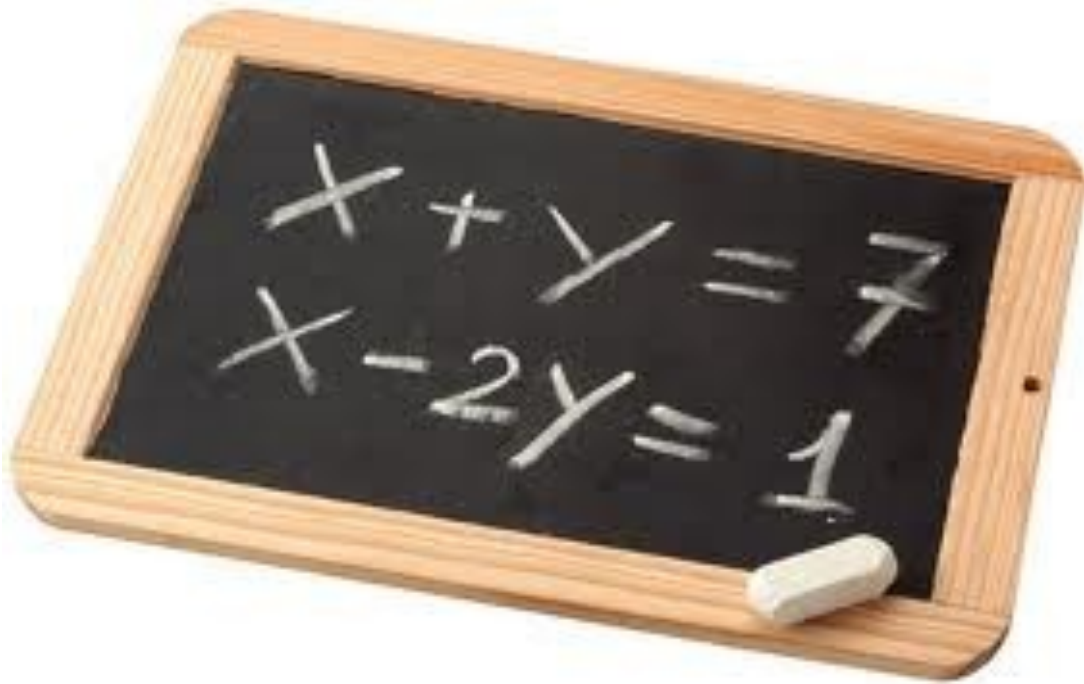




SISTEMAS DE ECUACIONES



"X+Y" (Quinchoa, CC-BY-SA-3.0)



ÍNDICE

SISTEMAS DE ECUACIONES

1. SISTEMAS DE ECUACIONES.....	1
1.1 Sistemas de ecuaciones lineais.....	1
1.2 Resolución gráfica.....	1
1.3 Resolución analítica.....	4
Método de substitución.....	4
Método de igualación.....	4
Método de reducción.....	5
Exercicios.....	5
2. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS LINEAIS.....	6
Exercicios.....	6
SOLUCIONES.....	7



1. SISTEMAS DE ECUACIONES

Un sistema de ecuacións é un conxunto de dúas ou máis ecuacións con dúas ou máis incógnitas.

Resolver un sistema é encontrar os valores das incógnitas que fan verdadeiras todas as ecuacións do sistema. Se non existe unha solución común, o sistema non ten solución.

1.1 Sistemas de ecuacións lineais

Un sistema de ecuacións lineais é un conxunto de dúas ou máis ecuacións con dúas ou máis incógnitas. Nesta materia centrarémonos nos sistemas lineais con dúas ecuacións e dúas incógnitas cuxa expresión xeral é
$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Onde a, b, c, a', b', c' son números.

1.2 Resolución gráfica

Un sistema pode resolverse graficamente.

Para resolver graficamente un sistema de dúas ecuacións con dúas incógnitas represéntanse nos mesmos eixes de coordenadas as rectas (as ecuacións do sistema). O seu punto de corte é a solución do sistema.

Exemplo: resolver o sistema lineal
$$\begin{cases} x+3y=7 \\ 3x-2y=-1 \end{cases} \quad (1)$$
 graficamente.

