XUNTA DE GALICIA | CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN, CIENCIA, UNIVERSIDADES E FORMACIÓN PROFESIONAL

NÚMEROS


"Números aburridos" (Benjamin Abanto Orihuela, CC-BY-SA-4.0)

Ámbito científico-tecnolóxico

Módulo 3

ÍNDICE

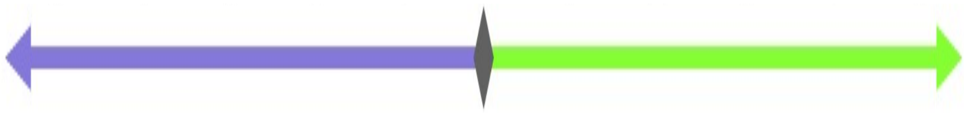
NÚMEROS

1. OS NÚMEROS ENTEIROS

O conxunto dos números enteiros ($\mathbb{Z}$) está formado polos números naturais ($\mathbb{N}$) ou positivos (+1, +2, +3 ...), os negativos (...-3, -2, -1) e o número 0.

$$\mathbb{Z}=\{\ldots-3,-2,-1,0,1,2,3\ldots\}$$

Na recta numérica o 0 é o centro. Á súa dereita sitúanse os enteiros positivos en orde ascendente (1, 2, 3...) e á súa esquerda os negativos en orde descendente (-1, -2, -3...)



Recta numérica

Canto máis á esquerda se sitúen na recta numérica, menores son, e canto máis á dereita, maiores. Exemplo: -1>-2 (-1 é maior que -2), 1<2 (1 é menor que 2).

O valor absoluto dun enteiro é a distancia ao cero (na recta numérica). Escríbese entre dúas barras | | e resulta o mesmo número sen o seu signo. Exemplo: |+6|=6 e |-6|=6.

Dous enteiros co mesmo valor absoluto pero signo distinto son opostos. Exemplo: 1 e -1.

1.1 Xerarquía de operacións

Cando nunha expresión interveñen varias operacións, débese operar na seguinte orde:

1. Parénteses na orde en que están escritos e, se están uns dentro dos outros, dos máis interiores aos máis exteriores.
2. Multiplicacións e divisións (se van seguidas, ten preferencia a da esquerda).
3. Sumas e restas.

Exemplo: $(10-5)\cdot 2+[5-(-2+4)+3]=5\cdot 2+[5-2+3]=5\cdot 2+6=10+6=16$

1.2 Operacións con números enteiros

Suma

- Se teñen o mesmo signo, súmanse os seus valores absolutos e mantense o signo. Exemplos: $(+5)+(+7)=+12$; $(-5)+(-10)=-(5+10)=-15$
- Se teñen distinto signo, réstase o valor absoluto do maior menos o do menor e tómase o signo do maior (en valor absoluto). Exemplo: $(+5)+(-7)=-(7-5)=-2$

Resta

Restarlle un número a outro é o mesmo que sumarlle o seu oposto. Exemplo: $(+5)-(+8)=(+5)+(-8)=-(8-5)=-3$

Multiplicación e división

Multiplicamos os signos de acordo coa táboa da dereita e multiplicamos (ou dividimos) os valores absolutos dos números.

Exemplo: $2\cdot(-7)=-(2\cdot7)=-14$.

Multiplicación	+	-
+	+	-
-	-	+

EXERCICIOS

Exercicio 1

Realiza as seguintes sumas e restas de números enteiros:

a) $(+5)+(-3)+(+4)$ b) $(+1)-(+12)-(+1)$ c) $(-12)+(-1)-(-4)$

Exercicio 2

Resolve as seguintes multiplicacións e divisións de números enteiros:

a) $(+5)\cdot(-7)$ b) $(+4)\cdot(+12)$ c) $(-5):(-1)$ d) $(-14):(+7)$

Exercicio 3

Resolve as seguintes operacións combinadas de números enteiros:

a) $(-3)\cdot(+4)+(-1)$ b) $(+7):(-7)-(-3)$ c) $(-100)\cdot(-2)+(+5)$

Exercicio 4

Indica, mediante unha operación con números enteiros, os seguintes casos:

a) Nun rañaceos, estou na planta 27 e baixo catorce pisos para logo subir nove.

b) Estou na planta -2 dun edificio e subo dez pisos para logo baixar tres.

2. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO E MÁXIMO COMÚN DIVISOR

2.1 Descomposición factorial

Para descompoñer un número en factores primos realízanse divisións sucesivas do número e dos cocientes obtidos por números primos (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37...), escollidos do menor ao maior. Exemplo: $10=2\cdot5$

10	2
5	5
1	

2.2 Mínimo común múltiplo

O mínimo común múltiplo (mcm) dun conxunto de números é o menor múltiplo común de todos eles.

