

1.- CONJUNTOS DE NÚMEROS. APROXIMACIONESRepaso: números racionales

Se llaman números racionales a todos los números que se pueden expresar en forma de fracción. Recuerda que cualquier fracción da lugar a un número entero, decimal exacto o periódico dividiendo el numerador entre el denominador. Por eso sólo son números racionales los números enteros y los decimales exactos o periódicos. El conjunto de los números racionales se representa con la letra Q.

Repaso: fracción generatriz

Número entero: $a = \frac{a}{1}$, pues $a : 1 = a$

Decimal exacto:

$$ab, \underbrace{cdef}_{4 \text{ cifras}} = \frac{\overbrace{abcdef}^{\text{número sin coma}}}{1 \underbrace{0000}_{4 \text{ ceros}}}$$

Periódico puro: $ab, \overbrace{cde}^{3 \text{ cifras}} = \frac{abcde - ab}{\underbrace{999}_{3 \text{ nueves}}}$

Periódico mixto: $ab, \underbrace{cdef}_{4 \text{ cifras}} \overbrace{ghi}^{3 \text{ cifras}} = \frac{abcdefghi - abcdef}{\underbrace{999}_{3 \text{ nueves}} \underbrace{0000}_{4 \text{ ceros}}}$

Números irracionales. Números reales

Hay números decimales que no son exactos ni periódicos. Estos números no se pueden expresar en forma de fracción. Son decimales que tienen infinitas cifras que no se repiten indefinidamente y se llaman números irracionales.

Los números irracionales más utilizados son:

- El número π . Se obtiene al dividir la longitud de una circunferencia entre su diámetro.

Las primeras cifras de π se pueden obtener con la calculadora científica así:

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{EXP}} \boxed{=}$. El resultado es 3,141592654....

- El número $\sqrt{2}$. Se obtiene al calcular la diagonal de un cuadrado de lado 1.

Las primeras cifras de $\sqrt{2}$ se pueden obtener con la calculadora científica así:

$\boxed{\sqrt{}} \boxed{2} \boxed{=}$. El resultado es 1,414213562.....

Por ejemplo, los folios DIN A4 están fabricados de forma que $\frac{\text{largo}}{\text{ancho}} = \sqrt{2}$

- El número de oro o número áureo. Se obtiene al dividir la diagonal del pentágono regular entre su

lado y se representa con la letra griega ϕ . Su valor es : $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803398....$

Las raíces cuadradas, cúbicas, etc no exactas de números naturales son números irracionales.

Por ejemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc son números irracionales

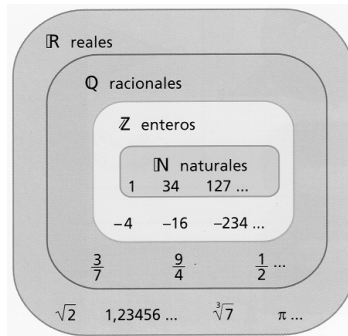
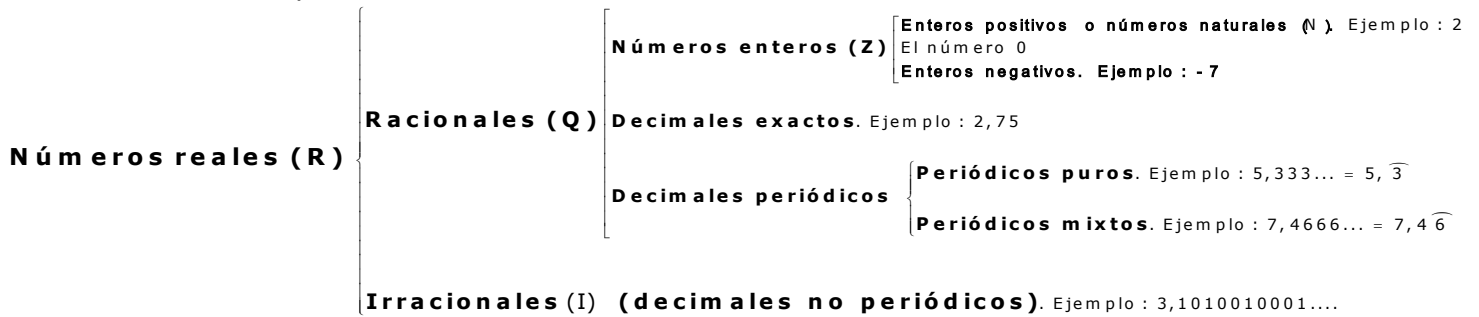
También son números irracionales los resultados que se obtienen al sumar, restar, multiplicar o dividir un número racional con otro irracional.

También son irracionales, por ejemplo, 3,1010010001.... ; 0,3737737773..... pues tienen infinitas cifras no periódicas.

Los números que son racionales o irracionales, o sea todos, se llaman números reales.

El conjunto de los números reales se representa con la letra $\mathbb{R}$

Todos los números que conocemos hasta ahora son:



1) Los números reales contienen a los racionales y a los irracionales.

Se expresa simbólicamente así: $R = Q \cup I$ "Q unión con I"

2) Dentro del conjunto de los números racionales está el de los números enteros,

$$Z = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

y dentro del conjunto de los números enteros está el conjunto de los números naturales

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Se expresa simbólicamente así: $N \subset Z \subset Q$ y se lee "N está contenido en Z y Z está contenido en Q"

Para expresar que un número pertenece a un conjunto determinado usamos el símbolo $\in$, que significa "pertenece a". Por ejemplo, $\pi \in I$.

Repaso: aproximaciones y errores

Una aproximación de un número es otro número que está relativamente próximo a él.

Una aproximación es por defecto si el número aproximado es menor que el valor exacto

Si el número aproximado es mayor que el valor exacto diremos que es la aproximación es por exceso.

La aproximación que se suele utilizar en la mayoría de los casos es el redondeo.

Para redondear un número a una determinada cifra

Si la cifra que le sigue es menor que 5, dejamos igual la cifra por la que estamos redondeando

Si es mayor o igual que 5, le sumamos 1.

Después sustituimos por ceros todas las cifras que le siguen

Para redondear con la calculadora científica, puedes usar la función Fix.

Pulsa MODE varias veces hasta que aparezca Fix, selecciona esta función pulsando 1.

Luego selecciona del 0 al 9 según el número de cifras decimales a las que quieras redondear, por ejemplo, si queremos todos los resultados redondeados con 2 cifras decimales teclearemos 2.

Algunas veces, en lugar del redondeo se usa el truncamiento que consiste en sustituir por ceros las cifras a partir de una dada.

Llamamos error absoluto (E_A) a la diferencia (tomada en valor absoluto) entre el valor exacto o real (V_R) y el valor aproximado (V_A):

$$E_A = |V_R - V_A|$$

El error relativo es el cociente entre el error absoluto y el valor real, tomado en valor absoluto

$$E_R = \frac{E}{|V_R|}$$

ACTIVIDADES

1.- Resuelve las siguientes cuestiones:

- Un número decimal tiene 987 cifras decimales no periódicas. ¿Es un número irracional?
- ¿Qué nombre reciben los números decimales con infinitas cifras no periódicas?
- Di cuáles son los números irracionales que hay desde $\sqrt{1}$ hasta $\sqrt{10}$
- ¿Cuántos números irracionales existen?
- ¿Con qué letra representamos el conjunto de los números reales?
- ¿Y el de los números irracionales?
- El número $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se llama número de oro o número áureo. ¿Es el número áureo un número irracional?
- ¿Qué nombre reciben los números decimales no periódicos con infinitas cifras?
- ¿Es cierto que todo número decimal con infinitas cifras decimales es irracional?

