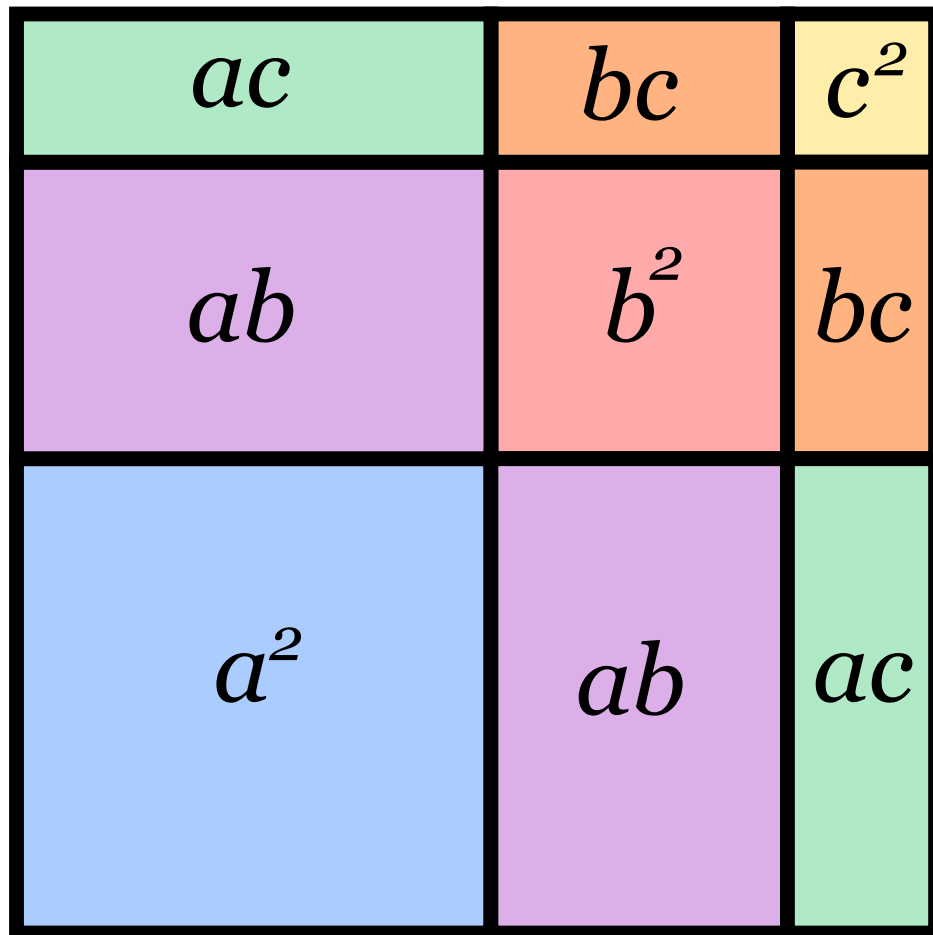




ECUACIONES



$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

"Trinomio ao cadrado" (Magister Mathematicae, CC-BY-SA-4.0,3.0,2.5,2.0,1.0)



ÍNDICE

ECUACIONES

1. EXPRESIÓN ALXÉBRICAS.....	1
<i>Exercicios</i>	2
1.1 Operacións con monomios.....	2
1.2 Operacións con polinomios.....	3
<i>Exercicios</i>	3
2. ECUACIÓN.....	4
2.1 Ecuacións de primeiro grao.....	4
2.1.1 Resolución analítica.....	4
<i>Exercicios</i>	6
2.1.2 Resolución gráfica.....	6
2.2 Resolución de problemas.....	6
<i>Exercicios</i>	7
SOLUCIÓN.....	8

1. EXPRESIÓNS ALXÉBRICAS

Unha variable é unha cantidade descoñecida representada con letras, xeralmente x , y e z .

Toda variable está multiplicada por un número que recibe o nome de coeficiente, aínda que se o coeficiente é 1, non se escribe. Para representar os coeficientes adoitan utilizarse as letras a , b e c .

Exemplo: x é unha variable con coeficiente 1 e $-2y^2$ é unha variable con coeficiente -2.

Unha expresión alxébrica é una expresión matemática en que se utilizan coeficientes, variables e operacións matemáticas.

Cada un dos sumandos dunha expresión alxébrica denomínase **termo** e cada termo ten unha parte literal (letras) e un coeficiente (números).

