# Tema 1. Números Reales. Intervalos y Radicales

1. El conjunto de números reales ........ 2
2. Conjuntos de la recta real. Intervalos y entornos. ........ 3
    2.1 Operaciones con conjuntos, unión e intersección. ........ 4
3. Notación científica ........ 5
4. Potencias y Radicales ........ 7
    4.1 Exponente entero (negativo) ........ 7
    4.2 Potencias de exponente fraccionario. Radicales ........ 8
    4.3 Radicales equivalente ........ 10
    4.4 Operaciones con radicales ........ 11
        4.4.1. Introducción y extracción de factores en un radical ........ 11
        4.4.2 Suma de radicales ........ 12
        4.4.3 Racionalización ........ 13

# 1. El conjunto de números reales

Según vimos el año pasado los números que hoy conocemos como reales han surgido durante la historia del hombre mediante sucesivas ampliaciones del concepto de número. Las distintas agrupaciones son (no surgen así cronológicamente):

1. **Los Naturales** $\mathbb{N}$ ): son los números que utilizamos para contar: **$\mathbb{N}$ ={0,1,2…}.**
   Son los primeros números utilizados, de hecho existen desde que el hombre empieza a relacionar y contar (3 bisontes→3 muescas en la pared). Se utiliza el código decimal, mediante 10 dígitos (0,1,2…,9) se puede escribir cualquier número natural. Se cree que su origen es el conteo con los 10 dedos de las manos.
   *Nota: algunos autores no incluyen el cero como número natural.*

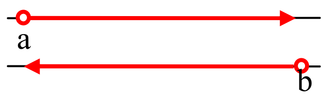
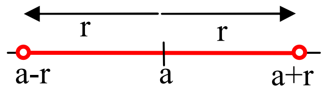
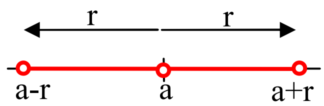
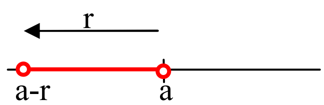
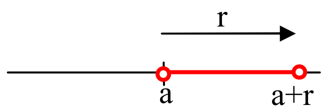
2. **Los Enteros** ( $\mathbb{Z}$ ): son el conjunto formado por los naturales (enteros positivos y el cero) y los enteros negativos que son los opuestos a los positivos.
   **$\mathbb{Z}$={…,-2,-1,0,1,2,..}**
   Surgen siglo XVII por la imposibilidad de realizar operaciones del tipo (3-5) con los naturales.

3. **Los Racionales** ( $\mathbb{Q}$ ): son todos aquellos que se pueden poner expresar como cociente de dos enteros (denominador distinto de cero) de la forma $\frac{m}{n}$.
   Si se expresan de forma decimal pueden ser o *exactos* (un número finito de cifras decimales) como 1'34, *periódicos puros* (infinitas cifras periódicas desde la coma) como 1'$\widehat{34}$ =1'343434…, y los periódicos mixtos como 1'3$\hat{4}$=1,3444…
   Surgen antes que los enteros (ya utilizados por Griegos y Babilónicos)
   *Nota: darse cuenta que todo entero es racional, como por ejemplo -6=*$\frac{-6}{1}$

4. **Los Irracionales** ( $\mathbb{I}$ ): son los números cuya expresión decimal formada por infinitas cifras no periódicas, de tal forma que no pueden expresarse como una fracción. Ejemplo: $\pi$=3'14159…

## 2. Conjuntos de la recta real. Intervalos y entornos.

Dentro de la recta real, donde están representados todos los números reales podemos definir una serie de subconjuntos, los ***intervalos*** y los ***entornos.*** La utilización de estos es muy importantes en las inecuaciones así como en el estudio de funciones. Veamos los distintos tipos de intervalos y de entornos en la siguiente tabla:

