

6

Ecuaciones

● Presentación de la unidad

- Después de haber revisado en la unidad anterior el manejo de los polinomios, en esta unidad, con la resolución de ecuaciones, encontramos una importante aplicación de todo lo que se ha estudiado. La simplificación de expresiones algebraicas, así como la factorización, son herramientas fundamentales a la hora de resolver ecuaciones.
- Comienza la unidad haciendo una reflexión sobre lo que es una ecuación y en qué consiste resolverla. Se ve, en el primer apartado, que hay ecuaciones en las que resulta muy sencillo encontrar alguna solución por tanteo, "a ojo". Sin embargo, en otros casos no es así, y se plantea la necesidad de tener un método de resolución que sea válido para cualquier ecuación de las que nos vayamos a encontrar en un problema determinado.
- A partir de ahí, pasamos a recordar cómo se resuelven las ecuaciones de primer y segundo grado, así como sus aplicaciones para resolver problemas.
- En las últimas páginas se atiende a otros tipos de ecuaciones, pero que se pueden resolver con las herramientas que ya se conocen. Así, nos encontramos con ecuaciones que se dan factori-

zadas, o con radicales, o con la x en el denominador. Pensamos que, para los alumnos y las alumnas de esta opción de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de 4.º de ESO, no resulta especialmente relevante el nombre que tengan estas ecuaciones; más bien se plantean como un paso más en la resolución, aprovechando lo que ya se sabe, pues en la mayoría de los casos propuestos su resolución acabará desembocando en ecuaciones de primer o segundo grado.

- En las ecuaciones con la x en el denominador solo se tratarán casos muy sencillos, teniendo en cuenta el nivel al que se han trabajado las fracciones algebraicas.

● Conocimientos mínimos

Al finalizar la unidad, consideraremos imprescindible que los estudiantes hayan alcanzado un conocimiento óptimo de los contenidos siguientes:

- Conceptos de ecuación y de solución.
- Resolución de ecuaciones de primer grado.
- Resolución de ecuaciones de segundo grado.

Esquema de la unidad

ECUACIONES

CONCEPTOS

- Soluciones
- Ecuaciones equivalentes
- Inecuaciones
- Ecuaciones sin solución

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

PROCEDIMIENTOS DE RESOLUCIÓN

- Eliminar denominadores
- Reducir miembros
- Transponer términos
- Despejar la incógnita

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

COMPLETAS

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Fórmula

INCOMPLETAS

$$ax^2 + bx = 0$$

$$ax^2 + c = 0$$

- Procedimientos de resolución

OTROS TIPOS DE ECUACIONES

- Ecuaciones factorizadas
- Ecuaciones con x en el denominador
- Ecuaciones con radicales
- ...

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- Resolución de otros tipos de ecuaciones en casos muy sencillos (factorizadas, con radicales y con la x en el denominador).
- Aplicación de las ecuaciones a la resolución de problemas.

● Complementos importantes

- En las ecuaciones de segundo grado, estudiar más a fondo el número de soluciones según el signo del discriminante.
- Resolver ecuaciones polinómicas en las que tengan que factorizar un polinomio para llegar a las soluciones.

● Anticipación de tareas

- Revisar la prioridad de las operaciones y el uso del paréntesis.
- Resolver expresiones con paréntesis y operaciones combinadas.
- Repasar la operativa con fracciones.
- Repasar las operaciones con polinomios.
- Simplificar expresiones algebraicas.
- Traducir enunciados a expresiones algebraicas.

● Adaptación curricular

En la parte de "Recursos fotocopiables" se ofrece una adaptación curricular de esta unidad 6 del libro del alumnado, para cuya elaboración se han tenido en cuenta los conocimientos mínimos que aquí se proponen.

La lectura inicial servirá para ejercitar la comprensión lectora y para mostrar los dos aspectos que justifican el estudio de las matemáticas: el práctico y el intelectual.

Los contenidos, si se adaptan a esos mínimos exigibles, o bien no han sufrido cambio alguno o bien se han modificado ligeramente para adecuarlos al posible nivel de los estudiantes a quienes va dirigido. Lo mismo cabe decir de los ejercicios prácticos que se proponen.

Si algún contenido supera los mínimos exigibles, o bien se ha suprimido o bien se ha adaptado para ajustarlo a los requisitos exigidos.

Finalmente, los ejercicios y problemas con los que finaliza la unidad se han reducido en cantidad y se han modificado o bajado de nivel hasta adaptarse a lo convenido.