Exemplo: $5x - 2y^2$ ten dous termos, $5x$ que ten coeficiente 5 e parte literal x e $-2y^2$ cuxo coeficiente é -2 e a parte literal y^2 .

Atendendo ao número de termos, unha expresión alxébrica pode ser:

- **Monomio:** se ten 1 único termo. *Exemplo:* $-2xy$
- **Binomio:** se ten 2 termos. *Exemplo:* $2x - y$
- **Polinomio:** se ten máis de 2. É a suma de varios monomios. *Exemplo:* $x^3 - xy + y^2 - 1$

Se un termo da expresión alxébrica non ten parte literal denomínase **termo independente**.

Exemplo: no polinomio $x^3 - xy + y^2 - 1$, -1 é o termo independente. En realidade, o termo independente ten parte literal de expoñente 0, $-1 = -1x^0$.

O grao dun monomio é a suma dos expoñentes da parte literal. O grao dun polinomio é o maior grao dos seus monomios.

Exemplo: o grao do monomio xy é $1+1=2$; o grao do polinomio $x^3 - xy + y^2 - 1$ é 3 porque os seus monomios teñen grao 3, 2, 2 e 1, respectivamente, e o maior deles é 3.

Chámase valor numérico dunha expresión alxébrica o valor que se obtén ao substituír as variables por números. *Exemplo:* o valor numérico de $5xy - 2$ para $x=1$ e $y=0$ é $5 \cdot 1 \cdot 0 - 2 = -2$.



Unha expresión alxébrica serve para representar valores descoñecidos.

Exemplo: o triplo dun número x é $3x$. A metade da miña idade é $\frac{y}{2}$, se a miña idade é y .



EXERCICIOS

Exercicio 1

Indica os elementos das seguintes expresións alxébricas e clasifícaos en función do número de termos. Despois indica os seus graos e os respectivos valores numéricos para $x=1$ e $y=-1$.

a) $-x^2+2y-5$

b) $3x^2y^3$

c) x^3-1

Exercicio 2

Relaciona cada expresión alxébrica co enunciado que corresponda, sabendo que a idade de Xoán é x :

1) A idade de Xoán hai 5 anos

A) $2x$

2) A idade de Pedro se é 10 anos máis vello que Xoán

B) $x+10$

C) $x \cdot (x+10)$

3) O dobre da idade de Xoán

D) $x-5$

4) Un cuarto da idade de Xoán

E) $\frac{x}{4}$

5) O produto da idade de Xoán e a de Pedro

1.1 Operacións con monomios

Dous monomios son semellantes se teñen a mesma parte literal.

Exemplo: $2x$ e $-3x$ son semellantes; $2x$ e $2x^2$ non son semellantes.

Dous ou máis monomios pódense sumar ou restar se son semellantes. A parte literal é a mesma e os coeficientes opéranse.

Exemplo: $4y-2y=(4-2)y=2y$.

Para multiplicar un monomio por un número multiplícase o dito número polo coeficiente do monomio e a parte literal queda intacta.

Exemplo: $3 \cdot 5z=15z$



Por último, para multiplicar (ou dividir) monomios, abonda con realizar esa operación entre os coeficientes e repetila nas partes literais. Se as partes literais coinciden, súmanse (ou réstanse) os expoñentes, e se non, déixase indicada a operación.

Exemplo: $-2x \cdot 3x = (-2 \cdot 3) \cdot x \cdot x = -6 \cdot x^{1+1} = -6x^2$; $\frac{6x^2}{3y} = \frac{6}{3} \cdot \frac{x^2}{y} = \frac{2x^2}{y}$

1.2 Operacións con polinomios

Para sumar (ou restar) polinomios basta con sumar (ou restar) os monomios semellantes. Se non hai ningún semellante, indícase a operación.

Exemplos:

$$(2x^3 + 3x^2 + 1) + (x^3 - 2x^2 - 4) = (2x^3 + x^3) + (3x^2 - 2x^2) + (1 - 4) = 3x^3 + x^2 - 3$$

$$(x^5 - 2x^4 + x^2 - 1) - (2x^5 - x^3 + x^2 + 2) = (x^5 - 2x^5) - 2x^4 - (-x^3) + (x^2 - x^2) + (-1 - 2) = -x^5 - 2x^4 + x^3 - 3$$

Para multiplicar dous polinomios temos que multiplicar todos os monomios do primeiro por cada un dos do segundo e sumar ou restar os que sexan semellantes.