2.- Averigua qué tipo de número es cada uno de los siguientes y después colócalos en el esquema:

$$A = 5,222...$$

$$B = 1,23456...$$

$$C = \frac{-36}{3}$$

$$D = \sqrt{64}$$

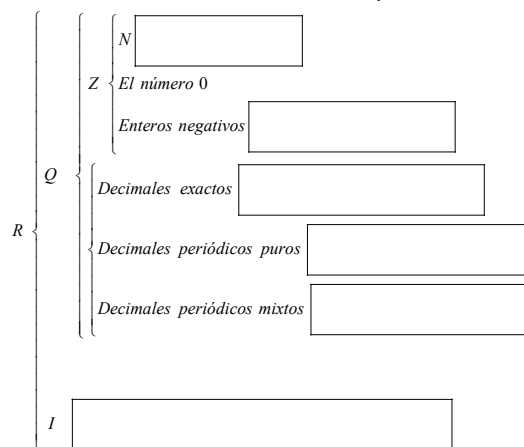
$$E = -2,34545 \dots$$

$$F = \sqrt{8}$$

$$G = -3,650124$$

$$H = 1$$

$$I = \pi$$



3.- Muchos objetos rectangulares de nuestro entorno tienen formas semejantes. Esto es porque sus lados mantienen la proporción áurea, es decir, su lado largo dividido entre ancho es igual al valor de

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618.$$

De los siguientes objetos rectangulares, ¿cuál cumple la proporción áurea?

Calculadora: 16 cm x 8 cm Libreta: 18 cm x 13,5 cm

Tarjeta: 7,93 cm x 4,9 cm Tableta: 24,5 cm x 17,25 cm

Escoge la opción correcta:

A. La tableta. B. La tarjeta. C. La libreta. D. La calculadora.

4.- Alicia es controladora aérea y trabaja en la torre de control de un aeropuerto. Hoy está controlando el vuelo de un avión cuya velocidad es $240\sqrt{5}$ km/h, aunque se decide aproximar esta cantidad por redondeo a las decenas, cometiendo un error relativo.

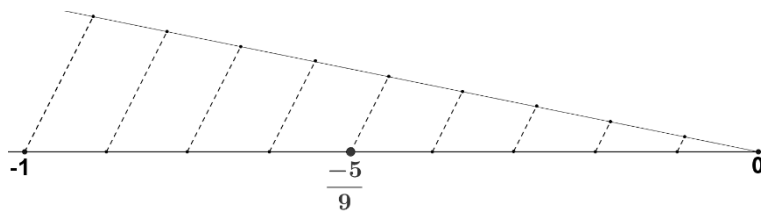
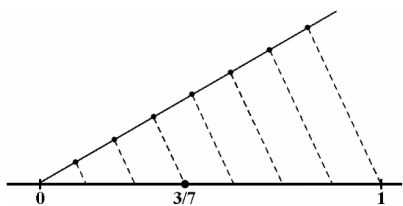
Calcula el porcentaje de error relativo con una precisión de centésimas.

Actividad del libro. 81 (pág. 26)

2.- REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS REALES EN LA RECTA Y ORDENACIÓN

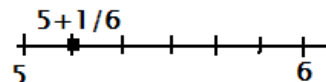
Repaso: representación exacta de números racionales

Las fracciones propias (numerador < denominador) se representan entre 0 y 1 si son positivas y entre 0 y -1 si son negativas



Las fracciones impropias (numerador > denominador) se pueden expresar en forma mixta y luego representarlas.

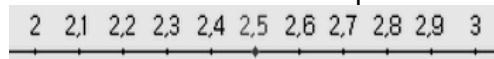
Ejemplo: $\frac{31}{6}$ $\frac{31}{1} \frac{6}{5} \Rightarrow 31 = 6.5 + 1 \Rightarrow \frac{31}{6} = \frac{6.5}{6} + \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{31}{6} = 5 + \frac{1}{6}$



Representación de números decimales:

Si tienen sólo una cifra se representan entre los dos enteros consecutivos entre los que se encuentre

Ejemplo, para los números decimales del segmento [2, 3]



Si tienen dos cifras se representan entre los dos decimales de una cifra correspondientes entre los que se encuentre

Ejemplo, para los números decimales del segmento [1,4 ; 1,5]

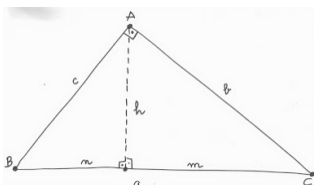


etc

Representación exacta de raíces cuadradas

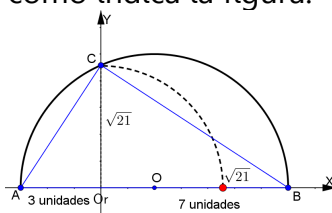
Algunas raíces cuadradas se pueden representar de forma exacta en la recta numérica usando métodos geométricos:

- Usando el teorema de la altura.



Teorema de la altura: $h^2 = mn$

Ejemplo: Vamos a representar $\sqrt{21}$. Como $\sqrt{21} = \sqrt{3 \cdot 7}$, tomamos 3 unidades a la izquierda de 0 y 7 a la derecha y trazamos un semicírculo como indica la figura:

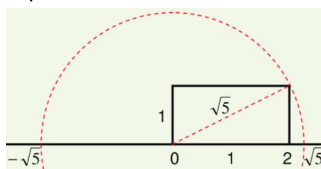


Por el teorema de la altura, $\overline{OC}^2 = 3 \cdot 7 = 21 \Rightarrow$ La altura con respecto a la base $\overline{AB}$ es $\overline{OC} = \sqrt{21}$

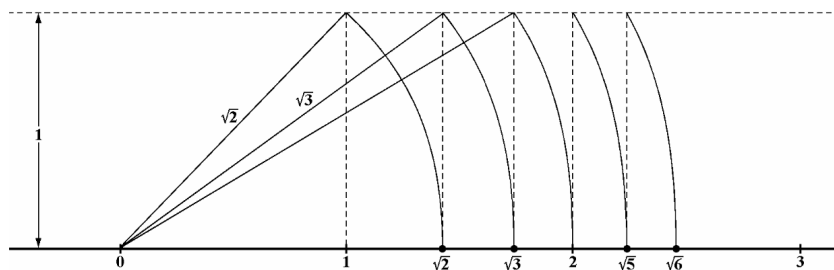
- Usando el teorema de Pitágoras. Sólo se puede en algunos casos: cuando el radicando es suma de dos cuadrados. Ejemplo: Vamos a representar el número $\sqrt{5}$:

Expresamos 5 como suma de dos cuadrados: $5 = 2^2 + 1^2$.

Dibujamos un rectángulo de lados 2 y 1. Por el teorema de Pitágoras la diagonal $d^2 = 2^2 + 1^2$, siendo d la diagonal del rectángulo. Luego, $d = \sqrt{5}$



Observa que por un proceso de reiteración se pueden representar $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc, etc



Si sólo queremos hacer la representación gráfica aproximada de un número tomamos una aproximación y representamos el valor aproximado.

