# PROBABILIDAD

# 4º E.S.O. Académicas

## EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Un **experimento aleatorio** es aquel cuyo resultado depende del azar y no se puede predecir con anterioridad.

Lanzar un dado y mirar la cara superior

Se llama **espacio muestral** al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Se representa con Ω.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Se llama **suceso** a cualquier subconjunto de Ω.

A = {salga par} = {2, 4, 6}

B = {salga primo} = {1, 2, 3, 5}

## EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Se llama **suceso elemental** al formado por un solo resultado.

Se llama **suceso compuesto** al formado por más de un resultado.

Se llama **suceso seguro** al conjunto de Ω.

Se llama **suceso imposible** al conjunto vacío Ø.

Se llama **suceso contrario** al que sucede cuando no se cumple A. $\overline{A}$

Ejemplo: Se lanza un dado:

Sucesos: {1, 3} , {2, 5, 6} , {1, 4, 5, 6} , …
Sucesos elementales: {1} , {2} , {3} , {4} , {5} , {6}
Suceso seguro: {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Suceso imposible: { } , {salga negativo} , {salga 15}

## OPERACIONES CON SUCESOS

Unión de sucesos: $A \cup B$

$A = \{2, 5, 6\}$ , $B = \{1, 4, 5, 6\}$ $\quad A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

Intersección de sucesos: $A \cap B$

$A = \{2, 5, 6\}$ , $B = \{1, 4, 5, 6\}$ $\quad A \cap B = \{5, 6\}$

Sucesos incompatibles: $A \cap B = \varnothing$

$A = \{1, 2, 6\}$ , $B = \{3, 5\}$ $\quad A \cap B = \varnothing$

# OPERACIONES CON SUCESOS

Suceso complementario: $A'$ o $\overline{A}$

$$A = \{1, 2, 5, 6\} \qquad \overline{A} = \{3, 4\}$$

Dos propiedades muy importantes (Leyes de Morgan):

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

# OPERACIONES CON SUCESOS

Ejemplo:

$\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

$A = \{b, c, d, f, g, h\}$ $\quad B = \{a, b, c, d\}$ $\quad C=\{a, b\}$

Hallar:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, f, g, h\} \qquad \overline{A} \cup \overline{B} = \{a, e, f, g, h, i\}$$

$$A \cap B = \{b, c, d\} \qquad \overline{A} \cap \overline{B} = \{e, i\}$$

$$\overline{A \cup B} = \{e, i\} \qquad B \cup C = \{a, b, c, d\} = B$$

$$\overline{A \cap B} = \{a, e, f, g, h, i\} \qquad B \cap C = \{a, b\} = C$$

# LEY DE LAPLACE

Si $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ y $P[x_1] = P[x_2] = \ldots = P[x_k]$ entonces:

$$P[S] = \frac{\text{número de elementos de S}}{n} = \frac{\text{número de "casos favorables" a S}}{\text{número de "casos posibles"}}$$

Ejemplo: En una baraja española de 40 cartas se extrae una carta. Hallar:

a) Probabilidad de que salga un as.

b) Probabilidad de que la carta sea de oros.

a) $P[\{\text{as}\}] = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

b) $P[\{\text{oros}\}] = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

# PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

1) Para cualquier suceso S, $\quad 0 \le P[S] \le 1$

2) $P[\varnothing] = 0 \qquad P[\Omega] = 1$

3) $P[\overline{A}] = 1 - P[A]$

4) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

# LEY DE LAPLACE

**Ejemplo**: En una bolsa hay 7 bolas rojas, 15 bolas negras, 4 bolas amarillas y 12 verdes, todas del mismo tamaño. Una persona extrae una bola al azar. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Probabilidad de que la bola sea roja.
b) Probabilidad de que la bola sea negra.
c) Probabilidad de que la bola sea amarilla.
d) Probabilidad de que la bola sea verde.