Representamos a recta $x+3y=7$:

1. Despexamos y : $3y=7-x \rightarrow \frac{3y}{3}=\frac{7-x}{3} \rightarrow y=\frac{7-x}{3}$
2. Facemos unha táboa de valores con, polo menos, 2 valores. Neste caso, como temos un denominador, intentamos buscar valores para os que o numerador sexa múltiplo de 3.

x	y
1	$\frac{7-1}{3}=\frac{6}{3}=2$
4	$\frac{7-4}{3}=\frac{3}{3}=1$

3. Representamos os puntos e trazamos unha recta que pase por ambos.

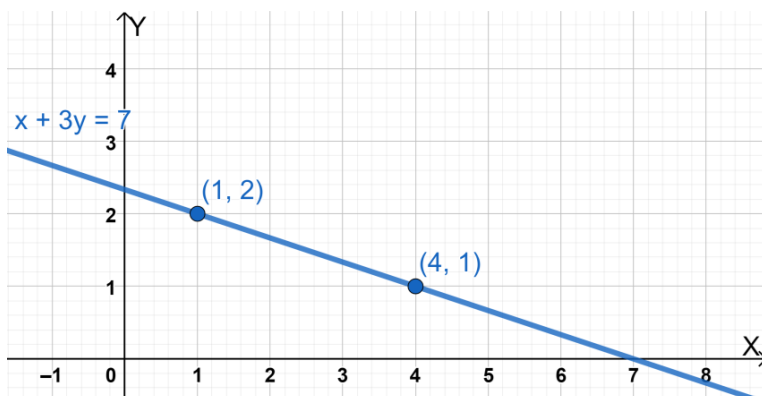


Figura 1: gráfica da recta $x+3y=7$

Agora representamos nos mesmos eixes a recta $3x - 2y = -1$

1. Despexamos y : $-2y = -1 - 3x \rightarrow y = \frac{-1-3x}{-2} \rightarrow y = \frac{3x+1}{2}$
2. Facemos unha táboa de valores con polo menos 2 valores. Neste caso, como temos un denominador, intentamos buscar valores para os que o numerador sexa múltiplo de 2.

x	y
1	$\frac{3 \cdot 1 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$
-1	$\frac{3 \cdot (-1) + 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

3. Representamos os puntos nos mesmos eixes e trazamos unha recta que pase por ambos.

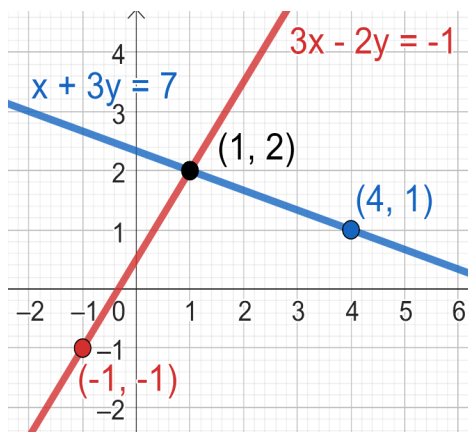


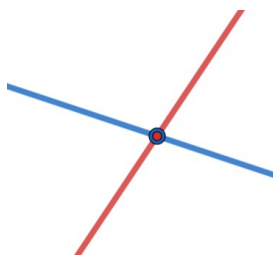
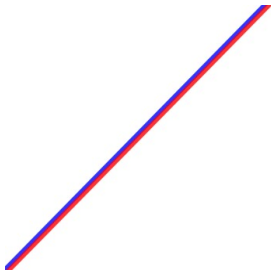
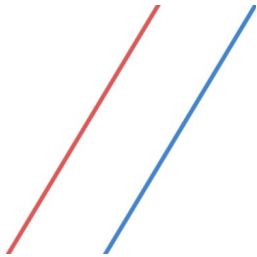
Figura 2: solución gráfica do sistema (1)

O punto de intersección das rectas $(1,2)$ é a solución do sistema.

Os sistemas clasifícanse segundo o número de solucións, como:

- **Compatible:** cando ten solución.
 - **Compatible determinado:** se a solución é única.
 - **Compatible indeterminado:** se posúe infinitas solucións.
- **Incompatible:** cando non ten solución.