En la siguiente tabla se recoge una relación de actividades para atender y trabajar el aprendizaje cooperativo, el pensamiento comprensivo, el pensamiento crítico, la interdisciplinariedad, las TIC, el emprendimiento y la resolución de problemas. Unas están propuestas en el libro del alumnado (L.A.), y aquí se hace referencia a ellas indicando la página y la actividad, y otras, como se indica, se sugieren en esta Propuesta Didáctica (P.D.).

Una selección de estas sugerencias están marcadas en el libro del alumnado con un icono; aquí se han marcado con (*).

APRENDIZAJE COOPERATIVO	PENSAMIENTO COMPENSIVO	PENSAMIENTO CRÍTICO
Pág. 89. Actividad sugerida en esta P.D.	Pág. 89. Actividad sugerida en esta P.D.	Pág. 94. Actividad sugerida en esta P.D.
Pág. 91. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 90. Ejercicios resueltos (*)	
Págs. 92 y 93. Actividad sugerida en esta P.D.	Págs. 92 y 93. Problemas resueltos (*)	
Pág. 94. Piensa y practica (*)	Pág. 94. Ejercicio resuelto	
Págs. 95, 96, 97, 98 y 99. Piensa y practica	Pág. 95. Ejercicios resueltos	
Págs. 100 y 101. Actividades 1 a 20 (*)	Págs. 96 y 97. Problemas resueltos (*)	
Págs. 102 y 103. Actividades 31 a 49	Pág. 99. Problemas resueltos	

INTERDISCIPLINARIEDAD	TIC	EMPENDIMIENTO	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Pág. 88. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 88. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 89. Piensa y practica (*)	Todos los problemas propuestos en el libro del alumnado están encuadrados en este apartado. Aquí se señalan algunos que tienen especial interés.
Pág. 103. Sabías que...		Pág. 94. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Págs. 92 y 93. Piensa y practica (*)
		Pág. 103. Ingéniate las como puedes	Págs. 96 y 97. Piensa y practica (*)
			Pág. 99. Actividades 4 y 5
			Págs. 101, 102 y 103. Actividades 21 a 49. Actividad sugerida en esta P.D. (*)
			Pág. 103. En equilibrio

6 Ecuaciones

Algunos hitos en la resolución de ecuaciones...

...El pionero

Diofanto (siglo III) propuso problemas algebraicos complejos y los resolvió por métodos originales y muy interesantes. Pero su aportación careció de método y tuvo poco valor pedagógico.

...La sistematización

Al-Jwarizmi (siglo IX) fue quien, por primera vez, realizó un tratamiento sistemático y completo de la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado. Su libro *Al-jabr wa-l-muqabala*, elemental, didáctico y exhaustivo, fue muy conocido y estudiado y, posteriormente, traducido a todos los idiomas.

...Los italianos del siglo XVI

En el siglo XVI, varios algebristas italianos (**Tartaglia**, **Cardano**, **Ferrari**, **Fiore**...) mantuvieron unas interesantísimas, agitadas y fecundas discusiones sobre la resolución de distintos tipos de ecuaciones cúbicas (de tercer grado). Sus diatribas, en muchos casos, se dilucidaban en debates públicos a los que se retaban mediante pasquines. A pesar de que el tono de estos y de aquellas (pasquines y diatribas) distaba mucho de ser correcto, sirvieron para dar un gran impulso a la resolución de ecuaciones de grado superior.



Al-Jwarizmi se educó y trabajó en la Casa de la Sabiduría de Bagdad, un centro de investigación comparable con la Biblioteca de Alejandría.



Girolamo Cardano (1501-1576). Su libro "Ars Magna" contiene la primera solución publicada para las ecuaciones de tercer grado, basada en las investigaciones de Tartaglia y Scipione del Ferro.

1 Identidades y ecuaciones

UNIDAD 6

Una **ecuación** es una *propuesta de igualdad* que se cumple solo para algunos valores de la incógnita, y en algunos casos, para ninguno.

Ejemplos

- La igualdad $(x-3) \cdot (x+5) = 0$ es cierta para $x = 3$ y para $x = -5$. Pero no se cumple para ningún otro valor de x . Es una **ecuación** y 0 y -5 son sus **soluciones**.
- La igualdad $3x = 3x + 7$ no se cumple para ningún valor de x . Es una **ecuación sin solución**.
- Sin embargo, la igualdad $(x-3) \cdot (x+5) = x^2 + 2x - 15$ es cierta para cualquier valor de x (pruébalo). No es una auténtica ecuación. Decimos que es una **identidad**.

Las **soluciones** de una ecuación son los valores que hacen cierta la igualdad.

Resolver una ecuación es hallar su solución (o soluciones) o llegar a la conclusión de que no tiene.

