seu termo xeral e o termo 50.

a) 2, 6, 10, 14,...

b) 2, 4, 8, 16,...

2. PROGRESIÓNS ARITMÉTICAS

Unha progresión aritmética é unha sucesión de números reais na que cada termo se obtén sumando ou restando unha cantidade constante ao termo anterior. A esta constante chámase diferenza da progresión e imos denotala ca letra d .

$$d = a_{i+1} - a_i$$

sendo i calquera número natural.

2.1 Termo xeral dunha progresión aritmética

Dada unha progresión aritmética a , da que coñecemos a_1 e d , imos deducir o seu termo xeral, utilizando a definición anterior:

- a_1 coñecido
- $a_2 = a_1 + d$
- $a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$
- $a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$
- $a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$

...

Deducimos que o termo xeral dunha progresión aritmética é:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Para calculalo, debemos coñecer un dos seus termos e a diferenza ou dous termos.

2.2 Suma dos n primeiros termos dunha progresión aritmética

A suma dos n primeiros termos dunha progresión aritmética ven dada por: $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$



EXERCICIOS

Exercicio 2

Escrebe o termo xeral das seguintes progresións aritméticas e a suma dos 50 primeiros termos. Se é preciso, calcula a diferenza.

a) $2, 5, 8, 11, \dots$

b) $a_1 = 2, d = -1$

c) $a_3 = -2, a_5 = -6$

3. PROGRESIÓNS XEOMÉTRICAS

Unha progresión xeométrica é unha sucesión de números reais na que cada termo se obtén multiplicando unha cantidade constante ao termo anterior. A esta constante chámase razón da progresión e imos denotala ca letra r .

$$r = \frac{a_{i+1}}{a_i}$$

sendo i calquera número natural.

Nunha progresión xeométrica sempre debemos coñecer un dos seus termos e a razón ou dous termos.

3.1 Termo xeral dunha progresión xeométrica

Dada unha progresión xeométrica a , da que coñecemos a_1 e r , imos deducir o seu termo xeral, utilizando a definición anterior:

- a_1 coñecido
- $a_2 = a_1 \cdot r$
- $a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$
- $a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$
- $a_5 = a_4 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \cdot r = a_1 \cdot r^4$

...

Deducimos que o termo xeral dunha progresión xeométrica é:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

3.2 Suma dos n primeiros termos dunha progresión xeométrica

A suma dos n primeiros termos dunha progresión xeométrica ven dada pola fórmula:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}, r \neq 1$$

3.3 Suma dos infinitos termos dunha progresión xeométrica

Cando a razón é un valor entre -1 e 1, é posible calcular a suma dos infinitos termos da progresión utilizando a seguinte fórmula:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}, -1 < r < 1$$



EXERCICIOS

Exercicio 3

Escrebe o termo xeral das seguintes progresións xeométricas e a suma dos 10 primeiros termos. Cando sexa posible, calcula a suma infinita.

a) $2, 6, 18, 54, \dots$

b) $a_1 = 0,5, r = 2$

c) $a_1 = 8, r = \frac{1}{2}$

d) $a_3 = -3, a_4 = 6$

4. MOSAICOS, FRISOS E ROSETÓNS

Un mosaico é un obra de arte feita mediante a unión de pequenas pezas. Para crealos, con frecuencia, se utilizan patróns.

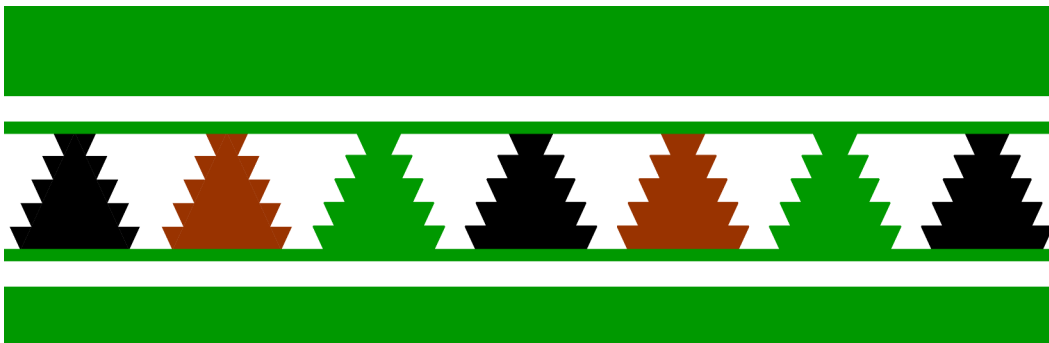


"Mosaico"

(Vectorportal.com, CC-BY-SA-4.0)

No mosaico da imaxe utilizan un cuarto de círculo que rotan para crear unha imaxe decorativa.