Exemplo: $(5x^2 + 3x) \cdot (2x + 2) = 5x^2 \cdot (2x + 2) + 3x \cdot (2x + 2) = 10x^3 + 10x^2 + 6x^2 + 6x = 10x^3 + 16x^2 + 6x$



EXERCICIOS

Exercicio 3

Realiza as seguintes operacións:

a) $(5x^2y) \cdot (2xy)$

b) $(16y^2z) : (4y^2z)$

c) $6b + 4a - 3b - a + 3a - 5b$

d) $2x^3 \cdot (4x + 1)$

e) $(5z^2 - y) \cdot (y^2 - 3z)$

2. ECUACIONES

Unha ecuación é unha igualdade entre dúas expresións alxébricas.

Exemplo: se relacionamos $2x$ e $x-y$ mediante un $=$ obtemos a ecuación $2x=x-y$.

Chamamos **membro** dunha ecuación a cada unha das expresións alxébricas que a compoñen. Unha ecuación ten dous membros, o que está á esquerda do $=$, que se chama **1º membro**, e o que está á dereita, que recibe o nome de **2º membro**.

Exemplo: na ecuación $2x=x-y$ o 1º membro é $2x$ e o 2º membro é $x-y$.

Cada unha das letras da ecuación recibe o nome de **incógnita**.

Unha **solución** dunha ecuación é un valor da incógnita que, ao ser substituído na ecuación, fai que a igualdade sexa certa.

Exemplo: $x=1$ e $y=-1$ é solución da ecuación $2x=x-y$ xa que $2 \cdot 1=2$ e $1-(-1)=2$.

Resolver unha ecuación é encontrar todas as súas solucións. A forma máis sinxela de resolver unha ecuación é atopar outra equivalente a ela que sexa máis simple.

Dúas ecuacións son **equivalentes** se teñen a mesma solución. Para obter ecuacións equivalentes debemos realizar a mesma operación en ambos os membros da ecuación. *Exemplo:* $2x=x-y$ e $2x-5=x-y-5$ son equivalentes.

Podemos visualizar unha ecuación como unha balanza en equilibrio. Se queremos manter ese equilibrio, debemos engadir (ou quitar) a mesma cantidade en ambos os lados.

2.1 Ecuacións de primeiro grao

Unha ecuación de primeiro grao cunha incógnita é toda ecuación equivalente a outra da forma $ax+b=0$, onde a e b son números reais chamados coeficientes da ecuación e $a \neq 0$.

Exemplo: a ecuación $2x+3=0$ é de 1º grao.

Unha ecuación de 1º grao pode ter infinitas solucións (*compatible indeterminada*), unha (*compatible determinada*) ou ningunha (*incompatible*).

2.1.1 Resolución analítica

Para resolver unha ecuación de 1º grao debemos illar a incógnita, é dicir, nun dos membros estará a incógnita e noutro un número.

Exemplo: $2x+3=0$

1. No 1º membro queremos deixar soamente o $2x$, polo tanto, queremos eliminar o 3 ou transformalo en 0. Para iso restamos 3 unidades no 1º membro, pero, ao tratarse dunha ecuación, debemos facer o mesmo no 2º membro: $2x+3-3=0-3 \rightarrow 2x=-3$

2. Coñecemos o valor de $2x$, pero queremos coñecer o valor de $1x$ (ou simplemente x).

Polo tanto, dividimos entre 2 ambos os membros: $\frac{2x}{2} = \frac{-3}{2} \rightarrow x = -\frac{3}{2}$.

Se a ecuación é máis complexa, en primeiro lugar separaremos as incógnitas nun dos membros e a continuación simplificaremos.

Exemplo: $2x+2=x+4$

Pasamos todas as x ao 1º membro e, a seguir, todos os números ao 2º:

$$2x - x + 2 = x - x + 4 \rightarrow x + 2 = 4$$

$$x + 2 - 2 = 4 - 2 \rightarrow x = 2$$

Podemos atopar ecuacións máis complexas, pero a forma de resolvelas é a mesma, atopar unha ecuación equivalente máis sinxela.