Esto se suele hacer cuando el decimal tiene más de dos cifras decimales o cuando queramos representar de forma aproximada un número irracional. Fíjate en la representación aproximada del número π



Densidad de Q y de R

Se puede demostrar que:

- Dados dos números racionales cualesquiera, siempre se puedan encontrar infinitos números racionales comprendidos entre ambos: se dice que Q es un conjunto denso.
- Dados dos números reales cualesquiera, siempre se puedan encontrar infinitos números reales comprendidos entre ambos: se dice que R es un conjunto denso.

Ordenación en R

Cuando tengas que comparar fracciones se pueden reducir primero a común denominador.

Por ejemplo, vamos a comparar $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6} \rightarrow \frac{9}{12}$ y $\frac{10}{12}$. Como $\frac{9}{12} < \frac{10}{12}$, entonces $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$

Dados dos números decimales, es mayor el que tenga mayor parte entera. *Ejemplo:* $234,65 > 136,76$

Si tienen la misma parte entera, se compara la primera cifra decimal distinta.

$$146,82 > 146,74$$

$$357,56 > 357,53$$

$$634,128 > 634,125$$

Si tienes que comparar números reales los expresas primero todos en forma de fracción (si fuese posible) o todos en forma decimal

Observa que dados dos números a y b se cumple que $a < b \leftrightarrow b - a > 0$

ACTIVIDADES

1.- Usando el teorema de Pitágoras, representa en la recta los siguientes números, cada uno en una recta diferente: a) $\sqrt{29}$ b) $\sqrt{53}$ c) $\sqrt{8}$ d) $\sqrt{13}$ e) $\sqrt{2}$ f) $\sqrt{10}$ g) $\sqrt{18}$ h) $\sqrt{40}$

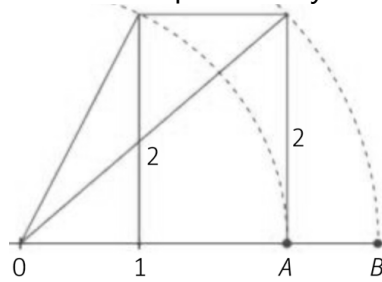
2.- Usando el teorema de la altura, representa en la recta: a) $\sqrt{56}$ b) $\sqrt{7}$

3.- Representa en la recta de forma exacta (cada uno en una recta diferente) y ordena de mayor a menor:

$$A = 8,27 \quad B = \frac{58}{7} \quad C = \sqrt{29} \quad D = -0,6 \quad E = -0,84 \quad F = \sqrt{10} \quad G = \sqrt{34} \quad H = \frac{-5}{6} \quad I = 0,2$$

$$J = -2 \quad K = 0,1666... \quad L = 2,3333... \quad M = 0,2\overline{6} \quad N = +\sqrt{9} \quad \tilde{N} = \frac{17}{5} \quad O = -0,666...$$

4.- Averigua qué números reales representan los puntos A y B de la figura



5.- Determina cuál de estas tres ordenaciones es correcta:

a) $3,1 < \pi < \sqrt{10}$

b) $\pi < 3,1 < \sqrt{10}$

c) $3,1 < \sqrt{10} < \pi$

6.- Escribe tres números comprendidos entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$. ¿Cuántos números hay entre los dos?

Actividades del libro. 8 y 9 (pág. 11), 83 y 84 (pag. 26)

3.- INTERVALOS DE LA RECTA REAL

Un intervalo de la recta es un segmento o una semirrecta.

Los segmentos corresponden a los números reales comprendidos entre otros dos.

Las semirrectas son todos los números reales mayores o menores que un número dado.

Hay ocho tipos de intervalos:

Intervalo abierto (a, b) $[-1, 3] \Rightarrow -1 < x < 3$	Intervalo cerrado $[a, b]$ $[-1, 3] \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$	Semirrecta abierta positiva $[a, \infty)$ $[2, \infty) \Rightarrow x > 2$	Semirrecta cerrada positiva $[a, \infty]$ $[2, \infty) \Rightarrow x \geq 2$
Intervalo abierto por la izquierda $[a, b)$ $[-1, 3] \Rightarrow -1 < x \leq 3$	Intervalo abierto por la derecha $(a, b]$ $[-1, 3] \Rightarrow -1 \leq x < 3$	Semirrecta abierta negativa $(-\infty, a)$ $(-\infty, 2] \Rightarrow x < 2$	Semirrecta cerrada negativa $(-\infty, a]$ $[-1, 2] \Rightarrow x \leq 2$

Los signos $\leq$ y $\geq$ nos indican que el extremo está incluido (intervalo cerrado) y los signos $<$ y $>$ que no está incluido (intervalo abierto)

Los corchetes nos indican que el extremo está incluido (intervalo cerrado) y los paréntesis que no está incluido (intervalo abierto)

ACTIVIDADES

1.- Resuelve las siguientes cuestiones:

a) ¿Pertenece el número -5 al intervalo $[-4, 1]$?

b) ¿Cuántos números enteros hay en el intervalo $(-5, -3]$?

c) ¿Cuántos números reales tiene el intervalo $(6, 7)$?

d) ¿Cuál de las siguientes semirrectas contiene al número -3 : $[-3, \infty)$ ó $(-3, \infty)$?

2.- Completa el siguiente cuadro

Intervalo o semirrecta	Enunciado	Desigualdad	Representación gráfica
$[1, +\infty)$			
	Números reales menores que -5		
			
		$\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 0\}$	
$(2, 5]$			
		$\{x \in \mathbb{R} / x \leq 6\}$	

Actividades del libro: 10 y 11 (pág. 11) y 87 (pág. 26)**4.- OPERACIONES CON FRACCIONES Y DECIMALES**Repaso: uso de fracciones en la calculadoraSe puede introducir una fracción en la calculadora científica CASIO usando la tecla $\boxed{a/b/c}$ El proceso es: numerador $\boxed{a/b/c}$ denominador.Por ejemplo, para introducir $\frac{3}{4}$ es: 3 $\boxed{a/b/c}$ 4. Aparecerá en la pantalla 3 $\div$ 4, que significa $\frac{3}{4}$

Se puede simplificar una fracción directamente con la calculadora científica.

Antes prepara la calculadora para simplificar fracciones: Pulsa MODE varias veces hasta que aparezca Disp, selecciona esta función pulsando 1. Luego selecciona d/c pulsando 2

Para obtener la fracción irreducible directamente usando la calculadora científica CASIO introduces la fracción original en la calculadora y pulsas la tecla $\boxed{=}$ Ejemplo: $\frac{9945}{6435}$: 9945 $\boxed{a/b/c}$ 6435 $\boxed{=}$. Obtendrás 17 $\div$ 11, que significa que $\frac{17}{11}$ es la fracción irreducibleRepaso: operaciones combinadas con números racionales

Para realizar operaciones combinadas con fracciones se sigue el siguiente orden:

1º) Se hacen las multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha

2º) Se hacen las sumas y restas

Si hubiese paréntesis, debemos hacer en primer lugar las operaciones de dentro de los paréntesis siguiendo el orden anterior.