Interpretación gráfica dun sistema lineal con dúas incógnitas $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

	Compatible determinado	Compatible indeterminado	Incompatible
Interpretación gráfica	Dúas rectas que se cortan nun único punto. O dito punto é a solución do sistema.	Son a mesma recta pero a súa ecuación ten unha expresión distinta.	Dúas rectas paralelas e que polo tanto nunca se cortan. O sistema non ten solución.
	 <i>Figura 3: rectas secantes</i>	 <i>Figura 4: rectas coincidentes</i>	 <i>Figura 5: rectas paralelas</i>

1.3 Resolución analítica

Entre os métodos alxébricos que existen para resolver estes sistemas atópanse os seguintes:

Método de substitución

Despéxase unha incógnita nunha das ecuacións e substitúese a expresión obtida na outra.

Exemplo: resolve o sistema lineal $\begin{cases} x+3y=7 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$ mediante o método de substitución.

- Despexamos x na primeira ecuación:

$$x=7-3y$$

- A expresión obtida para x substitúese na segunda ecuación:

$$3 \cdot (7-3y) - 2y = -1$$

- Resolvemos a ecuación:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (7-3y) - 2y &= -1 \rightarrow 21 - 9y - 2y = -1 \rightarrow 21 - 11y + 1 = -1 + 1 \rightarrow 22 - 11y + 11y = 0 + 11y \rightarrow \\ \rightarrow 22 &= 11y \rightarrow \frac{22}{11} = \frac{11y}{11} \rightarrow y = 2 \end{aligned}$$

- Substituímos o valor de y na 1ª ecuación:

$$x = 7 - 3 \cdot 2 \rightarrow x = 1$$

A solución do sistema é $(x, y) = (1, 2)$.

Método de igualación

Despéxase a mesma incógnita en todas as ecuacións e iguálense as expresións obtidas.

Exemplo: resolve o sistema lineal $\begin{cases} x+3y=7 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$ mediante o método de igualación.

- Despexamos x nas dúas ecuacións: $\begin{cases} x=7-3y \\ x=\frac{2y-1}{3} \end{cases}$

- Igualamos as dúas ecuacións e resolvemos:

$$7 - 3y = \frac{2y-1}{3} \rightarrow 21 - 9y = 2y - 1 \rightarrow 22 = 11y \rightarrow \frac{22}{11} = \frac{11y}{11} \rightarrow y = 2$$

- Substituímos o resultado nunha das ecuacións para calcular x : $x = 7 - 3 \cdot 2 \rightarrow x = 1$

A solución do sistema é $(x, y) = (1, 2)$.

Método de reducción

Modifícanse as ecuacións orixinais multiplicándoas por un número de tal forma que ao sumar ambas as ecuacións unha das incógnitas se elimine.

Exemplo: resolve o sistema lineal $\begin{cases} x+3y=7 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$ polo método de reducción.

Imos eliminar x , xa que nunha das ecuacións ten coeficiente 1 e resulta máis sinxelo.

- Multiplicamos a 1ª ecuación por -3 : $\begin{cases} -3x-9y=-21 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$
- Sumamos ambas as ecuacións: $0x-11y=-22 \rightarrow -11y=-22$
- Resolvemos a ecuación resultante: $-11y=-22 \rightarrow \frac{-11y}{-11} = \frac{-22}{-11} \rightarrow y=2$
- Substituímos o valor de y na 1ª ecuación e despexamos x : $x+3 \cdot 2=7 \rightarrow x=1$

A solución do sistema é $(x,y)=(1,2)$.