En esta unidad vamos a repasar los métodos de resolución de ecuaciones que ya conoces y a aprender algunos nuevos.

Empezaremos resolviendo algunas "a ojo", con lo que sabemos, que es el método más inmediato, pero tiene el inconveniente de que, acaso, una ecuación tenga varias soluciones y no seamos capaces de ver todas ellas.

También hay otras ecuaciones para las cuales no tenemos ningún procedimiento de resolución. Se puede intentar llegar a una solución *tanteando*.

Ejercicio resuelto

Encontrar, tanteando, alguna solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 + 5 = 69$

b) $x^x = 3125$

c) $x^4 = 1000$

(Usa la calculadora)

a) Probamos para $x = 2, 3, 4, \dots$

$x = 2 \rightarrow 2^3 + 5 = 13$ NO ES SOLUCIÓN;

$x = 3 \rightarrow 3^3 + 5 = 32$ NO ES SOLUCIÓN;

$x = 4 \rightarrow 4^3 + 5 = 69$ SÍ ES SOLUCIÓN.

Hemos obtenido la solución $x = 4$.

b) Probando con $x = 3, 4, 5$ se llega a que 5 es solución, pues $5^5 = 3125$.

c) $5^4 = 625$ Por tanto, la solución está entre 5 y 6. Probamos con 5,3; 5,4;

$6^4 = 1296$ 5,5; 5,6; 5,7; ...

$5,6^4 = 983, \dots$ La solución es 5,6... Si quisiéramos afinar más, probaríamos con 5,61; 5,62; 5,63; ...

$5,7^4 = 1055, \dots$

Piensa y practica

1. Las siguientes ecuaciones tienen alguna solución entera. Hállala tanteando.

a) $5^x = 25$

c) $3^x = 81$

e) $\sqrt{x+3} = 4$

b) $(x-5)^2 = 4$

d) $3^{x-1} = 81$

f) $x^x = 256$

2. Las siguientes ecuaciones no tienen solución entera.

Tanteando, obtén la solución de cada una de ellas aproximando hasta las décimas.

a) $x^5 = 400$

c) $4^x = 200$

b) $x^4 = 5000$

d) $x^x = 1000$

Al iniciar la unidad

- A lo largo de la historia, en la búsqueda de caminos para resolver ecuaciones, destacan las figuras de Diofanto, por lo ingenioso de sus procedimientos; Al-Jwarizmi, por el orden y la sistematicidad de sus métodos; y los algebristas italianos del siglo XVI, por su genialidad.
- Esta lectura puede complementarse con las de las unidades 7 del libro de 2.º; y 6 y 7 del libro de 3.º.

Interdisciplinariedad

Se sugiere la siguiente actividad:

Al hilo de esta lectura, se puede reflexionar sobre la utilidad de las ecuaciones en otras ramas del saber, tales como la economía, la física, la arquitectura, etc.

TIC

Se sugiere buscar en Internet información sobre:

- Alguno de los personajes que aparecen en la lectura.
- Las discusiones y desavenencias entre Tartaglia y Cardano, a propósito de la autoría de ciertos avances en el saber algebraico.

ANOTACIONES

Sugerencias

- Comenzamos el estudio de la unidad recordando las diferencias que hay entre identidad y ecuación.
- La búsqueda de una solución por tanteo —mentalmente o haciendo uso de la calculadora— resulta un buen complemento de los procedimientos convencionales, ya que permite:
 - Afianzar los conceptos de ecuación y de solución.
 - Reforzar las destrezas operativas.
 - Enfrentarse a la resolución de ecuaciones que de otra manera no se podrían resolver en este nivel.

Aprendizaje cooperativo

Las actividades del "Piensa y practica" de esta página, y de todas aquellas en las que se pretende reforzar los conocimientos recién adquiridos, pueden realizarse solidariamente, en pequeño grupo, estimulando el aprendizaje entre iguales.

Pensamiento comprensivo

Los ejercicios resueltos de estas páginas, y de todas las siguientes, se pueden intentar resolver inicialmente con lo que ya saben los estudiantes, por tanteo, mediante ensayo-error, etc., detectando las dificultades y los bloqueos. Después, analizarán los procesos que ofrece el texto, poniendo en común sus conclusiones y resolviendo las dudas que les surjan.

Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) $x = 2$ b) $x = 3$; $x = 7$ c) $x = 4$

d) $x = 5$ e) $x = 13$ f) $x = 4$

2 a) $x = 3,3$ b) $x = 8,4$ c) $x = 3,8$ d) $x = 4,6$

2 Resolución de ecuaciones de primer grado

Una **ecuación de primer grado** es aquella en la que solo aparecen expresiones algebraicas de grado uno. Después de simplificarla, llegaremos a una igualdad del tipo $ax + b = 0$.