En las operaciones combinadas es conveniente tener en cuenta:

- Los resultados de las operaciones con fracciones se suelen dar simplificados.
- Sólo reducimos a común denominador al sumar o restar, pero no para multiplicar o dividir
- Antes de operar con fracciones valora si simplificando las fracciones resulta más fácil

Ejemplo:

$$2 - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{2} : 3 \xrightarrow{\text{partimos por 1 los números enteros}} \frac{2}{1} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{2} : \frac{3}{1} = \frac{2}{1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{8-1+2}{4} = \frac{9}{4}$$

$\xrightarrow{\text{da } \frac{3}{4}}$ $\xrightarrow{\text{da } \frac{3}{6} = \frac{1}{2}}$

Para realizar operaciones con fracciones, enteros y decimales conjuntamente se expresan todos los números como fracción y luego se opera.

Ejemplo: $0,5 - 0,333... \cdot \left(\frac{21}{4} - 5\right) + \frac{7}{35} : 0,1\overline{6} - 1,3\overline{6}$

Hallamos la fracción generatriz irreducible de cada decimal:

$$0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad 0,333... = 0,\overline{3} = \frac{3-0}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad 0,1\overline{6} = \frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6} \quad 1,3\overline{6} = \frac{136-13}{90} = \frac{123}{90} = \frac{41}{30}$$

Sustituyendo, obtenemos: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{21}{4} - \frac{5}{1}\right) + \frac{7}{35} : \frac{1}{6} - \frac{41}{30} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{6}{5} - \frac{41}{30} =$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{6}{5} - \frac{41}{30} = \frac{30}{60} - \frac{5}{60} + \frac{72}{60} - \frac{82}{60} = \frac{15}{60} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{3} : \left(1 - \frac{2}{5}\right)}{\frac{3}{7} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{7}{2}\right)} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{3} : \frac{3}{5}}{\frac{3}{7} - \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{6}} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{9}}{\frac{3}{7} - \frac{25}{12}} = \frac{\frac{7}{36}}{\frac{-139}{84}} = \frac{7}{36} : \frac{-139}{84} = \frac{7 \cdot 84}{36 \cdot (-139)} = \frac{-588}{5004} = \frac{-49}{417}$$

Problemas con números racionales

En una Biblioteca las $\frac{3}{5}$ partes de los libros son novelas, $\frac{1}{3}$ de los restantes libros son de poesía.

Si hay 300 libros que no son novelas ni de poesía, ¿cuántos libros hay en total en la Biblioteca?

$$\begin{cases} \text{novelas: } \frac{3}{5} \\ \text{poesía: } \frac{1}{3} \text{ de } \frac{2}{5} = \frac{2}{15} \end{cases} \quad \text{novelas y poesías: } \frac{3}{5} + \frac{2}{15} = \frac{11}{15}$$

Si x es el nº de libros de la biblioteca, $\frac{4}{15}$ de x = 300 $\Rightarrow \frac{4x}{15} = 300 \Rightarrow x = \frac{300 \cdot 15}{4} = \boxed{1125 \text{ libros}}$

ACTIVIDADES

1.- Efectúa y simplifica: a) $\frac{18\cancel{5}}{-6}$ b) $\frac{4\cancel{9}}{2\cancel{3}}$ c) $\frac{-3}{-6\cancel{7}}$ d) $\frac{35\cancel{83}}{-7\cancel{83}}$

e) $1 - 3 \cdot \frac{\frac{2}{5} + 1}{\frac{3}{4} - 2}$ f) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) : \frac{3}{4}$ g) $\frac{\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{8} \cdot \frac{5}{3}}{\frac{2}{3} \cdot \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} : \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{6}\right]}$ h) $\frac{2 - \frac{3}{5} \left(\frac{3}{4} - \frac{7}{6}\right)}{\frac{3}{10} \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3} - 1\right)\right]}$

i) $0,375 + 3(0,5 - 0,25) : \left[4 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1 + \frac{1}{3}}{0,333...}\right]$ j) $\frac{3\left(1 - \frac{3}{18}\right) - (0,4 - 0,4\overline{9}) \cdot 5}{\frac{5}{12} - \frac{18}{27} - 1,25}$

2.- De una cosecha de aceituna, en febrero se vendieron las $\frac{2}{3}$ partes y luego en marzo las $\frac{3}{5}$ partes de lo que quedaba.

a) ¿Qué fracción de cosecha se vendió?

b) Si aún quedan por vender 400 kg, ¿cuántos kg de aceituna había en total?

3.- De todos los coches que había en una fábrica, primero se vendieron las $\frac{2}{5}$ partes y después las $\frac{5}{6}$ partes del resto.

a) ¿Qué fracción de coches se vendieron?

b) Si sabemos que quedaron sin vender 3 coches, ¿cuántos coches había en total?

4.- Un agricultor lleva melones en el maletero de su coche. Encuentra a tres amigos y le da, al primero, la mitad de los melones más dos; al segundo, la mitad de los que le quedan más dos y, al tercero, la mitad de los sobrantes más dos. Aún sobró un melón. ¿Cuántos llevaba al principio?

5.- POTENCIAS Y NOTACIÓN CIENTÍFICA

Repaso: cálculo de potencias y sus propiedades

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}} \quad (-a)^n = \begin{cases} a^n, & \text{si } n \text{ es par} \\ -a^n, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad a^1 = a \quad a^0 = 1 \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad a^m b^m = (ab)^m \quad (ab)^m = a^m b^m \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Cualquier potencia se puede hallar con la calculadora científica CASIO.

El proceso es: base $\boxed{\wedge}$ exponente $\boxed{=}$. Por ejemplo, 2^{15} se calcula así $2 \boxed{\wedge} 15 \boxed{=}$. Da 32 768

Repaso: notación científica

Potencias de 10. $10^m = 1 \underbrace{0 \dots 0}_m \text{ m ceros}$ $10^{-m} = 0, \underbrace{\dots 01}_m \text{ m ceros}$

Multiplicación un número por una potencia de base 10: se desplaza la coma, hacia adelante si el exponente es positivo o hacia atrás si es negativo, tantos lugares como indica el exponente. Si no hay suficientes lugares, se añaden ceros.

Notación científica: $A \cdot 10^n$, siendo A un número con una cifra entera no nula, llamado coeficiente y el exponente n un número entero, llamado orden de magnitud.

Las expresiones de la forma $A \cdot 10^n$ se pueden introducir en la calculadora científica CASIO usando la tecla EXP. El proceso es: coeficiente $\boxed{\text{EXP}}$ exponente $\boxed{=}$.

Por ejemplo, la forma de introducir $2,756 \cdot 10^{-12}$ es: $2.756 \boxed{\text{EXP}} \boxed{(-)} 12 \boxed{=}$.

Aparecerá en la pantalla $2.756^{x10^{-12}}$ que significa $2,756 \cdot 10^{-12}$.