| CONJUNTOS MÁS IMPORTANTES DE LA RECTA REAL | | | |
|---|---|---|---|
| SUBCONJUNTO | SIMBOLO | DEFINICIÓN | REPRESENTACIÓN |
| Intervalo Abierto | $(a,b)$ | $(a,b)=\{x\in R: a<x<b\}$<br>Números entre a y b(no incluidos) |   |
| Intervalo Cerrado | $[a,b]$ | $[a,b]=\{x\in R: a\leq x\leq b\}$<br>Números entre a y b(incluidos) |   |
| Intervalos Semiabierto | $(a,b]$<br>$[a,b)$ | $(a,b]=\{x\in R: a<x\leq b\}$<br>$[a,b)=\{x\in R: a\leq x<b\}$<br>Números entre a y b(uno incluido) |   |
| Semirrectas abiertas | $(a,\infty)$<br>$(-\infty,b)$ | $(a,\infty)=\{x\in R: x>a\}$<br>$(-\infty,b)=\{x\in R: x<b\}$ |   |
| Semirrectas cerradas | $[a,\infty)$<br>$(-\infty,b]$ | $[a,\infty)=\{x\in R : x\geq a\}$<br>$(-\infty,b]=\{x\in R : x\leq b\}$ |   |
| Entorno de centro a y de radio r | $E(a,r)$ | $E(a,r)=(a-r,a+r)=\{x\in R: \|x-a\|<r\}$<br>Números cuya distancia al centro, a, es menor que el radio, r. |   |
| Entorno reducido centro a y radio r | $E^*(a,r)$ | $E^*(a,r)=E(a,r)-\{a\}=(a-r,a)\cup(a,a+r)$<br>Entorno pero sin contar el centro |   |
| Entorno lateral izquierdo | $E^-(a,r)$ | $E^-(a,r)=(a-r,a)$ |   |
| Entorno lateral derec | $E^+(a,r)$ | $E^+(a,r)=(a,a+r)$ |   |

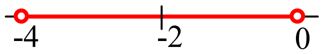
 *Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)*

**Ejemplos:**

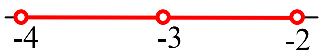
(-2,5]


(-∞,-1)

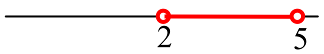

E(-2,2)




$E^*(-3,1)$




$E^+(2,3)$




### 2.1 Operaciones con conjuntos, unión e intersección.

***Unión de dos conjuntos:*** es el conjunto formado por los números que están en uno **o** en el otro conjunto.

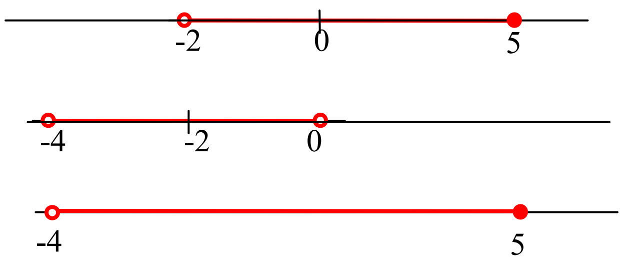
$A\cup B=\{x\in A$ ó $x\in B\}$

***Intersección de dos conjuntos:*** es el conjunto formado por los números que están en uno y en el otro conjunto.

$A\cap B=\{x\in A$ y $x\in B\}$

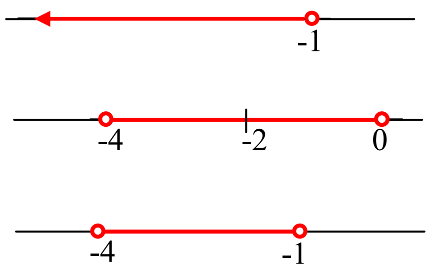
**Ejemplos:**

$(-2,5]\cup E(-2,2)=(-4,5]$




 *Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)*

$(-\infty,-1)\cap E(-2,2)$




**Ejercicios**

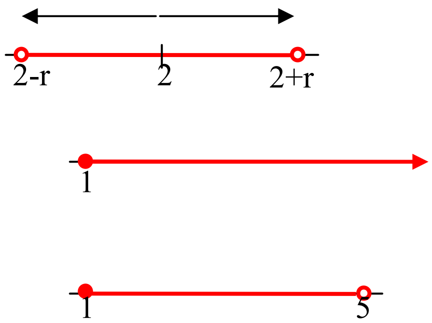
**1)** calcular el radio y el centro del entorno $E(a,r)=(-2,5)$