Recordemos, con un ejemplo, los pasos que conviene dar para resolver una ecuación de primer grado que tenga una fisonomía complicada.

$$\frac{3(x+1)}{4} - 2 = 2x - \frac{5(x-1)}{3}$$

Quitar paréntesis, si los hay.

$$\frac{3x+3}{4} - 2 = 2x - \frac{5x-5}{3}$$

Quitar denominadores. Se multiplican los dos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\begin{aligned} \text{mín.c.m. } (4, 3) &= 12 \\ \frac{12(3x+3)}{4} - 12 \cdot 2 &= 12 \cdot 2x - \frac{12(5x-5)}{3} \\ 3(3x+3) - 24 &= 24x - 4(5x-5) \end{aligned}$$

Reducir cada miembro.

$$\begin{aligned} 9x + 9 - 24 &= 24x - 20x + 20 \\ 9x - 15 &= 4x + 20 \end{aligned}$$

Transponer términos y reducir.

$$\begin{aligned} 9x - 4x &= 20 + 15 \\ 5x &= 35 \end{aligned}$$

Despejar la incógnita y hallar la solución.

$$x = \frac{35}{5} \rightarrow x = 7$$

Comprobar si el valor obtenido satisface la igualdad. Sustituyendo en cada miembro, debe obtenerse el mismo resultado.

$$\begin{aligned} \frac{3(7+1)}{4} - 2 &= \frac{3 \cdot 8}{4} - 2 = 6 - 2 = 4 \\ 2 \cdot 7 - \frac{5(7-1)}{3} &= 14 - \frac{5 \cdot 6}{3} = 14 - 10 = 4 \end{aligned}$$

Ejercicios resueltos

1. Resolver la siguiente ecuación:

$$5x - 4(2x + 3) = 5(x - 1) - 8x$$

$$\begin{aligned} 5x - 4(2x + 3) &= 5(x - 1) - 8x \\ 5x - 8x - 12 &= 5x - 5 - 8x \\ -3x - 12 &= -3x - 5 \\ -3x + 3x &= -5 + 12 \\ 0x &= 7 \end{aligned}$$

No tiene solución, ya que no hay ningún número que multiplicado por cero dé 7.

2. Resolver esta ecuación:

$$7 + 6(3x - 2) = 15x - (5 - 3x)$$

$$\begin{aligned} 7 + 6(3x - 2) &= 15x - (5 - 3x) \\ 7 + 18x - 12 &= 15x - 5 + 3x \\ 18x - 5 &= 18x - 5 \\ 18x - 18x &= -5 + 5 \\ 0x &= 0 \end{aligned}$$

Es una identidad. La igualdad se cumple para cualquier valor de x . Tiene infinitas soluciones.

90

UNIDAD 6

3. Resolver la ecuación siguiente:

$$\frac{3-x}{2} - \frac{2(x-2)}{3} = 4 - \frac{7(2x-1)}{9}$$

$$\frac{3-x}{2} - \frac{2(x-2)}{3} = 4 - \frac{7(2x-1)}{9} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Eliminar paréntesis.} \end{array} \right.$$

$$\frac{18(3-x)}{2} - \frac{18(2x-4)}{3} = 18 \cdot 4 - \frac{18(14x-7)}{9} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Eliminar denominadores.} \\ \text{mín.c.m. } (2, 3, 9) = 18 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} 27 - 9x - 12x + 24 &= 72 - 28x + 14 \\ 51 - 21x &= 86 - 28x \\ -21x + 28x &= 86 - 51 \\ 7x &= 35 \rightarrow x = \frac{35}{7} \rightarrow x = 5 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Reducir, transponer y despejar} \\ \text{la incógnita.} \end{array} \right.$$

Piensa y practica

Los ejercicios siguientes te servirán para adquirir agilidad en la resolución de ecuaciones. En la parte de abajo se da la solución; así podrás detectar y corregir los errores cometidos.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- $3x + 11 + 2x = 5 + x - 6$
- $5 - 7x + 2 - 6x = 10x - 7 - 2x$
- $6x - 15 + 3x = x - 8 + x + 1$
- $5x + 4 - 13x - 9 - 2x = 0$
- $0 = 4x - 3 - x + 1 - 3x + 2$