Reglas para operar con expresiones de la forma $A \cdot 10^n$:

Suma y resta: $A \cdot 10^m \pm B \cdot 10^m = (A \pm B) \cdot 10^m$

Si no tienen la misma potencia de 10, los transformamos y luego usamos la regla anterior

Producto: $A \cdot 10^m \cdot B \cdot 10^n = A \cdot B \cdot 10^{m+n}$

Potencia: $(A \cdot 10^m)^n = A^n \cdot 10^{mn}$

Cociente: $\frac{A \cdot 10^m}{B \cdot 10^n} = \frac{A}{B} \cdot 10^{m-n}$

ACTIVIDADES

1.- Transforma en una potencia y luego calcula su valor: a) $\frac{27^5 \cdot 243 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3}{9^2 \cdot 3^5}$ b) $\frac{4^{-2} \cdot 8 \cdot 32^{-1}}{16^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^5}$

2.- Efectúa y simplifica: a) $\frac{8^{-3} + 5^{-2}}{(-4)^{-6}}$ b) $\left(\frac{3 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5}}\right)^{-2} + \frac{5}{2^3} : \left(2 - \frac{3}{2}\right)^{-4}$

3.- Completa: $\frac{7,5 \cdot 10^{-10} \cdot 12,25 \cdot 10^4}{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 75 \cdot 10^{-5}} = \frac{\boxed{} \cdot 10^{\boxed{}}}{\boxed{} \cdot 10^{\boxed{}}} = \boxed{} \cdot 10^{\boxed{}} = \boxed{}$

4.- Realiza las siguientes operaciones. Da el resultado en forma de notación científica y también su desarrollo. Comprueba tus respuestas usando tu calculadora científica:

a) $\frac{0,000\,000\,000\,0025 \cdot (7\,200\,000 - 400\,000)}{(0,002)^2}$ b) $\frac{30000 \cdot (5 \cdot 10^{-2} + 30,25 \cdot 10^{-3} - 0,2 \cdot 10^{-1})}{(4 \cdot 10^{-7}) : (5 \cdot 10^{-6})}$

Actividades del libro: 16, 18, 19, 20 (pág. 12), 95, 96 (pág. 26)

6.- RADICALES

Repaso: radical y su relación con las potencias

$\sqrt[n]{a}$, con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ se llama radical o raíz de índice "n" y radicando "a" y representa, si es que existe, el número que elevado a "n" da como resultado "a".

Si el índice es 2, se llama raíz cuadrada y se expresa de forma simplificada así por $\sqrt{a}$. Si es 3 se llama raíz cúbica.

Dependiendo del índice, si es par o impar y del radicando, si es positivo o negativo, un radical puede tener 2, 1 o ninguna solución:

	Índice par	Índice impar
Radicando positivo	2 soluciones opuestas. Por ejemplo, $\sqrt[4]{81} = \pm 3$	1 solución positiva. Por ejemplo, $\sqrt[3]{125} = 5$
Radicando negativo	Ninguna solución. Por ejemplo, $\sqrt{-4}$	1 solución negativa. Por ejemplo, $\sqrt[3]{-8} = -2$

Radicales con la calculadora científica CASIO:

Para cualquier radical el proceso es: índice SHIFT $\boxed{\wedge}$ radicando $\boxed{=}$

Ejemplo: $\sqrt[5]{100} \Rightarrow 5$ SHIFT $\boxed{\wedge}$ 100 $\boxed{=}$ Nos da 2.511886432.

Para raíces cuadradas el proceso es: $\boxed{\sqrt{}}$ radicando $\boxed{=}$.

Ejemplo: $\sqrt{7} \Rightarrow \boxed{\sqrt{}}$ 7 $\boxed{=}$ Nos da 2.645751311.

Para raíces cúbicas el proceso es: SHIFT $\boxed{x^3}$ radicando $\boxed{=}$.

Ejemplo: $\sqrt[3]{40} \Rightarrow$ SHIFT $\boxed{x^3}$ 40 $\boxed{=}$ Nos da 3.419951893.

Relación entre radicales y potencias: $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}}$ $\boxed{a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}}$

Radicales equivalentes

Son los que tienen el mismo valor. Por ejemplo, $+\sqrt[4]{16}$ y $+\sqrt{4}$ son equivalentes, pues $+\sqrt[4]{16} = +\sqrt{4} = 2$. Dos radicales son equivalentes si es posible expresarlos como potencia de igual base y exponente.

Amplificación de radicales: Amplificar un radical es multiplicar el índice y el exponente por un mismo número natural. Al amplificar un radical se obtiene otro radical equivalente al inicial.

Ejemplo: $\sqrt[3]{6^2} = {}^{3 \cdot 5}\sqrt[3 \cdot 5]{6^{2 \cdot 5}} = {}^{15}\sqrt[15]{6^{10}}$

También se puede hacer, pero es un poco más largo, pasando el radical a potencia y amplificando el exponente.

Simplificación de radicales: Simplificar un radical es dividir índice y exponente por un mismo divisor

común. La regla es $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:d]{a^{m:d}}$ siendo d un divisor común.

Ejemplo: ${}^{12}\sqrt{5^8} = {}^{12:4}\sqrt{5^{8:4}} = {}^3\sqrt{5^2} = {}^3\sqrt{25}$

También se puede hacer, pero es un poco más largo, pasando el radical a potencia y simplificando el exponente.

Reducción de radicales a mínimo común índice

Para reducir radicales a mínimo común índice se toma como índice común el mcm de los índices.

El común índice se divide entre cada índice y el resultado se multiplica por el exponente del

radicando. Ejemplo: $\sqrt[6]{3}$ y $\sqrt[8]{5^7}$; $\text{mcm}(6, 8) = 24 \rightarrow {}^{24}\sqrt{3^4}$ y ${}^{24}\sqrt{5^{21}}$

También se puede hacer, pero es un poco más largo, pasando los radicales a potencia y reduciendo los exponentes a común denominador.

Comparación de radicales:

Si tienen el mismo índice, es mayor el que tenga mayor radicando. Por ejemplo, $\sqrt[5]{37} > \sqrt[5]{35}$

Cuando no tengan el mismo índice, se reducen a común índice y se aplica la regla anterior.

ACTIVIDADES

1.- Indica cuántas soluciones tienen los siguientes radicales y calcúlalas. Si no fuesen exactas, usa la calculadora científica y redondea a dos cifras decimales:

a) $\sqrt{81}$ b) $\sqrt[4]{16}$ c) $\sqrt{-9}$ d) $\sqrt[3]{8}$ e) $\sqrt[3]{-27}$ f) $\sqrt[4]{-625}$ g) $\sqrt[5]{-120}$

2.- Averigua si las siguientes parejas de radicales son equivalentes:

a) $\sqrt{81}$ y $\sqrt[4]{3^8}$ b) $\sqrt{125}$ y $\sqrt[3]{25}$ c) $\sqrt{5^3}$ y $\sqrt[6]{5^9}$

3.- Ordena los siguientes radicales es mayor reduciéndolos a común índice. Comprueba tu respuesta hallando el valor de cada radical con tu calculadora:

a) $\sqrt[5]{8}$, $\sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt[4]{2^6}$, $\sqrt[8]{2^3}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{6^5}$ c) $2^{3/4}$, $5^{3/2}$ y $6^{1/3}$

Actividades del libro: 34, 36 (pág. 15), 102 (pág. 27)

7.- OPERACIONES CON RADICALESRepaso de operaciones con radicales

Producto y cociente de radicales: si tienen el mismo índice se deja el mismo índice y se

multiplican/dividen los radicandos. $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

Ejemplos: $\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \cdot 5} = \sqrt[3]{10}$ $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$

Si no tuviesen el mismo índice se reducen a común índice y se aplican las reglas anteriores

Potencia de un radical: se deja el mismo índice y el radicando se eleva al exponente de la potencia.

$$\left(\sqrt[n]{A}\right)^m = \sqrt[n]{A^m}. \text{ Por ejemplo, } \left(\sqrt[5]{2}\right)^3 = \sqrt[5]{2^3}.$$

En particular, $\left(\sqrt[n]{A}\right)^n = \sqrt[n]{A^n} = A$. Por ejemplo, $\left(\sqrt[7]{3}\right)^7 = \sqrt[7]{3^7} = 3$