EXERCICIOS

Exercicio 1

Representa os seguintes sistemas en GeoGebra e clasifícaos en función do número de solucións. Cando o sistema sexa incompatible ou compatible indeterminado, trata de resolvelo polo método de reducción.

a) $\begin{cases} x-3y=1 \\ -2x+6y=-2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x-6y=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x-4y=4 \end{cases}$

Exercicio 2

Resolve os seguintes sistemas polo método indicado:

a) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x-4y=4 \end{cases}$ polo método de substitución.

b) $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x+3y=-6 \end{cases}$ polo método de igualación.

c) $\begin{cases} 3x-5y=-26 \\ 4x+10y=32 \end{cases}$ polo método de reducción

2. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS LINEAIS

Para resolver problemas mediante un sistema de ecuacións lineais débense seguir os pasos seguintes:

1. **Identificar as incógnitas:** baseándonos no que pregunta o problema, decidimos cales son as dúas incógnitas.
2. **Formulación:** consiste en traducir o enunciado escrito á linguaxe alxébrica, mediante un sistema de ecuacións.
3. **Resolución do sistema.**
4. **Discusión:** comprobamos que a solución obtida ten sentido no contexto do problema. Non ten por que escribirse, basta con pensalo.

Exemplo: unha multinacional ten delegacións en Madrid e Barcelona. O número total de altos executivos das dúas delegacións ascende a 26. Para que o número de altos executivos da delegación de Barcelona fose igual ao de Madrid terían que trasladarse 3 de Madrid a Barcelona. Cantos altos executivos están destinados en cada cidade?

1. Sexan x e y o número de altos executivos (AE) de Madrid e Barcelona, respectivamente.
2. Formulación:
 - Número total de AE: $x + y$
 - Número de AE de Madrid: x . Se 3 se trasladan a Barcelona, pasan a ser $x - 3$
 - Número de AE de Barcelona: y . Se 3 de Madrid se unen, pasan a ser $y + 3$

$$\begin{cases} x + y = 26 \\ x - 3 = y + 3 \end{cases}$$

3. Resolución: imos aplicar o método de redución:

$$\begin{cases} x + y = 26 \\ x - 3 = y + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 26 \\ x - y = 6 \end{cases} \rightarrow 2x = 32 \rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{32}{2} \rightarrow x = 16$$

Substituímos $x = 16$ na 1ª ecuación e obtemos: $16 + y = 26 \rightarrow 16 + y - 16 = 26 - 16 \rightarrow y = 10$

4. Discusión: a solución ten sentido co contexto do problema, logo os executivos da multinacional serán: 16 en Madrid e 10 en Barcelona.



EXERCICIOS

Exercicio 3

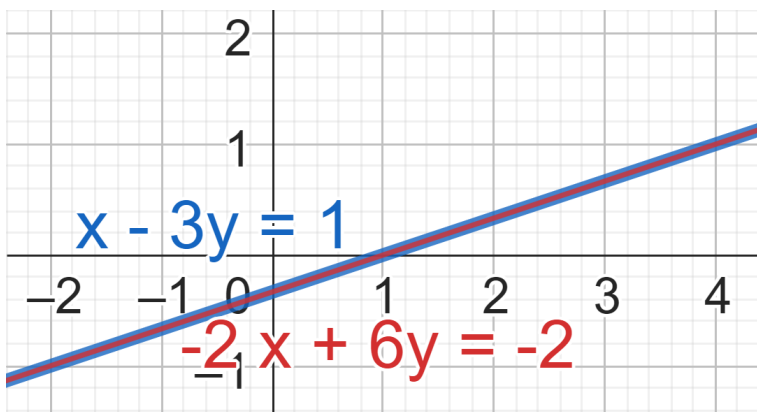
Hai 3 anos, a idade actual de Miguel era o dobre que a da súa irmá Ana. Dentro de sete anos será $\frac{4}{3}$ dos que entón teña Ana. Cal é a idade actual de cada un?

SOLUCIÓN

Exercicio 1

Representa os seguintes sistemas en GeoGebra e clasifícaos en función do número de solucións. Cando o sistema sexa incompatible ou compatible indeterminado, trata de resolvelo polo método de redución.

a)
$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ -2x + 6y = -2 \end{cases}$$