3. Quita denominadores y resuelve.

- $2x - 1 = x - \frac{x}{5}$
- $5x - \frac{x}{3} + 2 = \frac{2x}{3}$
- $1 - \frac{x}{5} = x + \frac{1}{10}$
- $\frac{x}{2} + 1 = \frac{x}{5} - x$
- $\frac{2x}{5} + \frac{x}{2} = x + \frac{3}{10}$
- $\frac{x}{2} + \frac{1}{6} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$

2. Quita paréntesis y resuelve.

- $8 + (5x - 6) = 3x - (x + 4)$
- $x - (1 - 4x) - (6x - 5) + 1 = 0$
- $3x - 1 - (2x + 1) = 1 - (x + 2) - 3$
- $0 = (1 - x) + 2(x + 1) - 3(1 - x)$
- $3(5x - 7) + 2(x - 1) = 5x - 3$
- $5x + 3(1 - x) = 12 + 2(x - 5)$
- $4(2 + 3x) = 10(x - 1) + 2(x + 9)$
- $2(x - 3) - 5x + 7 = 11(1 - x) - (1 + 3x) - x$
- $10[2x - (x - 1)] + 3 = 8x - 5(x + 3)$
- $2x + 3 = 8 - 3[9 - 2(3x + 5)]$
- $3x - 5[1 - 3(2x + 4)] = 3[1 - 4(x - 1)]$

4. Resuelve.

- $2x - \frac{x}{3} = \frac{3x+1}{5} - 1$
- $x - \frac{2x+3}{4} = \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$
- $\frac{2x-3}{2} - \frac{x+3}{4} = \frac{x-1}{2}$
- $x + \frac{2x-3}{9} + \frac{x-1}{3} = \frac{14x-6}{9}$
- $x + \frac{3(x-2)}{9} = \frac{5(x-1)}{4} + \frac{7}{12}$
- $\frac{3(x+2)}{2} + \frac{x-1}{5} = \frac{2(x+1)}{5} + \frac{37}{10}$
- $\frac{-x-1}{6} - \frac{3(x+5)}{12} = \frac{2(11-x)}{9} - 6$

1. a) -3, b) 2/3, c) Sin solución, d) -1/2, e) Infinitas soluciones

2. a) -2, b) 5, c) -1, d) 0, e) 5/3, f) Sin solución, g) Infinitas soluciones, h) 3/4, i) -4, j) -1/2, k) -8/9

3. a) 5/6, b) -1/2, c) 3/4, d) -10/13, e) -3, f) 1/2

4. a) -3/4, b) Sin solución, c) 7, d) Infinitas soluciones, e) 0, f) 1, g) 11

En la web Repasa la resolución de ecuaciones de primer grado.

91

Sugerencias

- Puesto que el alumnado no se enfrenta a la resolución de ecuaciones de primer grado por primera vez, convendría recordarles los pasos necesarios para resolverlas mediante ejercicios secuenciados en orden de dificultad:

- 1.º Ecuaciones sin denominadores: actividades 1 y 2.
- 2.º Ecuaciones con denominadores, pero sin paréntesis: actividades 3 y 4, apartados a), b), c) y d).
- 3.º Ecuación con denominadores y paréntesis: actividad 4, apartados e), f) y g).

Aprendizaje cooperativo

Para las actividades del "Piensa y practica" de la página 91, y para todas aquellas actividades destinadas al entrenamiento y mejora de la capacidad operativa, se sugiere abordar el trabajo en pequeños grupos. En un primer momento, los estudiantes realizarán las actividades individualmente. Después, contrastarán los resultados con los demás, resolviendo entre ellos las discrepancias. El docente resolverá los desacuerdos y los bloqueos.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 2 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:
Refuerzo: Ejercicios 1 a 4 de la pág. 20.
Ampliación: Ejercicios 5 y 6 de la pág. 21.

Soluciones de "Piensa y practica"

- 1 a) $x = -3$ b) $x = \frac{2}{3}$ c) No hay solución.
d) $x = -\frac{1}{2}$ e) Infinitas soluciones.

- 2 a) $x = -2$ b) $x = 5$ c) $x = -1$
d) $x = 0$ e) $x = \frac{5}{3}$ f) No hay solución.
g) Infinitas soluciones. h) $x = \frac{3}{4}$ i) $x = -4$
j) $x = -\frac{1}{2}$ k) $x = -\frac{8}{9}$
- 3 a) $x = \frac{5}{6}$ b) $x = -\frac{1}{2}$ c) $x = \frac{3}{4}$
d) $x = -\frac{10}{13}$ e) $x = -3$ f) $x = \frac{1}{2}$
- 4 a) $x = -\frac{3}{4}$ b) No hay solución. c) $x = 7$
d) Infinitas soluciones. e) $x = 0$ f) $x = 1$
g) $x = 11$

ANOTACIONES

Problemas resueltos

1. El sueldo de una cajera del supermercado, aumentado en su tercera parte y 80 €, se iguala con el de su encargada que gana 1200 €. ¿Cuánto gana la cajera?