a) $P\left[\{\text{bola roja}\}\right]=\frac{7}{38}$

c) $P\left[\{\text{bola amarilla}\}\right]=\frac{4}{38}=\frac{2}{19}$

b) $P\left[\{\text{bola negra}\}\right]=\frac{15}{38}$

d) $P\left[\{\text{bola verde}\}\right]=\frac{12}{38}=\frac{6}{19}$

# LEY DE LAPLACE. TABLAS DE CONTINGENCIA.

**Ejemplo**: En unos juegos deportivos participan 225 chicos y 275 chicas de una ciudad. En las competiciones de ciclismo se han inscrito 125 chicos y en las de atletismo, 25. Tanto en las de baloncesto como en las de atletismo se han registrado 75 chicas. Si se elige un dorsal al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a una ciclista?, ¿y a un jugador de baloncesto?

| | Chicos | Chicas | |
|---|---|---|---|
| C | 125 | 125 | 250 |
| A | 25 | 75 | 100 |
| B | 75 | 75 | 150 |
| | 225 | 275 | 500 |

$P\left[\{\text{ser una chica ciclista}\}\right]=\frac{125}{500}=0'25$

$P\left[\{\text{ser un jug. baloncesto}\}\right]=\frac{75}{500}=0'15$

# CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Ejemplo: En una baraja de cartas española de 40 cartas se extrae una carta. Hallar:

a) Probabilidad de que salga de bastos.
b) Probabilidad de que sea una figura.
c) Probabilidad de que no sea figura o sea de oros.

a) $P[B]=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}=0,25$

b) $P[F]=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}=0,3$

c) $P\left[\overline{F}\cup O\right]=P\left[\overline{F}\right]+P[O]-P\left[\overline{F}\cap O\right]=\frac{28}{40}+\frac{10}{40}-\frac{7}{40}=\frac{31}{40}=0,775$

# CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Ejemplo: En una baraja de cartas española de 40 cartas se extraen dos cartas. Hallar:

a) Probabilidad de que sean las dos de bastos.
b) Probabilidad de que una sea de oros y la otra de copas.
c) Probabilidad de que no haya ninguna figura.

$$\text{Casos posibles}: V_{40,2}=40\cdot 39=1560$$

a) $V_{10,2}=10\cdot 9=90$ $\qquad P[\text{dos de bastos}]=\frac{90}{1560}$

b) $$\left.\begin{array}{l}\underbrace{10}_{1^a\text{ oros}}\cdot\underbrace{10}_{2^a\text{ copas}}\rightarrow 100\\ \underbrace{10}_{1^a\text{ copas}}\cdot\underbrace{10}_{2^a\text{ oros}}\rightarrow 100\end{array}\right\}\rightarrow P[\text{una sea de oros y otra de copas}]=\frac{200}{1560}=0,1282$$

c) $V_{28,2}=28\cdot 27=756$ $\qquad P[\text{no haya figura}]=\frac{756}{1560}=0,4846$

# CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Ejemplo: En una urna hay 7 bolas rojas, 8 bolas verdes y 10 bolas negras. Se extraen dos bolas de la urna. Hallar:

a) Probabilidad de que sean las dos rojas.

b) Probabilidad de que una sea una roja y otra verde.

$$\text{Casos posibles}: V_{25,2} = 25 \cdot 24 = 600$$

$$\text{a) } V_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42 \qquad P[\text{dos rojas}] = \frac{42}{600} = 0,07$$

$$\text{b) } \left.\begin{array}{l} \underbrace{7}_{1^{a}\text{ roja}} \cdot \underbrace{8}_{2^{a}\text{ verde}} \rightarrow 56 \\ \underbrace{8}_{1^{a}\text{ verde}} \cdot \underbrace{7}_{2^{a}\text{ roja}} \rightarrow 56 \end{array}\right\} \rightarrow P[\text{una sea roja y otra verde}] = \frac{112}{600} \approx 0,187$$

# CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Ejemplo: En una urna hay 7 bolas rojas, 8 bolas verdes y 10 bolas negras. Se extraen dos bolas de la urna. Hallar:

c) Probabilidad de que sean de distinto color.

d) Probabilidad de que haya una verde.