De un extremo a otro hay una distancia de 7, luego $2r=7 \rightarrow r=3.5$

$a=-2+3,5=5-3.5=1.5$

$E(1.5,3.5)=(-2,5)$

**2)** Calcular el radio r del entorno $E(2,r)$, si sabemos que $E(2,r)\cap[1,\infty)=[1,5)$




Claramente se observa que $2+r=5 \rightarrow r=3$

## 3. Notación científica

Fíjate en los siguientes números:

$e(\text{carga } e^-)=-0,00000000000000000016$ C

$d_{\text{pluton—Sol}}=5910000000000$m

$\text{gasto}_{\text{empresa}}=312600000000$ €

Cuando tenemos cantidades muy pequeñas o muy grandes se utiliza la notación científica, consiste en poner un número multiplicado por una potencia de 10. Así los números en notación científica constan de:

- Parte entera formada por una sola cifra ≠0 (1ª cifra del número)
- Parte decimal(formada por el resto de cifras del número)
- Potencia en base 10 que nos informa del orden de magnitud.

**X=a,bcd…·10$^{n}$**

En los ejemplos anteriores:

e=$-1{,}6\cdot10^{-19}$C

d=$5{,}91\cdot10^{12}$m

gasto=$3{,}126\cdot10^{11}$€

La notación científica tiene las siguientes ventajas:

a) Escribimos los números grades y pequeños de forma más abreviada
b) Con una simple mirada al número podemos entender como es de grande o pequeño ese valor.

Otra ventaja de la notación científica es que es muy útil para operar con esta clase de números, en especial cuando las operaciones son el producto o el cociente. Veamos algunos ejemplos:

a) $(5{,}24\cdot10^{6})\cdot(6{,}3\cdot10^{8})=(5{,}24\cdot6{,}3)\cdot10^{14}=33{,}012\cdot10^{14}=3{,}3012\cdot10^{15}$

b) $\dfrac{5{,}24\cdot10^{6}}{6{,}3\cdot10^{-8}}=(5{,}24:6{,}3)\cdot10^{14}=0{,}8317\cdot10^{14}=8{,}317\cdot10^{13}$

c) $5{,}83\cdot10^{9}+6{,}932\cdot10^{12}-7{,}5\cdot10^{10}=5{,}83\cdot10^{9}+6932\cdot10^{9}-75\cdot10^{9}=(5{,}83+6932-75)\cdot10^{9}=$
$=6862'83\cdot10^{9}=6{,}86283\cdot10^{12}$

Nota: correr la coma hacia la izquierda es como dividir, luego para no modificar el resultado tendremos que aumentar el exponente de 10 en tantas unidades como veces que corramos la coma. Al revés si corremos la coma hacia la derecha que es como multiplicar y por tanto tendremos que disminuir el exponente de 10 tantas veces como corramos la coma:

| | | |
|---|---|---|
| **coma →** | **==** | **restar al exponente nº posiciones desplazada** |
| **coma ←** | **==** | **sumar al exponente nº posiciones desplazada** |

### Utilización de la calculadora en la notación científica

***Ejercicio : Calcular y expresar el resultado en notación científica.***

***a )*** $7{,}823\cdot10^{-5}\cdot1{,}84\cdot10^{18}$

***b)*** $2{,}35\cdot10^{8}+1{,}43\cdot10^{7}$

**Solución**

a) $7{,}823\cdot10^{-5}\cdot1{,}84\cdot10^{18}=14{,}39432\cdot10^{13}=1{,}439432\cdot10^{14}$

b) $2{,}35\cdot10^{8}+1{,}43\cdot10^{7}=23{,}5\cdot10^{7}+1{,}43\cdot10^{7}=24{,}93\cdot10^{7}=2{,}493\cdot10^{8}$


*Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)*

***Ejercicio Calcular y expresar el resultado en notación científica:***

***a) $(3\cdot10^{-7})\cdot(8\cdot10^{18})$***

***c)$(5\cdot10^{12}):(2\cdot10^{-3})$***

***d) $(5\cdot10^{9})^{2}$***

***f)$3,1\cdot10^{12}+2\cdot10^{10}$***

**Solución**

a) $(3\cdot10^{-7})\cdot(8\cdot10^{18})=24\cdot10^{11}=2,4\cdot10^{12}$

c)$(5\cdot10^{12}):(2\cdot10^{-3})=10\cdot10^{9}=10^{10}$

d) $(5\cdot10^{9})^{2}=25\cdot10^{18}=2,5\cdot10^{19}$

f)$3,1\cdot10^{12}+2\cdot10^{10}=310\cdot10^{10}+2\cdot10^{10}=312\cdot10^{10}=3,12\cdot10^{12}$

***Ejercicio Calcular y expresar el resultado en notación científica:***

***a)*** $\dfrac{30\cdot10^{-4}+7\cdot10^{-4}}{10\cdot10^{5}-5\cdot10^{5}}$

***b)*** $\dfrac{7,35\cdot10^{4}}{5\cdot10^{-3}}+3,2\cdot10^{7}$

***c)*** $(4,3\cdot10^{3}-7,2\cdot10^{5})^{2}$

**Solución**

a) $7,4\cdot10^{-9}$

b)$4,67\cdot10^{7}$

c)$5,12\cdot10^{11}$

# 4. Potencias y Radicales

## 4.1 Exponente entero (negativo)

En este apartado vamos a estudiar las potencias cuando el exponente es un número entero negativo. Veamos el significado de $a^{-n}$:

$$\boxed{a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}}$$

*Ejemplos:*

$(-5)^{-3}=\dfrac{1}{(-5)^{3}}=-\dfrac{1}{125}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{9}{4}$$

 *Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)*

### 4.2 Potencias de exponente fraccionario. Radicales

Nos falta ahora entender el significado cuando la potencia es una fracción. Veamos el significado de $a^{\frac{n}{p}}$

$$\boxed{a^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{a^n}}$$

*Ejemplos:*

$$(-3)^{4/5} = \sqrt[5]{(-3)^4} = \sqrt[5]{81}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$$

La ventaja de poner una raíz como potencia fraccionaria es que cuando este está representado mediante una potencia podremos aplicar las propiedades de las potencias.

*Ejemplos:*

a) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 7^1 = 7$

b) $\sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{4}} = \dfrac{1}{4^{\frac{1}{5}}} = 4^{-\frac{1}{5}}$

d) $\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt[4]{16}} = \dfrac{16^{\frac{1}{2}}}{16^{\frac{1}{4}}} = 16^{\frac{1}{2}}\cdot 16^{-\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = \pm 2$

**Ejercicio, expresar como potencia única y radical**

**a)** $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5}$

**b)** $2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2^2}} = 2\cdot\sqrt[3]{2^{-2}} = 2\cdot 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{1-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

**c)** $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt{2^3}}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5}$

 *Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)*

**d)** $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2} = \dfrac{a^{\frac{8}{3}}}{a^2} = a^{\frac{8}{3}-2} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

**e)** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}} = \left(\dfrac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{2\cdot\frac{1}{3}} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{-\frac{2}{3}}$

**f)** $a\cdot\sqrt{\dfrac{1}{a}} = a\sqrt{a^{-1}} = a\cdot a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

## Ejercicio, expresar en forma de exponencial

**a)** $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

**b)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[3]{x^{\frac{1}{4}}} = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}$

**c)** $\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^3 = \left(a^{\frac{2}{5}}\right)^3 = a^{\frac{6}{5}}$

**d)** $\left(\sqrt{a}\right)^{-3} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-3} = a^{-\frac{3}{2}}$

**e)** $\sqrt[8]{a^5\cdot a^2} = \sqrt[8]{a^7} = a^{\frac{7}{8}}$

**f)** $\left(\sqrt[4]{a^2}\right)^2 = \left(a^{\frac{2}{4}}\right)^2 = a^{\frac{4}{4}} = a$

## Ejercicio, expresar en forma de raíz

**a)** $(a^2)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

**b)** $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

**c)** $(x^{-1})^{\frac{5}{4}} = x^{-\frac{5}{4}} = \dfrac{1}{x^{\frac{5}{4}}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$