Para calculalo tómanse os factores comúns e non comúns de maior expoñente ou aplícase directamente a definición.

Exemplo: calcula o mcm de 12 e 14.

Pola definición

Múltiplos de 12:
12, 24, 36, 48, 60, 72, **84**, 96...

Múltiplos de 14:
14, 28, 42, 56, 70, **84**, 98, 112...

O menor múltiplo común é 84

Por descomposición

12	2	14	2
6	2	7	7
3	3	1	
1			

$12=2^2\cdot3$ $\quad$ $14=2\cdot7$

$mcm(12,14)=2^2\cdot3\cdot7=84$

2.3 Máximo común divisor

O máximo común divisor (mcd) dun conxunto de números é o maior número enteiro que divide todos os números do conxunto. Para calculalo tómanse unicamente os factores comúns a todos os números elevados ao menor expoñente.

Exemplo: acha o mcd de 12 e 14.

Pola definición

Divisores de 12:
$D(12)=\{1,2,3,4,6,12\}$

Divisores de 14:
$D(14)=\{1,2,7,14\}$

O máximo divisor común é 2

Por descomposición

$12=2^2\cdot3$

$14=2\cdot7$

$mcd(12,14)=2$

EXERCICIOS

Exercicio 5

Calcula o mínimo común múltiplo e o máximo común divisor de 15, 20 e 30.

Exercicio 6

Ana vai ao teatro cada 6 días e Víctor cada 9. Cada cantos días coincidirán? Se a última vez que se encontraron foi o 10 de setembro, que día se volverán atopar?

3. POTENCIAS E RAÍCES

3.1 Potencias

A potencia a^x dun número enteiro a é outro enteiro b cuxo valor se obtén multiplicando a por si mesmo tantas veces como indique o expoñente x.

Na calculadora usamos a tecla ^ ou x^y. Exemplo: 3^2 é 3^2 ou $3\,x^y\,2$

Propiedades	*Exemplos*
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^2 = 2^5$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$2^5 : 2^2 = 2^3$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(2^3)^2 = 2^6$
$a^0 = 1$	$2^0 = 1$

3.2 Notación científica

Para escribir un número en notación científica tomamos as cifras distintas de 0 e as escribimos como un decimal cuxa parte enteira estea entre 1 e 9, multiplicado por unha potencia de 10, 10^x. O expoñente x indica cantos lugares se despraza a coma con respecto á notación decimal; é positivo cando se despraza á dereita e negativo cando o fai á esquerda. Exemplos: $1\overbrace{5700}^{4\,lugares} = 1{,}57 \cdot 10^4$ e $0{,}\overbrace{002}^{3\,lugares}5 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$

Na calculadora 10^x introdúcese coa tecla EXP ou 10^x . Exemplo: $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ é 2.5EXP-3.

3.3 Raíces

A raíz n-ésima $n>1$ dun número a, $\sqrt[n]{a}$, é outro número b que verifica que $b^n = a$. Unha raíz pódese escribir como unha potencia cuxo expoñente é $1/n$. Exemplo: $\sqrt{4} = 2 \Leftrightarrow 2^2 = 4$ e $\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}}$

Se $n=2$ non é preciso escribilo e se n é par e a negativo a raíz non é un número real.

Na calculadora utilízase a tecla √ ou SHIFT ^. Exemplo: $\sqrt[3]{27}$ escríbese 3SHIFT ^27.

EXERCICIOS

Exercicio 7

Calcula o valor das seguintes potencias: a) $(-5)^4$, b) 3^0, c) 2^{-3}, d) $4^2 \cdot 4^3$

Exercicio 8

Expresa 32000 e 0,0032 en notación científica.

Exercicio 9

Realiza con e sen calculadora as seguintes operacións: a) 4^3; b)$1{,}5 \cdot 10^2 + 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ c)$\sqrt{121}$

4. FRACCIÓNS

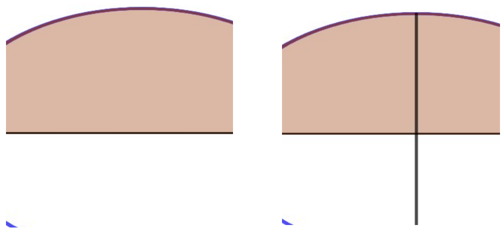
Unha fracción é unha expresión da forma $\frac{m}{n}$, onde m e n son números enteiros $(m, n \in Z)$. Lese como m partido por n, m recibe o nome de numerador e n de denominador.