- Elegimos la incógnita y codificamos los elementos que intervienen:
Sueldo de la cajera $\rightarrow x$
Ese sueldo, más su tercera parte y más 80 € $\rightarrow x + \frac{x}{3} + 80$
Sueldo de la encargada $\rightarrow 1200$ €
- Planteamos la ecuación y la resolvemos:
 $x + \frac{x}{3} + 80 = 1200 \rightarrow x + \frac{x}{3} = 1120 \rightarrow 3x + x = 3 \cdot 1120 \rightarrow x = 840$

Solución: La cajera gana 840 €.

2. Una porción de pizza cuesta 40 céntimos más que un bote de refresco. Por tres botes de refresco y cuatro porciones de pizza, hemos pagado 10 €. ¿Cuánto cuesta cada bote y cuánto cada porción?

- Coste de un bote de refresco $\rightarrow x$
Coste de una porción de pizza $\rightarrow x + 0,40$
La ecuación: Tres botes y cuatro porciones cuestan 10 €.
 $3x + 4(x + 0,40) = 10 \rightarrow x = 1,20$
- Solución: Un bote de refresco cuesta 1,20 €.
Una porción de pizza cuesta $1,20 + 0,40 = 1,60$ €.

3. Entre mi hermano y yo tenemos ahorrados 248 €, y si yo le diera trece, ambos tendríamos lo mismo. ¿Cuánto tenemos cada uno?

Organizamos los elementos del problema en una tabla:

	TENEMOS	SI LE DOY 13 €
YO	x	$x - 13$
MI HERMANO	$248 - x$	$248 - x + 13$

La ecuación:

$$x - 13 = 248 - x + 13 \rightarrow x = 137$$

Solución: Yo tengo 137 €, y mi hermano, $248 - 137 = 111$ €.

Piensa y practica

- Si al doble de un número le sumamos la cuarta parte de dicho número, el resultado es 189. ¿Cuál es el número?
- Eloísa tiene 26 años menos que su madre. Entre las dos suman medio siglo. ¿Qué edad tiene cada una?
- Un bote de tomate y un frasco de mostaza pesan 800 gramos. El bote pesa 150 gramos más que el frasco. ¿Cuánto pesa cada uno?
- Tres hermanos se llevan, cada uno al siguiente, un año, y entre los tres suman 48 años. ¿Cuáles son sus edades?
- La suma de tres números consecutivos es cuatro veces el menor de ellos. ¿Qué números son?
- Entre mi amigo y yo llevamos en los bolsillos 8,20 €. Si yo le diera 80 céntimos, tendríamos los dos lo mismo. ¿Cuánto llevamos cada uno?
- En un concurso de televisión, dotado con un premio total de 1000 €, el concursante A se llevó el doble que el concursante B pero 100 € menos que el concursante C. ¿Cuánto se llevó cada uno?
- Doña Laura lleva una vida muy regular, y duerme todos los días una hora menos de la mitad del tiempo que está despierta. ¿Cuánto tiempo duerme?
- Por tres cafés y dos cruasanes hemos pagado 7,70 €. ¿Cuál es el precio de un cruasán, sabiendo que cuesta 60 céntimos menos que un café?

Problemas resueltos

4. Un bodeguero tiene dos tipos de vino, uno de calidad superior, a 5 €/l, y otro de calidad inferior, a 3,60 €/l. ¿Cuántos litros del primero debe añadir a un barril que contiene 100 litros del segundo, para que la mezcla resulte a 4 €/l?

Organizamos los elementos:

	CANTIDAD (l)	PRECIO (€/l)	VALOR (€)
VINO INFERIOR	100	3,60	$100 \cdot 3,60$
VINO SUPERIOR	x	5	$5x$
MEZCLA	$100 + x$	4	$4 \cdot (100 + x)$

La ecuación: La suma del valor de los componentes es igual al valor de la mezcla.
 $360 + 5x = 4 \cdot (100 + x) \rightarrow x = 40$

Solución: Se han de añadir 40 litros del vino de calidad superior.

5. Una camisa y una falda costaban lo mismo antes de las rebajas. Ahora he comprado ambas prendas por 99 €, con una rebaja del 20% en la camisa y del 15% en la falda. ¿Cuánto costaba cada prenda antes de la rebaja?