**g)** $\left(3^{-\frac{2}{5}}\right)^{\frac{10}{3}} = 3^{-\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{3}} = 3^{-\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{3^{\frac{4}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3^4}}$

**d)** $\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^{-4} = a^{-\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{a^{\frac{4}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{a^4}}$

**h)** $2^{1,\overline{3}} = 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4}$

### 4.3 Radicales equivalente

Observa las siguientes igualdades:

$3=\sqrt{3^2}=\sqrt[3]{3^3}=\sqrt[4]{3^4}=...=\sqrt[n]{a^n}$ , se dice que todos estos radicales son equivalentes

Veámoslo en forma de potencia:

$3=3^{\frac{2}{2}}=3^{\frac{3}{3}}=3^{\frac{4}{4}}=...=3^{\frac{n}{n}}$

<u>*Definición:*</u> dos radicales son equivalentes si expresados en forma exponencial los exponentes son fracciones equivalentes:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[p]{a^q}\leftrightarrow a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{p}{q}}\leftrightarrow \frac{m}{n}=\frac{p}{q}$$

<u>Construcción de radicales equivalentes:</u> a veces nos interesa tener un radical equivalente para operar, veamos como generar radicales equivalentes:

$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$

*ejemplo:* $\sqrt[3]{a^4}=\sqrt[6]{a^8}$

Esta propiedad es muy útil para:

1) Simplificar radicales: $\sqrt[8]{2^4}=\sqrt{2}$

2) Productos de radicales: $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}=\sqrt[15]{2^5}\sqrt[15]{2^3}=\sqrt[15]{2^8}$ (se puede hacer en forma de potencia fraccionaria, $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}=2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=2^{\frac{8}{15}}=\sqrt[15]{2^8}$ )

**Ejercicio: simplificar los siguientes radicales:**

**a)** $\sqrt[8]{625}=\sqrt[8]{5^4}=\sqrt{5}$

**b)** $\sqrt[12]{64000}=\sqrt[12]{2^9\cdot 5^3}=\sqrt[12]{\left(2^3\cdot 5\right)^3}=\sqrt[4]{40}$

**Ejercicio: reduce al mismo índice los siguientes grupos de radicales**

**a)** $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$ → mcm(4,3,2)=12

$\sqrt[12]{6^3}$, $\sqrt[12]{3^6}$, $\sqrt[12]{2^4}$

**b)** $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{6}$ → mcm(6,5,3)=30

$\sqrt[30]{8^5}$, $\sqrt[30]{3^6}$, $\sqrt[30]{6^{10}}$

### 4.4 Operaciones con radicales

Veremos primero como operar con radicales con mismo índice. Estas propiedades se pueden entender si expresamos las raíces como potencias fraccionarias.

1) **Multiplicación:** $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}\rightarrow a^{1/n}\cdot b^{1/n}=(a\cdot b)^{1/n}$

*Ejemplo:* $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{14}$

2) **División:** $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}\rightarrow\dfrac{a^{1/n}}{b^{1/n}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/n}$

*Ejemplo:* $\dfrac{\sqrt[3]{14}}{\sqrt[3]{7}}=\sqrt[3]{2}$

3) **Potencia:** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}\rightarrow\left(a^{1/n}\right)^m=a^{m/n}$

*Ejemplo:* $\left(\sqrt[5]{2}\right)^3=\sqrt[5]{8}$

4) **Raiz:** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}\rightarrow\left(a^{1/n}\right)^{1/m}=a^{1/(m\cdot n)}$

*Ejemplo:* $\sqrt{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[10]{2}$

5) **Suma** → ¡¡¡no se pueden sumar raíces que no sean iguales!!!