Exemplo: resolve a ecuación $4(x-1)-2(x+1)=-1$

1. Eliminamos as parénteses:

$$4 \cdot x + 4 \cdot (-1) - 2 \cdot x - 2 \cdot 1 = -1 \rightarrow 4x - 4 - 2x - 2 = -1$$

2. Simplificamos a expresión:

$$4x - 4 - 2x - 2 = -1 \rightarrow 2x - 6 = -1$$

3. Agrupamos os termos en x nun dos membros e os números noutro: $2x - 6 + 6 = -1 + 6 \rightarrow 2x = 5$

4. Dividimos entre o coeficiente de x :

$$\frac{2x}{2} = \frac{5}{2} \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

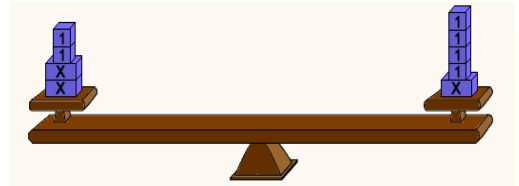


Figura 1: $2x+2=x+4$

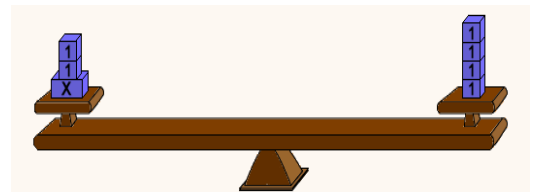


Figura 2: $x+2=4$

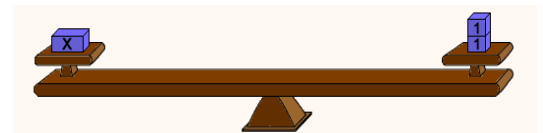


Figura 3: $x=2$

Se a ecuación contén denominadores, estes elimínanse multiplicando polo mínimo común múltiplo (*mcm*) dos denominadores.

Exemplo: resolve a ecuación $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{4} = \frac{-1}{8}$

Como o $mcm(2,4,8)=8$, multiplicamos ambos os membros da ecuación por 8 e simplificamos.

$$8 \cdot \frac{x-1}{2} - 8 \cdot \frac{x+1}{4} = -8 \cdot \frac{1}{8} \rightarrow 4 \cdot (x-1) - 2 \cdot (x+1) = -1$$

Unha vez eliminamos os denominadores, procedemos como nos exemplos anteriores.

EXERCICIOS**Exercicio 4**

Resolve as seguintes ecuacións:

a) $3x+1=10$

b) $5(x-1)-3(x-3)=6x$

c) $\frac{x-2}{5}+\frac{x}{6}-1=\frac{x+2}{10}$

2.1.2 Resolución gráfica

Se representamos unha ecuación de 1º grao mediante unha ferramenta tecnolóxica, por exemplo GeoGebra, obteremos unha recta vertical (paralela ao eixe Y). A solución da dita ecuación é o punto de corte da recta co eixe X.

Exemplo: na figura 4 a solución é $x=2$.

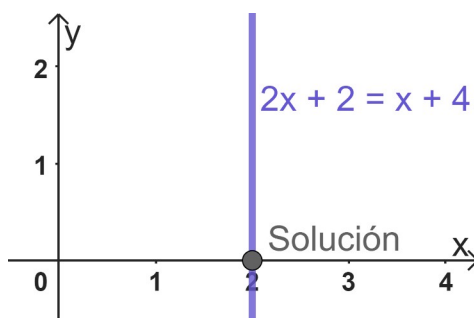


Figura 4: $2x+2=x+4$ gráficamente

2.2 Resolución de problemas

Para resolver problemas mediante ecuacións débense seguir os pasos seguintes:

1. **Identificar as incógnitas:** baseándonos no que pregunta o problema, decidimos cal é a incógnita.
2. **Formulación:** consiste en traducir o enunciado escrito a linguaxe alxébrica, mediante unha ecuación.
3. **Resolución da ecuación.**
4. **Discusión:** comprobamos que a solución obtida ten sentido no contexto do problema. Non ten por que escribirse, abonda con pensalo.

Exemplo: a cantidade de cartos que un rapaz leva no peto é tal que, se gasta a terceira parte máis a súa sétima parte, aínda lle quedarían 2,5 euros máis a metade do que levaba. Que cantidade de cartos levaba no peto?

1. *Identificamos a incógnita:*

Sexa x os cartos que levaba no peto.