$$\text{Casos posibles}: V_{25,2} = 600$$

$$\text{c) } \left.\begin{array}{l} \underbrace{7}_{1^{a}\text{ roja}} \cdot \underbrace{6}_{2^{a}\text{ roja}} \rightarrow 42 \\ \underbrace{8}_{1^{a}\text{ verde}} \cdot \underbrace{7}_{2^{a}\text{ verde}} \rightarrow 56 \\ \underbrace{10}_{1^{a}\text{ negra}} \cdot \underbrace{9}_{2^{a}\text{ negra}} \rightarrow 90 \end{array}\right\} \rightarrow P[\text{sean de distinto color}] = 1 - \frac{188}{600} \approx 0,687$$

$$\text{d) } \left.\begin{array}{l} \underbrace{8}_{1^{a}\text{ verde}} \cdot \underbrace{17}_{2^{a}\text{ no verde}} \rightarrow 136 \\ \underbrace{17}_{1^{a}\text{ no verde}} \cdot \underbrace{8}_{2^{a}\text{ verde}} \rightarrow 136 \\ \underbrace{8}_{1^{a}\text{ verde}} \cdot \underbrace{7}_{2^{a}\text{ verde}} \rightarrow 56 \end{array}\right\} \rightarrow P[\text{haya una verde}] = \frac{328}{600} \approx 0,547$$

# CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Ejemplo: En una urna hay 5 bolas negras, 8 bolas azules y 7 rojas. Se extrae una bola de la urna.

a) Probabilidad de que salga roja.

b) Probabilidad de que sea azul o negra.

c) Probabilidad de que no sea azul.

d) Probabilidad de que no sea roja o sea negra.

$$P[N] = \frac{5}{20} \qquad P[A] = \frac{8}{20} \qquad P[R] = \frac{7}{20}$$

$$\text{a) } P[R] = \frac{7}{20}$$

$$\text{b) } P[A \cup N] = P[A] + P[N] - P[A \cap N] = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} - 0 = \frac{13}{20}$$

$$\text{c) } P\left[\overline{A}\right] = 1 - P[A] = 1 - \frac{8}{20} = \frac{12}{20}$$

$$\text{d) } P\left[\overline{R} \cup N\right] = P\left[\overline{R}\right] + P[N] - P\left[\overline{R} \cap N\right] = \frac{13}{20} + \frac{5}{20} - \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$$

# CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Se lanzan dos dados y se miran las caras superiores. Hallar la probabilidad de:

a) Halla dos números pares

b) Halla uno impar y otro par

c) Sumen 7.

d) Su producto sea menor que 8.

$$\text{Casos posibles}: VR_{6,2} = 6^2 = 36$$

$$\text{a) } VR_{3,2} = 3^2 = 9 \qquad P[\text{dos pares}] = \frac{9}{36} = 0,25$$

$$\text{b) } \left.\begin{array}{l} \underbrace{3}_{1^{o}\text{ par}} \cdot \underbrace{3}_{2^{o}\text{ impar}} \rightarrow 9 \\ \underbrace{3}_{1^{o}\text{ impar}} \cdot \underbrace{3}_{2^{o}\text{ par}} \rightarrow 9 \end{array}\right\} \rightarrow P[\text{uno sea par y otro impar}] = \frac{18}{36} = 0,5$$

# CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Se lanzan dos dados y se miran las caras superiores. Hallar la probabilidad de:

a) Halla dos números pares
b) Halla uno impar y otro par
c) Sumen 7.
d) Su producto sea menor que 8.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

$\text{Casos posibles}: 6 \cdot 6 = 36$

c) $P[\text{sumen } 7] = \frac{6}{36} \approx 0{,}167$

# CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Se lanzan dos dados y se miran las caras superiores. Hallar la probabilidad de:

a) Halla dos números pares
b) Halla uno impar y otro par
c) Sumen 7.
d) Su producto sea menor que 8.

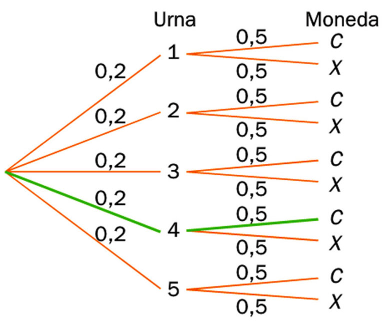
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |

$\text{Casos posibles}: 6 \cdot 6 = 36$

d) $P[\text{Producto menor que } 8] = \frac{14}{36} \approx 0{,}389$

# EXPERIMENTOS COMPUESTOS

Se realiza un experimento que consiste en la extracción de una bola de una urna, donde hay 5 bolas numeradas del 1 al 5, y el lanzamiento de una moneda. Halla la probabilidad de extraer la bola número 4 y obtener cara en la moneda.