*Ejemplo:* $\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$

Cuando multiplicamos o dividimos radicales, para operar con ellos es necesario que tengan mismo índice, por esto tendremos que buscar radicales equivalentes con mismo índice. Otra forma es utilizar potencias fraccionarias y las propiedades de las potencias.

*Ejemplos:*

*1)* $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[15]{2^3}\cdot\sqrt[15]{5^5}=\sqrt[15]{2^3\cdot 5^5}=\sqrt[15]{8\cdot 3125}=\sqrt[15]{25000}$

$$2^{1/5}\cdot 5^{1/3}=2^{3/15}\cdot 5^{5/15}=\left(2^3\cdot 5^5\right)^{1/15}=(25000)^{1/15}=\sqrt[15]{25000}$$

*2)* $\dfrac{\sqrt[4]{x^2y^3}}{\sqrt[3]{xy}}=\dfrac{\sqrt[12]{\left(x^2y^3\right)^3}}{\sqrt[12]{(xy)^4}}=\dfrac{\sqrt[12]{\left(x^6y^9\right)}}{\sqrt[12]{x^4y^4}}=\sqrt[12]{\dfrac{x^6y^9}{x^4y^4}}=\sqrt[12]{x^2y^5}$

### 4.4.1. Introducción y extracción de factores en un radical.

*1) Extracción:* cuando podemos expresar el radical como producto de factores elevados a exponentes, de forma que algún exponente es mayor que el índice del radical, este factor se puede extraer de la raíz de la siguiente forma:

$$\sqrt{360}=\sqrt{2^3\cdot 3^2\cdot 5}=\sqrt{2^2\cdot 2\cdot 3^2\cdot 5}=2\cdot 3\sqrt{10}=6\sqrt{10}$$

$$\sqrt[4]{1536}=\sqrt[4]{2^9\cdot 3}=\sqrt[4]{2^8\cdot 2\cdot 3}=2^2\sqrt[4]{6}=4\sqrt[4]{6}$$

**Ejercicio: extraer todos los factores posibles:**

**a)** $\sqrt{512}=\sqrt{2^9}=2^4\sqrt{2}=16\sqrt{2}$

**b)** $\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3}=6$

**c)** $\sqrt[4]{405}=\sqrt[4]{5 \cdot 3^4}=3\sqrt[4]{5}$

**d)** $\sqrt{6250}=\sqrt{2 \cdot 5^5}=5^2\sqrt{2 \cdot 5}=25\sqrt{10}$

*2)Introducción:* para introducir factores dentro de una raíz tendremos que elevar este factor al índice de la raíz. Veamos algunos ejemplos:

$5\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3 \cdot 5^3}=\sqrt[3]{375}$

$2^2\sqrt{5}=\sqrt{2^4 \cdot 5}=\sqrt{80}$

$\frac{\sqrt[3]{81}}{3}=\sqrt[3]{\frac{81}{3^3}}=\sqrt[3]{3}$

**Ejercicio: introducir dentro de los radicales:**

**a)** $\frac{\sqrt[3]{810}}{3}=\sqrt[3]{\frac{810}{3^3}}=\sqrt[3]{30}$

**b)** $\frac{\sqrt[4]{320}}{2}=\sqrt[4]{\frac{320}{2^4}}=\sqrt[4]{20}$

**c)** $\frac{\sqrt{83}}{4}=\sqrt{\frac{83}{4^2}}=\sqrt{\frac{83}{16}}$

**d)** $5\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2 \cdot 5^3}=\sqrt[3]{250}$

### 4.4.2 .Suma de radicales

Para sumar o restar radicales es necesario que estos tengan mismo índice y mismo radicando, es decir sean iguales. Veamos como se suman o restan:

$a \cdot \sqrt[n]{c} \pm b \cdot \sqrt[n]{c}=(a \pm b) \cdot \sqrt[n]{c}$

*Ejemplos:*

a) $3 \cdot \sqrt{3}-2 \cdot \sqrt{3}+5 \cdot \sqrt{3}=(3-2+5) \cdot \sqrt{3}=6 \cdot \sqrt{3}$

b) $3 \cdot \sqrt[3]{2}-4 \cdot \sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=3 \cdot \sqrt[3]{2}-4 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 2^3}+\sqrt[3]{2 \cdot 3^3}=3 \cdot \sqrt[3]{2}-8 \cdot \sqrt[3]{2}+3 \cdot \sqrt[3]{2}=-2 \cdot \sqrt[3]{2}$