2. *Formulación:*

Diñeiro inicial - gastos = cantidade sobrante

- Diñeiro inicial: x

- Gastos: A terceira parte dos cartos $\rightarrow \frac{x}{3}$

A sétima parte dos cartos $\rightarrow \frac{x}{7}$

- Cantidade sobrante: 2,5 €
A metade dos cartos $\rightarrow \frac{x}{2}$

$$\text{Ecuación: } x - \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{7} \right) = 2,5 + \frac{x}{2}$$

3. *Resolución:*

Multiplico polo $mcm(2,3,7)=2 \cdot 3 \cdot 7=42$:

$$42 \cdot x - 42 \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{7} \right) = 42 \cdot 2,5 + 42 \cdot \frac{x}{2}$$

Simplifico:

$$42x - 14x - 6x = 105 + 21x \rightarrow 22x = 105 + 21x$$

Paso todas as x ao 1º membro:

$$22x - 21x = 105 + 21x - 21x \rightarrow x = 105$$

4. *Discusión:* a solución ten sentido co contexto do problema, logo a cantidade de cartos que levaba era 105 €.



EXERCICIOS

Exercicio 5

As idades de dous irmáns son números consecutivos e a suma das súas idades é 25. Que idades teñen?

SOLUCIÓNS

Exercicio 1

Indica os elementos das seguintes expresións alxébricas e clasifícaos en función do número de termos. Despois indica os seus graos e os respectivos valores numéricos para $x=1$ e $y=-1$.

Expresións alxébricas	Clasificación	Grao	Valor numérico
$-x^2+2y-5$	Polinomio	2	$-1^2+2\cdot(-1)-5=-8$
$3x^2y^3$	Monomio	$2+3=5$	$3\cdot 1^2\cdot(-1)^3=-3$
x^3-1	Binomio	3	$1^3-1=0$

Exercicio 2

Relaciona cada expresión alxébrica co enunciado que corresponda, sabendo que a idade de Xoán é x :

- | | |
|--|-------------------|
| 1) A idade de Xoán hai 5 anos | A) $2x$ |
| 2) A idade de Pedro se é 10 anos máis vello que Xoán | B) $x+10$ |
| 3) O dobre da idade de Xoán | C) $x\cdot(x+10)$ |
| 4) Un cuarto da idade de Xoán | D) $x-5$ |
| 5) O produto da idade de Xoán e de Pedro | E) $\frac{x}{4}$ |

1)→D) 2)→B) 3)→A) 4)→E) 5)→C)

Exercicio 3

Realiza as seguintes operacións:

- a) $(5x^2y)\cdot(2xy)=10x^3y^2$
- b) $(16y^2z):(4y^2z)=4y^0z^0=4$
- c) $6b+4a-3b-a+3a-5b=-2b+6a$
- d) $2x^3\cdot(4x+1)=8x^4+2x^3$
- e) $(5z^2-y)\cdot(y^2-3z)=5y^2z^2-15z^3-y^3+3yz$



Exercicio 4

Resolve as seguintes ecuacións:

$$\text{a) } 3x+1=10 \rightarrow 3x+1-1=10-1 \rightarrow 3x=9 \rightarrow \frac{3x}{3}=\frac{9}{3} \rightarrow x=3$$

$$\text{b) } 5(x-1)-3(x-3)=6x \rightarrow 5x-5-3x+9=6x \rightarrow 2x+4=6x \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x+4-2x=6x-2x \rightarrow 4=4x \rightarrow \frac{4}{4}=\frac{4x}{4} \rightarrow x=1$$

$$\text{c) } \frac{x-2}{5}+\frac{x}{6}-1=\frac{x+2}{10}$$

$$\text{mcm}(5,6,10)=5 \cdot 2 \cdot 3=30$$

$$30 \cdot \frac{x-2}{5}+30 \cdot \frac{x}{6}-30 \cdot 1=30 \cdot \frac{x+2}{10} \rightarrow 6x-12+5x-30=3x+6 \rightarrow 11x-42=3x+6$$

$$\rightarrow 11x-42+42=3x+6+42 \rightarrow 11x-3x=3x+48-3x \rightarrow 8x=48 \rightarrow 8 \frac{x}{8}=\frac{48}{8} \rightarrow x=6$$

Exercicio 5

As idades de dous irmáns son números consecutivos e a suma das súas idades é 25. Que idades teñen?

x : a idade do menor; $x+1$: a idade do maior

$$\text{Ecuación: } x+(x+1)=25$$

$$x+(x+1)=25 \rightarrow 2x+1=25 \rightarrow 2x+1-1=25-1 \rightarrow 2x=24 \rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{24}{2} \rightarrow x=12$$

Solución: as idades dos irmáns son 12 e 13 anos.