Forma 1:
$\Omega = \{1C, 1X, 2C, 2X, 3C, 3X, 4C, 4X, 5C, 5X\}$

$P(4C) = \frac{1}{10} = 0'1$

Forma 2: Casos posibles = 5 · 2 = 10

$P(4C) = \frac{1}{10} = 0'1$

Forma 3: $P(4) = \frac{1}{5} = 0'2 \quad P(C) = \frac{1}{2} = 0'5$

$P(4 \cap C) = 0'2 \cdot 0'5 = 0'1$

# EXPERIMENTOS COMPUESTOS

Un experimento formado por varios experimentos simples se llama **experimento compuesto**.

Se arrojan cinco dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de obtener en todos ellos un número par?

$A_i = \{\text{salga par al lanzar el dado i}\} \qquad P(A_i) = \frac{1}{2}$

$A = \{\text{salga par en todos los dados}\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

# PROBABILIDAD CONDICIONADA

Dos sucesos son **independientes** si la realización de uno no condiciona la del otro. Si los sucesos A y B son independientes, se verifica:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

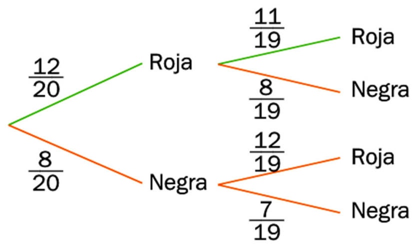
Dos sucesos son **dependientes** si la realización de uno condiciona la del otro. Si los sucesos A y B son dependientes se define la **probabilidad de B condicionada a A**, y se denota por P(B/A), como la probabilidad de que se realice B sabiendo que ya se ha realizado A. Se verifica:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

# PROBABILIDAD CONDICIONADA

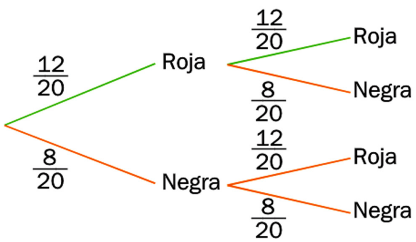
En una urna hay 12 bolas rojas y 8 negras. Se extrae una bola y después otra. Halla la probabilidad de que ambas sean rojas.
<u>Opción 1: Sin devolución</u>.




$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} = 0'347$$

# PROBABILIDAD CONDICIONADA

En una urna hay 12 bolas rojas y 8 negras. Se extrae una bola y después otra. Halla la probabilidad de que ambas sean rojas.
<u>Opción 2: Con devolución</u>.




$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2) = \frac{12}{20} \cdot \frac{12}{19} = 0'36$$

# PROBABILIDAD CONDICIONADA

De una baraja española se extraen dos cartas al azar. Halla la probabilidad de que las dos cartas sean reyes en los siguientes casos

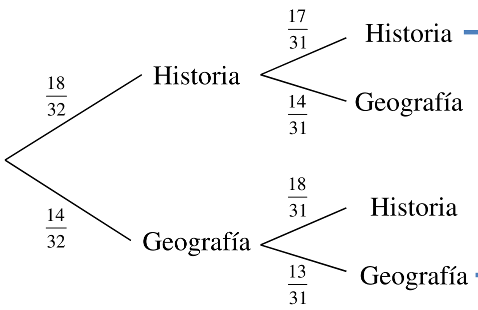
a) Con devolución.
b) Sin devolución.

a) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = 0'01$

b) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = 0'0077$

# PROBABILIDAD TOTAL

En una estantería hay desordenados 18 libros de historia y 14 de geografía. Con los ojos cerrados se escogen dos libros. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos libros sean de la misma materia?




$$P(H_1 \cap H_2) = \frac{18}{32} \cdot \frac{17}{31}$$

$$P(G_1 \cap G_2) = \frac{14}{32} \cdot \frac{13}{31}$$

$$P(\text{Dos libros misma materia}) = \frac{18}{32} \cdot \frac{17}{31} + \frac{14}{32} \cdot \frac{13}{31} = \frac{61}{124} = 0'49$$