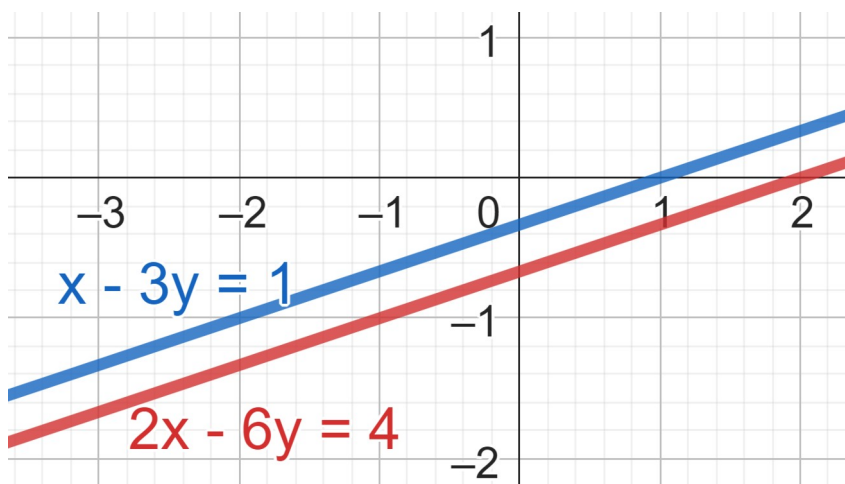
O sistema é compatible indeterminado. Resolvémolo polo método de redución:

Multiplicamos por 2 a 1ª ecuación, sumamos e resolvemos a ecuación resultante.

$$\begin{cases} 2x - 6y = 2 \\ -2x + 6y = -2 \end{cases} \rightarrow 0x + 0y = 0$$

A ecuación resultante é redundante. Este sistema ten infinitas solucións. Para obter estas solucións despegamos unha das incógnitas nunha das ecuacións: $x = 3y - 1$. Todas as solucións van cumprir esa fórmula, basta con dar un valor calquera a y . Por exemplo, se $y = 0 \rightarrow x = 3 \cdot 0 - 1 \rightarrow (x, y) = (0, -1)$ se $y = 1 \rightarrow x = 3 \cdot 1 - 1 \rightarrow (x, y) = (2, 1)$...

b)
$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$$



O sistema é incompatible, xa que as rectas son paralelas. Non ten solución.

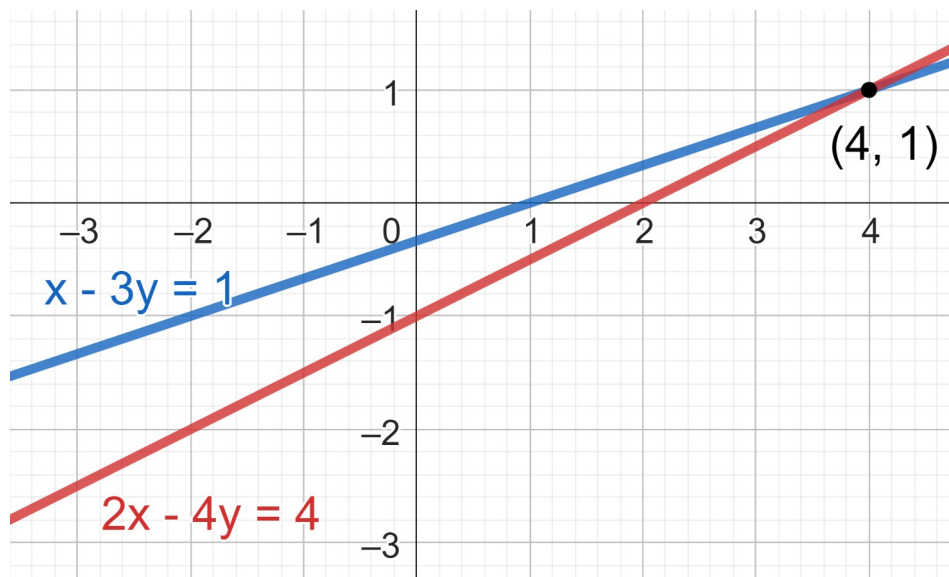
Imos ver que ocorrería se tratamos de resolvelo polo método de redución:

Multiplicamos por -2 a 1ª ecuación, sumamos e resolvemos a ecuación resultante.

$$\begin{cases} -2x+6y=-2 \\ 2x-6y=4 \end{cases} \rightarrow 0x+0y=2$$

A ecuación obtida non ten sentido, asegura que $0=2$, logo non se pode resolver.

c) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x-4y=4 \end{cases}$



O sistema é compatible determinado, ten unha única solución no punto (4,1).