Para introducir fraccións na calculadora pulsamos a tecla $a\frac{b}{c}$. Se despois de introducir a fracción pulsamos $SHIFT\, a\frac{b}{c}$, daranos a fracción simplificada. Exemplo: $\frac{2}{5}$ escríbese 2 $a\frac{b}{c}$ 5.

4.1 Fraccións equivalentes

Dúas fraccións $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ son equivalentes se representan a mesma cantidade e verifican que $a \cdot d = b \cdot c$. Graficamente representan a mesma superficie.

Podemos obter fraccións equivalentes multiplicando (por ampliación) ou dividindo (por simplificación) o numerador e o denominador polo mesmo número.



1/2 *2/4*

Chamamos *fracción irredutible* aquela que non se pode simplificar máis. Exemplo: $\frac{1}{2}$.

4.2 Operacións con fraccións

Suma e resta

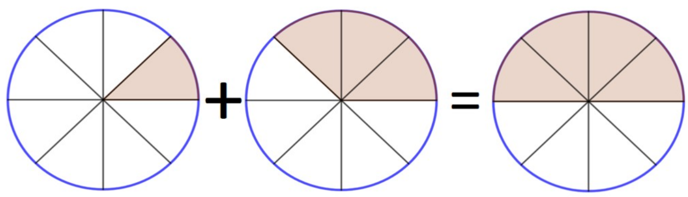
Para sumar (ou restar) fraccións co mesmo denominador súmanse (ou réstanse) os numeradores e o denominador mantense.

Para sumar (ou restar) fraccións con distinto denominador, redúcese a común denominador, buscando o mcm dos denominadores.

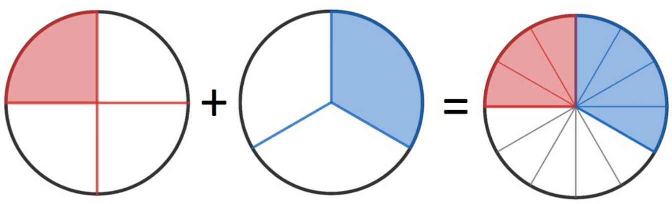
Exemplo:

a. $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3+1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{4+3}{12}=\frac{7}{12}$



1/8+3/8=4/8



1/4+1/3=7/12

Multiplicación

Para multiplicar dúas fraccións $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ multiplícase o numerador da 1ª polo numerador da 2ª e o denominador da 1ª polo denominador da 2ª, $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$. Exemplo: $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 2}=\frac{9}{8}$

Inversa dunha fracción

A inversa dunha fracción $\frac{a}{b}$ é outra fracción $\frac{b}{a}$ que ten por numerador o seu denominador e como denominador o seu numerador. Exemplo: a inversa de $\frac{2}{3}$ é $\frac{3}{2}$.

División

Para dividir $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$, multiplícase $\frac{a}{b}$ pola inversa de $\frac{c}{d}$. Exemplo: $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{9}$

Potencias

A potencia dunha fracción a/b é outra fracción cuxo valor se obtén elevando o numerador e o denominador ao expoñente. Exemplo: $\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{4^2}{5^2}=\frac{4\cdot 4}{5\cdot 5}=\frac{16}{25}$

4.3 Números decimais

Unha fracción representa un único número decimal que se obtén ao dividir o numerador entre o denominador. As fraccións equivalentes representan o mesmo número decimal. Exemplo: $1/2=2/4=0{,}5$.

Un decimal obtido dunha fracción pode ser **exacto**, se ten un número finito de decimais, ou **periódico**, se ten infinitos que se repiten. Ademais, diremos que un decimal é **periódico puro** se todos os seus decimais son periódicos, e **mixto** se ten algún non periódico. Exemplo: 0,2 é exacto; $0{,}\hat{1}=0{,}111\ldots$ é periódico puro e $0{,}23\hat{4}=0{,}23444\ldots$ é periódico mixto.

4.4 Paso de decimal a fracción

De igual forma, todo número decimal finito ou periódico pódese expresar como fracción.

- **Decimal finito.** Para pasar $1{,}5$ a fracción, "quitámoslle" a coma e obtemos 15. Como $15=1{,}5\cdot 10$, despexando quédanos que $1{,}5=15/10=3/2$.

- **Periódico puro.** Para pasar $N=1'\widehat{21}=1'2121\ldots$ a fracción queremos "eliminar" a parte decimal, para iso restámoslle outro número cuxa parte decimal coincida. Consideramos 100·N: $\begin{cases}100N=121{,}212121\ldots\\ N=1{,}212121\ldots\end{cases}$ restando $99N=120\rightarrow N=\frac{120}{99}=\frac{40}{33}$

- **Periódico mixto.** Multiplicamos por unha potencia de 10 para conseguir un periódico puro e repetimos o proceso anterior.