 *Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)*

**Ejercicio, operar:**

**a)** $\sqrt{12}-\sqrt{27}+3\cdot\sqrt{48}=2\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{3}+12\cdot\sqrt{3}=11\cdot\sqrt{3}$

**b)** $3\cdot\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{375}+\sqrt[3]{648}=2\cdot3\cdot\sqrt[3]{3}-5\cdot\sqrt[3]{3}+6\cdot\sqrt[3]{3}=7\cdot\sqrt[3]{3}$

**c)** $3\cdot\sqrt[4]{32}-5\cdot\sqrt[4]{162}+\sqrt[4]{512}=3\cdot2\cdot\sqrt[4]{2}-5\cdot3\cdot\sqrt[4]{2}+4\cdot\sqrt[4]{2}=-5\cdot\sqrt[4]{2}$

### 4.4.3 Racionalización

*Definición:* racionalizar una fracción consiste en hallar una fracción equivalente sin radicales en el denominador.

Tipos de racionalizaciones:

a) Raíz cuadrada en el denominador: $\frac{a}{c\cdot\sqrt{b}}$. Procedimiento: multiplicar denominador y numerador por la raíz del denominador $\frac{a\cdot\sqrt{b}}{c\cdot\sqrt{b}\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{cb}$

*Ejemplo:* $\frac{10}{3\cdot\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{3\cdot\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{15}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

b) Raíz índice n en el denominador: $\frac{a}{c\cdot\sqrt[n]{b}}$. Procedimiento: multiplicar denominador y numerador por la raíz del denominador con el radical elevado a n-1 → $\frac{a}{c\cdot\sqrt[n]{b}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}}{c\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}}{c\cdot b}$

*Ejemplo:* $\frac{7}{3\cdot\sqrt[4]{3}}=\frac{7\cdot\sqrt[4]{3^3}}{3\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{3^3}}=\frac{7\cdot\sqrt[4]{3^3}}{3\cdot3}=\frac{7\cdot\sqrt[4]{3^3}}{9}$

c) Suma o diferencia de dos raíces cuadradas en el denominador. $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$. Procedimiento multiplicar numerador y denominador por el conjugado (si están sumando por la diferencia y si están restando por la suma)

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a\cdot\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}=\frac{a\cdot\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}\right)^2}=\frac{a\cdot\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{b-c}$$

*Ejemplo:* $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5}=-\frac{5\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{2}$

**Ejercicio, racionaliza:**

**a)** $\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

**b)** $\frac{3}{5\cdot\sqrt[3]{2}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2^2}}{5\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2^2}}{5\cdot\sqrt[3]{2^3}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2^2}}{5\cdot 2}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2^2}}{10}$

**c)** $\frac{4}{\sqrt[4]{8}}=\frac{4\cdot\sqrt[4]{8^3}}{\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{8^3}}=\frac{4\cdot\sqrt[4]{8^3}}{8}=\frac{\sqrt[4]{8^3}}{2}$ o $\frac{4}{\sqrt[4]{2^3}}=\frac{4\cdot\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2^3}}=\frac{4\cdot\sqrt[4]{2}}{2}=2\cdot\sqrt[4]{2}$

**d)** $\frac{4}{3-\sqrt{2}}=\frac{4\cdot(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})}=\frac{12+4\sqrt{2}}{9-2}=\frac{12+4\sqrt{2}}{7}$

**e)** $\frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}=\frac{2\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{3})}=\frac{2\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{6-3}=\frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{3}$

**f)**

$$\frac{6}{\sqrt{2+\sqrt{5}}}=\frac{6\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{5}}}=\frac{6\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5}}=\frac{6\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}=\frac{6\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{2+\sqrt{5}}}{4-5}=$$
$$-6\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{2+\sqrt{5}}$$

 *Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)*