Raíz de un radical: se multiplican los índices y se deja el mismo radicando.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[mn]{A}. \text{ Por ejemplo, } \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$$

Raíz de un producto y de un cociente: se calcula la raíz de cada término.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \text{ Ejemplos: } \sqrt[3]{2 \cdot 5} = \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{5} \quad \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

Extracción e introducción de factores en la raíz:

- Para extraer factores de la raíz se factoriza el radicando y se expresa, si es posible, como potencia de exponente el índice de la raíz los factores de la descomposición. Después se usa la siguiente regla

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{b} = a \sqrt[n]{b} \Rightarrow \sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{864} \xrightarrow{\text{factorizando}} \sqrt[3]{2^5 3^3} = \sqrt[3]{2^5} \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{2^3 2^2} \sqrt[3]{3^3} = 2 \sqrt[3]{2^2} \cdot 3 = 6 \sqrt[3]{2^2} = 6 \sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{2^3 5} = \sqrt[3]{2^3} \sqrt[3]{5} = 2 \sqrt[3]{5}$$

- Para introducir un factor en la raíz se eleva el factor al índice de la raíz:

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \Rightarrow a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \text{ Ejemplo: } 2 \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 5} = \sqrt[3]{40}$$

Suma y resta de radicales: para poder sumar o restar términos con raíces, todos los términos deben llevar la misma raíz. Para realizar las sumas y restas se saca factor común el radical

La regla es: $M \sqrt[n]{A} \pm N \sqrt[n]{A} = (M \pm N) \sqrt[n]{A}$. Por ejemplo, $5 \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{7} + 2 \sqrt[3]{7} = (5 - 1 + 2) \sqrt[3]{7} = 6 \sqrt[3]{7}$

Algunas veces es necesario extraer factores del radical para poder realizar las sumas/restas.

Racionalización de fracciones con radicales

Racionalizar una fracción radical con alguna raíz en el denominador es transformarla en otra fracción equivalente pero que NO tenga ninguna raíz en el denominador.

- Racionalización con denominadores del tipo $A\sqrt{B}$.

Para racionalizar este tipo de fracciones se multiplica numerador y denominador por la raíz cuadrada que tengamos en el denominador. De esta forma se llega a una fracción sin raíz en el denominador.

Ejemplo: $\frac{5a}{3\sqrt{b}} \xrightarrow{\text{Se multiplica por } \sqrt{b}} \frac{5a \cdot \sqrt{b}}{3\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{5a \sqrt{b}}{3(\sqrt{b})^2} = \frac{5a \sqrt{b}}{3b}$

- Racionalización de fracciones con denominadores del tipo A $\sqrt[n]{B}$

Para racionalizar este tipo de fracciones se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{B^{n-1}}$. De esta forma, se llega a una fracción sin raíz en el denominador:

Ejemplos:

$$\frac{2}{5\sqrt[7]{2}} \xrightarrow{\text{Multiplico por } \sqrt[7]{2^6}} \frac{2}{5\sqrt[7]{2}} \cdot \frac{\sqrt[7]{2^6}}{\sqrt[7]{2^6}} = \frac{2\sqrt[7]{2^6}}{5 \cdot 2} = \frac{\sqrt[7]{64}}{5}$$

$$\frac{2x}{3\sqrt[5]{y^2}} \xrightarrow{\text{Multiplico por } \sqrt[5]{y^3}} \frac{2x}{3\sqrt[5]{y^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{y^3}}{\sqrt[5]{y^3}} = \frac{2x\sqrt[5]{y^3}}{3\sqrt[5]{y^5}} = \frac{2x\sqrt[5]{y^3}}{3y}$$

$$\frac{1}{4\sqrt[3]{7}} \xrightarrow{\text{Multiplico por } \sqrt[4]{3^{-3}}} \frac{1}{4\sqrt[3]{7}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3^{-3}}}{\sqrt[4]{3^{-3}}} = \frac{\sqrt[4]{3^{-3}}}{4\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[4]{3^{-3}}}{3}$$

ACTIVIDADESActividades del libro:

42, 44 a) b) y c), 46 (pág. 17), 106, 107, 108, 110 a) b) y c), 112 a) (pág. 27) y 148 (pág. 29)

8.- LOGARITMOSConcepto de logaritmo

Considera la ecuación $2^x = 6$. La solución de esta ecuación es el número al que hay que elevar el "2" para obtener el "6". Se llama el logaritmo en base 2 de 6 y se escribe así: $\log_2 6$.

En general, si $a > 0$, $a \neq 1$, la solución de la ecuación $a^x = N$ es el número al que hay que elevar la base "a" para obtener "N". Dicho número se llama logaritmo en base a de N y se escribe así: $\log_a N$

Usando la definición podemos ver que se cumple la regla: **$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$**

Si la base es 10, entonces $\log_{10} N$ se escribe simplemente como $\log N$ y se llama logaritmo decimal de N o de Briggs.

Si la base es el número "e", entonces $\log_e N$ se escribe simplemente como $\ln N$ ó $L n$ y se llama logaritmo neperiano o logaritmo natural de N.

El número $e = 2,718281828...$ es un número irracional y tiene gran importancia en Matemáticas.

Usando la definición podemos hallar algunos logaritmos.

Ejemplos:

$$\log_3 \sqrt[5]{\frac{1}{9}} = \log_3 \sqrt[5]{\frac{1}{3^2}} = \log_3 \sqrt[5]{3^{-2}} = \log_3 3^{-2/5} = \frac{-2}{5}$$

$$\log_{\sqrt[3]{4}} \frac{1}{8} \rightarrow \log_{\sqrt[3]{4}} \frac{1}{8} = x \Leftrightarrow (\sqrt[3]{4})^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2^2})^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \left(2^{2/3}\right)^x = 2^{-3} \Leftrightarrow 2^{2x/3} = 2^{-3} \Leftrightarrow \frac{2x}{3} = -3 \Leftrightarrow x = \frac{-9}{2}$$

$$\log_{0,4} 0,064 \rightarrow \log_{0,4} 0,064 = x \Leftrightarrow 0,4^x = 0,064 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{8}{125} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \Rightarrow x = 3$$

La calculadora científica CASIO nos permite calcular tanto logaritmos decimales como neperianos usando las teclas $\boxed{\log}$ y $\boxed{\ln}$, respectivamente.

Ejemplos:

$$\log 3 \Rightarrow \boxed{\log} \ 3 \ \boxed{=}. \text{ Nos da } 0,477121254... \quad \ln 20 \Rightarrow \boxed{\ln} \ 20 \ \boxed{=}. \text{ Nos da } 2,995732274...$$

Está demostrado que todos los logaritmos que no den un resultado exacto (número entero o decimal exacto o periódico) son números irracionales.