4.5 Estratexias para a resolución de problemas numéricos

Á hora de resolver un problema é recomendable seguir unha serie de pasos:

1. Ler detidamente o enunciado e anotar os datos máis importantes.
2. Decidir a estratexia de resolución e levala a cabo. Poderiamos seguir os seguintes pasos (aínda que non sempre serán necesarios todos):
    a) Elaborar esquemas ou diagramas para visualizar mellor os datos.
    b) Poñer exemplos que axuden a entender as afirmacións do enunciado.
    c) Elixir a incógnita axeitada.
    d) Traducir o enunciado utilizando as incógnitas e resolver.
3. Reflexionar sobre os resultados obtidos e redactar a solución.

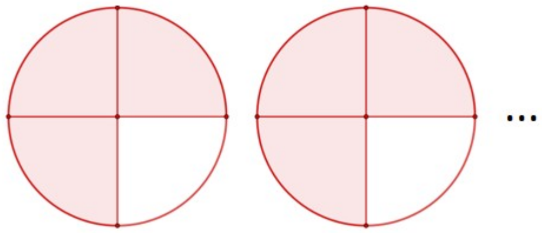
Exemplo: cantos litros de auga temos se dispoñemos de 50 botellas de 3 cuartos de litro?

Datos: 50 botellas, $3/4$ de l por botella.

Incógnita: x = número total de litros.

Tradución: $x=50\cdot3/4=150/4=37{,}5$

Reflexión: a cantidade de litros é inferior ao de botellas e superior á metade do número de botellas. Ten sentido, xa que as botellas conteñen menos dun litro pero máis de medio.



3/4

EXERCICIOS

Exercicio 10

Escribe dúas fraccións equivalentes por simplificación e dúas por amplificación. Indica tamén a fracción irredutible e utiliza a calculadora para comprobar a solución:

a) $26/52$

b) $30/70$

Exercicio 11

Realiza as seguintes operacións e dános o resultado en fracción irredutible:

a) $8/5-2/3+12/15$

b) $7/4\cdot 6/8:10/12$

SOLUCIÓNS

Exercicio 1

Realiza as seguintes sumas e restas de números enteiros:

a) $2+4=6$ b) $-11-1=-12$ c) $-13+4=-9$

Exercicio 2

Resolve as seguintes multiplicacións e divisións de números enteiros:

a) -35 b) 48 c) 5 d) -2

Exercicio 3

Resolve as seguintes operacións combinadas de números enteiros:

a) $-12+(-1)=-13$ b) $-1+3=2$ c) $200+5=205$

Exercicio 4

Indica, mediante unha operación con números enteiros, os seguintes casos:

a) $27-14+9=22$ b) $-2+10-3=5$

Exercicio 5

$15=3\cdot5$ $20=2^2\cdot5$ $30=2\cdot3\cdot5$

$mcm(15,20,30)=2^2\cdot3\cdot5=60$ $mcd(15,20,30)=5$

Exercicio 6

$6=2\cdot3$ e $9=3^2$ entón $mcm(6,9)=2\cdot3^2=18$

Coincidirán cada 18 días. Volverán atoparse o 28 de setembro.

Exercicio 7

Calcula o valor das seguintes potencias, aplicando as propiedades cando sexa posible:

a) 625 b) 1 c) $\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$ d) $4^{2+3}=4^5=1024$

Exercicio 8

$32000 = 3{,}2 \cdot 10^4$

$0{,}0032 = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$

Exercicio 9

a) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

(4^3)

b) 150+0,025=150,025

(1,5EXP2+2,5EXP-2)

c) $\sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11$

Exercicio 10

Escribe dúas fraccións equivalentes por simplificación e dúas por amplificación. Indica tamén a fracción irredutible e utiliza a calculadora para comprobar a solución:

a) $\frac{26}{52} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$ por simplificación

$\frac{26}{52} = \frac{52}{104} = \frac{78}{156}$ por ampliación

$\frac{1}{2}$ é irredutible

b) $\frac{30}{70} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$ por simplificación

$\frac{30}{70} = \frac{60}{140} = \frac{90}{210}$ por ampliación

$\frac{3}{7}$ é irredutible

Exercicio 11

Realiza as seguintes operacións e dános o resultado en fracción irredutible:

a) $\frac{8}{5} - \frac{2}{3} + \frac{12}{15} = \frac{24}{15} - \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{24 - 10 + 12}{15} = \frac{26}{15}$

b) $\frac{7}{4} \cdot \frac{6}{8} : \frac{10}{12} = \frac{42}{48} \cdot \frac{12}{10} = \frac{504}{480} = \frac{21}{20}$