Coste original de la camisa = coste original de la falda = x
Coste de la camisa rebajada un 20%: $x - 0,20x \rightarrow 0,80x$
Coste de la falda rebajada un 15%: $x - 0,15x \rightarrow 0,85x$
Precio pagado por ambas prendas rebajadas: 99 €

La ecuación:

$$0,80x + 0,85x = 99 \rightarrow 1,65x = 99 \rightarrow x = 60$$

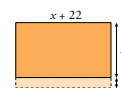
Solución: Cada una de las prendas costaba 60 € antes de las rebajas.

6. Una finca rectangular es 22 metros más larga que ancha. El dueño la amplía en 5 m a lo ancho, comprándole terreno al propietario del campo colindante. Así, la valla que la rodea aumenta su longitud en un 5%. ¿Cuáles eran las dimensiones originales de la finca?

Perímetro original $\rightarrow 2[x + (x + 22)]$
5% del perímetro $(1/20) \rightarrow \frac{2[x + (x + 22)]}{20}$
Aumento del perímetro $\rightarrow 5 \text{ m} + 5 \text{ m} = 10 \text{ m}$
La ecuación: El perímetro aumenta en un 5%.

$$\frac{2[x + (x + 22)]}{20} = 10 \rightarrow 4x + 44 = 200 \rightarrow x = 39$$

Solución: Las dimensiones originales de la finca eran 39 m de ancho y $39 + 22 = 61$ m de largo.



Piensa y practica

- Moliendo juntas dos clases de café, la primera de 7,50 €/kg y la segunda de 5,70 €/kg, se han obtenido 90 kg de mezcla que sale a 6,50 €/kg. ¿Cuánto café de cada clase se ha utilizado en la mezcla?
- Hace dos años compré una bicicleta y un equipo de música por 260 €. Los acabo de vender por un total de 162 €, habiendo perdido el 30% con la bicicleta y el 40% con el equipo de música. ¿Cuánto me costó cada objeto?
- Los ahorros de Adela quintuplican a los de su hermana Beatriz, pero si Adela hiciera a Beatriz una transferencia de 800 €, solo serían el triple. ¿Cuánto tiene cada una?
- Una finca rectangular es 40 metros más larga que ancha. Al urbanizar la zona, se le recortan 8 m a lo largo y 5 m a lo ancho. Así, su perímetro se reduce en una décima parte. ¿Cuáles eran las dimensiones primitivas de la finca?
- Aumentando un número en un 20% y restándole dos unidades, se obtiene el mismo resultado que sumándole su séptima parte. ¿Qué número es?

Sugerencias

- Si es importante que el alumnado sepa resolver con destreza una ecuación de primer grado, también lo es que sepa aplicarlo en la resolución de problemas.
- Es el momento de recordarles la importancia de leer pausadamente el enunciado, identificar los datos conocidos y asignar incógnita a lo desconocido, llegando finalmente a obtener una ecuación de primer grado que relacione los diferentes datos del problema.
- Obtenida la solución, llega el momento de reflexionar si tiene sentido o no, teniendo en cuenta el contexto del problema.

Aprendizaje cooperativo

Las actividades de los "Piensa y practica" de estas páginas, y en general todas las destinadas a la resolución de problemas mediante ecuaciones, pueden realizarse en pequeño grupo, estimulando el aprendizaje entre iguales.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 2 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:
Refuerzo: Ejercicios 1, 2 y 4 de la pág. 44.
Ampliación: Ejercicio 5 de la pág. 44. Ejercicio 10 de la pág. 45.

Soluciones de "Piensa y practica"

- El número es 84.
- Eloísa tiene 12 años. Su madre tiene 38 años.
- El bote de tomate pesa 475 g.
El frasco de mostaza pesa 325 g.

8 Las edades de los hermanos son 15, 16 y 17 años.

9 Los números son el 3, el 4 y el 5.

10 Yo llevo 4,90 € y mi amigo lleva 3,30 €.

11 A se lleva $180 \cdot 2 = 360$ €. B se lleva 180 €. C se lleva $360 + 100 = 460$ €.

12 Laura duerme 7 h y $\frac{1}{3}$ de hora; es decir, 7 horas y 20 minutos.

13 Un café cuesta 1,78 €. Un cruasán cuesta 1,18 €.

14 Se han mezclado 40 kg de café caro con 50 kg de café barato.

15 Beatriz tiene ahorrados 160 €. Adela tiene ahorrados $5 \cdot 1600 = 8000$ €.

16 El número buscado es 35.

17 Bicicleta: 60 €.

Equipo de música: $260 - 60 = 200$ €.