Propiedades de los logaritmos

1) $\log_a a = 1$ <i>Ejemplo:</i> $\log_5 5 = 1$	2) $\log_a 1 = 0$ <i>Ejemplo:</i> $\log_3 1 = 0$	3) $\nexists \log_a N$, si $N \leq 0$ <i>Ejemplos:</i> $\nexists \log_2 (-4) \quad \nexists \log_6 0$	4) $\log_a (MN) = \log_a (M) + \log_a (N)$ <i>Ejemplo:</i> $\log_7 (3.12) = \log_7 (3) + \log_7 (12)$
5) $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$ <i>Ejemplo:</i> $\log\left(\frac{5}{2}\right) = \log(5) - \log(2)$	6) $\log_a (M^N) = N \log_a (M)$ <i>Ejemplo:</i> $\ln (5^3) = 3 \cdot \ln(5)$	7) $\log_a a^N = N$ $a^{\log_a M} = M$ <i>Ejemplos:</i> $\log_4 4^9 = 9$ $3^{\log_3 7} = 7$	8) $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{\log_a (M)}{n}$ <i>Ejemplo:</i> $\log_2 \sqrt[3]{10} = \frac{\log_2(10)}{3}$

Existe una fórmula, llamada fórmula de cambio de base, que nos permite calcular logaritmos

transformándolos a otra base $\rightarrow$ fórmula de cambio de base: $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b A}$

En particular, si $b = 10$: $\log_a N = \frac{\log N}{\log a}$, si $b = e$ (número e): $\log_a N = \frac{\ln N}{\ln a}$

Cualquiera de estas dos últimas fórmulas nos permite hallar el logaritmo en base a de un número usando la calculadora científica.

Por ejemplo, aplicando la primera fórmula: $\log_2 7 = \frac{\log 7}{\log 2} = 2,807354922...$

Si aplicamos la segunda fórmula obtenemos el mismo resultado: $\log_2 7 = \frac{\ln 7}{\ln 2} = 2,807354922...$

Ejercicios resueltos

1) Sabiendo que $\log_a x = 5$, $\log_a y = 2$ calcula, $\log_a \frac{x^3 \sqrt{y}}{ay^2}$

$$\log_a \frac{x^3 y^{1/2}}{ay^2} = \log_a x^3 + \log_a y^{1/2} - \log_a (ay^2) = 3\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y - (\log_a a + 2\log_a y) = 3.5 + \frac{1}{2}.2 - (1 + 2.2) = 11$$

2) Calcula x sabiendo que $\log x = \log 12 - 2 \log 6 + \log 3$

Solución: $\log x = \log 12 - \log 6^2 + \log 3 = \log \frac{12}{36} + \log 3 = \log \left(\frac{12}{36} \cdot 3\right) = \log 1 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

ACTIVIDADES

1.- Usando la definición calcula: a) $\log_5 \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2 \sqrt[3]{5}}{0,04}$ b) $\log_2 \frac{2^3 2^{-3}}{\sqrt[3]{2} 0,5^5}$ c) $\log \frac{1000 \sqrt[3]{100} 0,01}{(0,1)^3}$

2.- Sabiendo que $\log_5 a = 2$ y $\log_5 b = -3$, calcula: a) $\log_5 \frac{25b^3}{\sqrt[3]{a^5}}$ b) $\log_5 \frac{\sqrt[3]{5b^2}}{a^4 b^{-4}}$

3.- Utilizando las propiedades de los logaritmos calcula el valor de x en la siguiente igualdad:
 $\log x = \log 75 - 2 \log 5 + \log 2$

4.- Usa tu calculadora científica y la fórmula de cambio de base para hallar los siguientes logaritmos, expresando el resultado redondeado a las milésimas: a) $\log_2 12$ b) $\log_{1/4} (500)$

5.- La siguiente fórmula se usa para calcular los decibelios de produce un determinado ruido

$$D = 10 \log(I \cdot 10^{12}), \text{ donde: } D = \text{nº de decibelios, } I = \text{intensidad del sonido.}$$

- a) El tráfico en una determinada zona de una ciudad, provoca una intensidad de sonido de $3,5 \cdot 10^{-5}$. Calcular el número de decibelios que ocasiona este ruido.
 b) Calcular la intensidad de un sonido que tiene un nivel de 72 decibelios.

Actividades del libro: 115, 117 (pág. 27), 123 (pág. 28) y 151 a) (pág. 29)

9.- PROBLEMAS CON PORCENTAJES

Ejercicios resueltos

1) Una sección de una fábrica produce dos tipos de bombillas, A y B. El 60% de la producción es del tipo A. Se sabe que el 2% de las bombillas de tipo A y el 5% de B salen defectuosas.

- a) Halla el % de bombillas defectuosas de cada tipo.
 b) Si un día se fabricaron 12000 bombillas, ¿cuántas bombillas se tuvieron que tirar?
 c) Si otro día salieron 160 bombillas defectuosas, ¿cuántas se fabricaron?

Resolución

$$a) \overbrace{2\% \text{ de } 60\%}^{\text{tipo A}} + \overbrace{5\% \text{ de } 40\%}^{\text{tipo B}} = \overbrace{0,02 \cdot 0,6}^{\text{tipo A}} + \overbrace{0,05 \cdot 0,4}^{\text{tipo B}} = \overbrace{0,012}^{\text{tipo A}} + \overbrace{0,02}^{\text{tipo B}} = \overbrace{1,2\%}^{\text{tipo A}} + \overbrace{2\%}^{\text{tipo B}} = 3,2\%$$

$$b) 3,2\% \text{ de } 12000 = 3,2 \cdot 12000 = 384 \text{ bombillas}$$

$$c) \begin{array}{l} 160 \rightarrow 3,2\% \\ x \rightarrow 100\% \end{array} \Rightarrow x = \frac{160 \cdot 100}{3,2} = 5000 \text{ bombillas}$$

2) Una persona se dispuso perder kilos siguiendo una dieta que empezó en Junio de 2010. Ahora, en Diciembre, pesa 87,4 kg. ¿Cuánto pesaba en Junio si se sabe que ha perdido un 8% de su peso?

Resolución

$$\begin{array}{l} 92\% \rightarrow 87,4 \\ 100\% \rightarrow x \end{array} \Rightarrow x = \frac{87,4 \cdot 100}{92} = 95 \text{ kg}$$

3) El precio de la docena de huevos ha aumentado un 4% respecto del año pasado. Este año vale 1,82 €. ¿Cuánto valía la docena de huevos el año pasado?

Resolución

$$\begin{array}{l} 104\% \rightarrow 1,82 \\ 100\% \rightarrow x \end{array} \Rightarrow x = \frac{1,82 \cdot 100}{104} = 1,75 \text{ €}$$

4) Un artículo cuyo precio era de 32 € cuesta en la actualidad 1,75 € más caro. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

Resolución

$$\begin{array}{l} 32 \rightarrow 100\% \\ 33,75 \rightarrow x \end{array} \Rightarrow x = \frac{33,75 \cdot 100}{32} \cong 105,5\% \Rightarrow \text{Es un } 5,5\% \text{ más caro}$$

5) Si he pagado 256 € por un billete de avión que costaba 320 € ¿Qué porcentaje de descuento me hicieron?