Un friso é unha banda horizontal que pode servir como elemento decorativo ou arquitectónico, e que a miúdo se utiliza para mostrar patróns, incluíndo mosaicos.



"Friso"

Un rosetón é un elemento arquitectónico e decorativo caracterizado pola súa forma circular e o seu deseño radial simétrico. Os rosetóns poden estar realizados en mosaico. Ademais, o deseño radial dun rosetón en si mesmo constitúe un tipo de patrón.



"Rosetón" (Lmbuga, CC-BY-SA-4.0)



SOLUCIÓNS

Exercicio 1

Escrebe os 10 primeiros termos das seguintes sucesións, o seu termo xeral e o termo 50.

a) 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 + 4$$

$$a_3 = 2 + 8 = 2 + 4 \cdot 2$$

$$a_4 = 2 + 12 = 2 + 4 \cdot 3$$

Polo tanto,

$$a_n = 2 + 4n, \text{ si } n > 1.$$

Se substituímos $n=1$ nesa fórmula, obtemos 6, pero queremos que $a_1=2$, entón á expresión anterior temos que restarlle 4 e obtemos: $a_n = 4n - 2$.

$$\text{Entón, } a_{50} = 4 \cdot 50 - 2 = 198.$$

b) 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024

$$a_n = 2^n \text{ e } a_{50} = 2^{50}$$

Exercicio 2

Escrebe o termo xeral das seguintes progresións aritméticas e a suma dos 50 primeiros termos. Se é preciso, calcula a diferenza.

a) 2, 5, 8, 11, ...

$$d = 5 - 2 = 3$$

$$a_n = a_1 + d(n-1) \rightarrow a_n = 2 + 3(n-1) = 2 + 3n - 3 \rightarrow a_n = 3n - 1$$

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(2 + 149) \cdot 50}{2} = 151 \cdot 25 = 3775$$

$$a_{50} = 3 \cdot 50 - 1 = 149$$

b) $a_1=2, d=-1$

$$a_n = a_1 + d(n-1) \rightarrow a_n = 2 - 1 \cdot (n-1) = 2 - n + 1 \rightarrow a_n = 3 - n$$

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(2 - 47) \cdot 50}{2} = -45 \cdot 25 = -1125$$

$$a_{50} = 3 - 5 = -47$$

c) $a_3=-2, a_5=-6$

$$a_5 = a_3 + 2d \rightarrow d = \frac{a_5 - a_3}{2} = \frac{-6 + 2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$a_3 = a_1 + 2d \rightarrow a_1 = a_3 - 2d = -2 - 2 \cdot (-2) = -2 + 4 = 2$$

$$a_n = a_1 + d(n-1) \rightarrow a_n = 2 - 2(n-1) = 2 - 2n + 2 \rightarrow a_n = -2n + 4$$

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(2 - 96) \cdot 50}{2} = -94 \cdot 25 = -2350$$

$$a_{50} = -2 \cdot 50 + 4 = -100 + 4 = -96$$

Exercicio 3

Escrebe o termo xeral das seguintes progresións xeométricas e a suma dos 10 primeiros termos. Cando sexa posible, calcula a suma infinita.

a) $2, 6, 18, 54, \dots$

$$r = \frac{6}{2} = 3$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot (r^{10} - 1)}{r - 1} = \frac{2 \cdot (3^{10} - 1)}{3 - 1} = 3^{10} - 1 = 59048$$

Como $r > 1$, non se pode calcular a suma infinita.

b) $a_1=0,5, r=2$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 0,5 \cdot 2^{n-1}$$

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot (r^{10} - 1)}{r - 1} = \frac{0,5 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 0,5 \cdot (2^{10} - 1) = 511,5$$

Como $r > 1$, non se pode calcular a suma infinita.

c) $a_1 = 8, r = \frac{1}{2}$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot (r^{10} - 1)}{r - 1} = \frac{8 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = -16 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right) = 15,984375$$

Como $r < 1$, podemos calcular a suma infinita.

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{8}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$$

d) $a_3 = -3, a_4 = 6$

$$a_4 = a_3 \cdot r \rightarrow r = \frac{a_4}{a_3} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 \rightarrow a_1 = \frac{a_4}{r^3} = \frac{6}{(-2)^3} = -0,75$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = -0,75 \cdot (-2)^{n-1}$$

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot (r^{10} - 1)}{r - 1} = \frac{-0,75 \cdot ((-2)^{10} - 1)}{-2 - 1} = 0,25((-2)^{10} - 1) = 255,75$$

Como $r > 1$, non se pode calcular a suma infinita.