Exercicio 2

Resolve os seguintes sistemas polo método indicado:

a) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x-4y=4 \end{cases}$ polo método de substitución.

1. Despexamos x na 1ª ecuación porque ten coeficiente 1 e resulta máis sinxelo:

$$x=1+3y$$

2. Substituímos na 2ª ecuación e resolvemos a ecuación resultante:

$$2 \cdot (1+3y) - 4y = 4 \rightarrow 2+6y-4y=4 \rightarrow 2+2y-2=4-2 \rightarrow 2y=2 \rightarrow \frac{2y}{2}=\frac{2}{2} \rightarrow y=1$$

3. Substituímos o valor de y na ecuación despexada, para obter o valor de x :

$$x=1+3 \cdot 1 \rightarrow x=4$$

Solución: $(x,y)=(4,1)$.

b) $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x+3y=-6 \end{cases}$ polo método de igualación.

1. Despexamos x en ambas as ecuacións porque teñen coeficiente 1 e resulta máis sinxelo:

$$\begin{cases} x=2y-1 \\ x=-3y-6 \end{cases}$$

2. Igualamos e resolvemos a ecuación resultante:

$$2y-1=-3y-6 \rightarrow 2y-1+1=-3y-6+1 \rightarrow 2y+3y=-3y-5+3y \rightarrow 5y=-5 \rightarrow y=-1$$

3. Substituímos o valor de y nunha das ecuacións despexadas, para obter o valor de x :

$$x=2 \cdot (-1)-1=-2-1 \rightarrow x=-3$$

Solución: $(x, y)=(-3, -1)$.

c) $\begin{cases} 3x-5y=-26 \\ 4x+10y=32 \end{cases}$ polo método de redución.

1. Multiplicamos a 1ª ecuación por 2, sumamos e resolvemos a ecuación resultante:

$$\begin{cases} 6x-10y=-52 \\ 4x+10y=32 \end{cases} \rightarrow 10x=-20 \rightarrow x=-2$$

2. Substituímos o valor de x nunha das ecuacións e calculamos o valor de y :

$$3 \cdot (-2)-5y=-26 \rightarrow -6-5y=-26 \rightarrow -6-5y+6=-26+6 \rightarrow -5y=-20 \rightarrow \frac{-5y}{-5}=\frac{-20}{-5} \rightarrow y=4$$

Solución: $(x, y)=(-2, 4)$.

Exercicio 3

Hai 3 anos, a idade actual de Miguel era o dobre que a da súa irmá Ana. Dentro de sete anos será $4/3$ dos que entón teña Ana. Cal é a idade actual de cada un?

Sexan x a idade actual de Miguel e y a idade actual de Ana, entón:

	Miguel	Ana
Hai 3 anos	$x-3$	$y-3$
Actualmente	x	y
Dentro de 7 anos	$x+7$	$y+7$

Formulación:
$$\begin{cases} x-3=2(y-3) \\ x+7=\frac{4}{3}(y+7) \end{cases}$$

Para resolver o sistema, primeiro reordenamos as ecuacións:

$$\begin{cases} x-3=2y-6 \\ x+7=\frac{4}{3}y+\frac{28}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y=-3 \\ x-\frac{4}{3}y=\frac{28}{3}-7 \end{cases}$$

Agora eliminamos os denominadores da 2ª ecuación multiplicandoa por 3:

$$\begin{cases} x-2y=-3 \\ 3x-3\cdot\frac{4}{3}y=3\cdot\frac{28}{3}-3\cdot7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y=-3 \\ 3x-4y=7 \end{cases}$$

Resolvemos por redución, multiplicando por -3 a 1ª ecuación:

$$\begin{cases} -3x+6y=9 \\ 3x-4y=7 \end{cases} \rightarrow 2y=16 \rightarrow y=8$$

Por último, substituímos o valor de y na 1ª ecuación e calculamos o valor de x :

$$x-2\cdot8=-3 \rightarrow x=16-3 \rightarrow x=13$$

Solución: actualmente, Miguel ten 13 anos e Ana 8.