Resolución

$$\begin{array}{l} 320 \rightarrow 100\% \\ 256 \rightarrow x \end{array} \Rightarrow x = \frac{256 \cdot 100}{320} \cong 80\% \Rightarrow \text{Un } 20\% \text{ de descuento}$$

ACTIVIDADES

- 1.- El 30% de los alumnos de un instituto tiene el pelo rubio. Dentro de los rubios, el 40% son mujeres.
- a) ¿Qué porcentaje de alumnos supone las mujeres de pelo rubio?
- b) Si nos dicen que en total hay 950 alumnos, ¿cuántas personas hay que no sean mujeres rubias?
- c) Si nos dijeran que hay 105 mujeres rubias, ¿cuántos alumnos tendría entonces el instituto?
- 2.- Si una bebida consiste en un 70% de zumo y el resto de licor, y el 90% del zumo y el 20% del licor son agua, ¿qué porcentaje de agua hay en la bebida?
- 3.- Se estima que en la producción de energía eléctrica, en una central térmica convencional, se pierde un 60% de la energía que posee el combustible. Además, en el transporte eléctrico se pierde un 20% de la energía que sale de la central eléctrica, hasta que llega al usuario final.
- a) ¿Qué porcentaje de la energía original del combustible llega al usuario final?
- b) Y si mejoramos el funcionamiento de la central, de forma que se reduzcan las pérdidas en un 75% de las pérdidas actuales. ¿Cuál será ahora, el porcentaje de la energía original del combustible que llega al usuario final?
- 4.- En una tienda de deportes las camisetas tienen un descuento del 20%. Daniel quiere comprar una camiseta que cuesta 28 €, una vez hecho el descuento.
- ¿Cuál era el precio de la camiseta antes de la rebaja?
- 5.- La población en un determinado país en el año 2018 es de 40 800 000 habitantes. Se sabe que ha aumentado en un 2% respecto de la que tenía en el año 2017. ¿Cuál era la población en el 2017?
- 6.- El siguiente gráfico muestra las facturas de la luz correspondientes a tres fechas diferentes abonadas por una familia.



- Halla el % de subida experimentado por el recibo de la luz desde julio de 2007 hasta enero de 2011.
- 7.- Unos zapatos, cuyo precio era inicialmente 90 €, se han rebajado a 76,5 €. Calcule el porcentaje de descuento aplicado.

10.- INTERESES BANCARIOSInterés simple

Cuando metemos dinero en el Banco, se generan unos intereses, I , que se pueden calcular con la fórmula $I = \frac{Crt}{100}$, donde C es el capital (dinero que metemos), r es el rédito (% al que colocamos el dinero) y t es el tiempo en años que lo tenemos.

En algunos problemas la incógnita es C , r ó t . En estos casos, despejamos y luego sustituimos.

Ejemplos:

1) ¿A qué rédito hay que tener en un Banco 8 000 € a interés simple para que en 6 años se conviertan en 9 320 €?

Como queremos calcular el rédito, despejamos r de la fórmula: $I = \frac{Crt}{100} \Rightarrow \frac{100I}{Ct} = r$

Ahora sustituimos: $r = \frac{100I}{Ct} = \frac{100(9320 - 8000)}{8000 \cdot 6} = \frac{100 \cdot 1320}{48000} = 2,75\%$

2) ¿Cuántos años debe estar colocado en un Banco un capital a un rédito del 8% para que se triplique?

Como queremos calcular el tiempo, despejamos t de la fórmula: $I = \frac{Crt}{100} \Rightarrow \frac{100I}{Cr} = t$

Ahora sustituimos:

$t = \frac{100I}{Cr}$ como debe triplicarse, al final tendremos $3C$, luego $I = 3C - C = 2C \rightarrow \frac{100 \cdot 2C}{C \cdot 8} = \frac{200\cancel{C}}{8\cancel{C}} = 25$ años

Interés compuesto

Supongamos que colocamos un capital en un Banco de forma que los intereses que se producen cada periodo se acumulan al capital para producir nuevos intereses en el siguiente periodo. Este periodo se llama periodo de capitalización.

El interés compuesto puede ser anual si el periodo es de 1 año, semestral si es de 6 meses, trimestral 3 meses, cuatrimestral 4 meses o mensual 1 mes

Observa que si llamamos $i = \frac{r}{100}$ (o tanto por uno), el dinero que vamos obteniendo al final de cada periodo es:

Al final del periodo 1: $C_1 = C(1+i)$

Al final del periodo 2: $C_2 = C_1(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$

.....

Después de t periodos: $C_t = C(1+i)^t$

En los problemas de interés compuesto se pueden presentar varias situaciones:

1) Si tenemos que calcular C_t , sólo tenemos que sustituir en la fórmula y operar

Ejemplo: Se invierten 1200 € al 2,5% de interés compuesto semestral. ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 6 años?

Observamos que el nº de periodos es $t = 2$ semestres/año $\cdot$ 6 años = 12

Luego, el capital final sería: $C_t = C(1+i)^t \xrightarrow{\text{Sustituyendo}} 1200(1+0,025)^{12} = 1613,87$ €

2) Si tenemos que calcular C , observa: $C_t = C(1+i)^t \Rightarrow C = \frac{C_t}{(1+i)^t}$

Ejemplo: ¿Qué capital se ha invertido al 3% de interés compuesto trimestral si al cabo de 2 años tenemos un capital final de 4000 €?

Observamos que el nº de periodos es $t = 4$ trimestres/año $\cdot$ 2 años = 8

Luego, el capital inicial sería: $C = \frac{C_t}{(1+i)^t} \xrightarrow{\text{Sustituyendo}} \frac{4000}{(1+0,03)^8} = 3157,64$ €

3) Si tenemos que calcular r , observa:

$$C_t = C(1+i)^t \Rightarrow \frac{C_t}{C} = (1+i)^t \Rightarrow \left(\frac{C_t}{C}\right)^{\frac{1}{t}} = \left[(1+i)^t\right]^{\frac{1}{t}} = 1+i = 1 + \frac{r}{100}$$

$$\text{Por tanto, } r = \left[\left(\frac{C_t}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1\right] \cdot 100$$

Ejemplo: Hallar el % anual de interés compuesto al que presté durante 4 años un capital de 48000 € si me pagaron de intereses 10 344,30 €.

Observamos que el nº de periodos es $t = 4$ y el capital final es $C_t = 48000 + 10344,30 = 58344,30$ €

$$\text{Luego, el rédito ó \% sería: } r = \left[\left(\frac{C_t}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1\right] \cdot 100 \xrightarrow{\text{Sustituyendo}} \left[\left(\frac{58344,30}{48000}\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right] \cdot 100 = 5\%$$

4) Si tenemos que calcular el número de periodos, t , observa:

$$C_t = C(1+i)^t \Rightarrow \frac{C_t}{C} = (1+i)^t \Rightarrow \log \frac{C_t}{C} = \log(1+i)^t$$

$$\text{Como } \log M^N = N \log M \Rightarrow \log \frac{C_t}{C} = t \log(1+i)$$

$$\text{Por tanto, } t = \frac{\log \frac{C_t}{C}}{\log(1+i)}$$

Ejemplo: ¿Cuántos años estuvo impuesto un capital de 20000 € en un Banco si colocado al 0,5% de interés compuesto anual produjo unos intereses de 1553,65 €?

El capital final es $C_f = 20000 + 1553,65 = 21553,65$ €

$$C_f = C(1+i)^t \Rightarrow \frac{C_f}{C} = (1+i)^t \Rightarrow \log \frac{C_f}{C} = \log(1+i)^t = t \log(1+i)$$

$$\text{Luego, } t = \frac{\log \frac{C_f}{C}}{\log(1+i)} \xrightarrow{\text{Sustituyendo}} \frac{\log \frac{21553,65}{20000}}{\log(1+0,005)} = \frac{\log \frac{21553,65}{20000}}{\log(1,005)} \cong 15 \text{ años}$$

ACTIVIDADES

Actividades del libro: 65, 66, 71, 73 (pág. 22), 150 y 152 (pág. 29)