18 La finca medía, en su origen, 45 m de ancho y 85 m de largo.

ANOTACIONES

3 Ecuaciones de segundo grado

Las ecuaciones de segundo grado son de la forma:
 $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$

Ecuaciones completas

Cuando $b \neq 0$ y $c \neq 0$, se dice que la ecuación es completa y se resuelve aplicando la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \begin{cases} \text{Si } b^2 - 4ac > 0, & \text{hay dos soluciones.} \\ \text{Si } b^2 - 4ac = 0, & \text{hay una solución.} \\ \text{Si } b^2 - 4ac < 0, & \text{no hay ninguna solución.} \end{cases}$$

Cálculo mental

Resuelve sin utilizar la fórmula y, si es posible, a ojo:

- $x^2 = 9$
- $x^2 - 9 = 0$
- $5x^2 - 20 = 0$
- $3x^2 - 300 = 0$
- $(x - 5)^2 = 25$
- $(x - 5)^2 = 4$
- $3(x - 2)^2 = 3$
- $3(x - 2)^2 - 3 = 0$
- $7(x - 4)^2 = 63$
- $7(x - 4)^2 - 63 = 0$

Ejercicio resuelto

Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $5x^2 + 3x - 2 = 0 \rightarrow a = 5; b = 3; c = -2$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2)}}{2 \cdot 5} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{10} = \frac{-3 \pm 7}{10} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{5} \\ x_2 = -1 \end{cases} \text{ Dos soluciones.}$$

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0 \rightarrow a = 9; b = 6; c = 1$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2 \cdot 9} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{-6 \pm 0}{18} = -\frac{1}{3}. \text{ Solución única.}$$

c) $x^2 - 3x + 5 = 0 \rightarrow a = 1; b = -3; c = 5$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-11}}{2}. \text{ Sin solución.}$$

Ecuaciones incompletas

Las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, cuando b o c son nulos, se pueden resolver por métodos sencillos sin necesidad de la fórmula anterior.

• Si $b = 0$, despejamos directamente x^2 . Por ejemplo:

$$3x^2 - 48 = 0 \rightarrow 3x^2 = 48 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm \sqrt{16} \rightarrow x = \pm 4$$

• Si $c = 0$, factorizamos sacando factor común. Por ejemplo:

$$2x^2 - x = 0 \rightarrow x(2x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

En la web

Amplia tus conocimientos aprendiendo a resolver ecuaciones bicuadradas.

Piensa y practica

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- | | | | | | |
|-----------------------|--------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|
| a) $x^2 - 7x + 6 = 0$ | b) $x^2 - 20x + 100 = 0$ | c) $3x^2 + 5x + 11 = 0$ | d) $6x^2 + 5x + 1 = 0$ | e) $10x^2 - 3x - 1 = 0$ | f) $2x^2 - 8x + 8 = 0$ |
|-----------------------|--------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|

2. Resuelve estas ecuaciones:

- | | |
|--------------------|---------------------|
| a) $2x^2 - 50 = 0$ | b) $x^2 - 1 = 0$ |
| c) $3x^2 + 5 = 0$ | d) $2x^2 + 10x = 0$ |
| e) $4x^2 - 3 = 0$ | f) $7x^2 - 5x = 0$ |

Recuerda

$$\begin{aligned} (x-a)^2 &= x^2 - 2ax + a^2 \\ (x+a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2 \\ (x+a)(x-a) &= x^2 - a^2 \end{aligned}$$

En la web

Actividades para reforzar la resolución de ecuaciones de segundo grado complicadas.

Ejercicios resueltos

1. $(x+5)^2 - 2(x+1)(x-3) = 3x + 59$

Desarrollamos el cuadrado, operamos y quitamos paréntesis:

$$\begin{aligned} (x^2 + 10x + 25) - 2(x^2 - 3x + x - 3) &= 3x + 59 \\ x^2 + 10x + 25 - 2x^2 + 6x - 2x + 6 &= 3x + 59 \rightarrow x^2 - 11x + 28 = 0 \\ a = 1; b = -11; c = 28 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28}}{2 \cdot 1} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 112}}{2} = \frac{11 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

2. $\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x+2)(x-2)}{4} = \frac{3}{4}$

Quitamos los denominadores multiplicando por 4:

$$2(x-1)^2 - (x+2)(x-2) = 3$$

Efectuamos los productos indicados y después quitamos los paréntesis:

$$\begin{aligned} 2(x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 4) &= 3 \\ 2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 4 &= 3 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \\ a = 1; b = -4; c = 3 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Piensa y practica

3. Elimina los paréntesis, si los hay, y resuelve.

- $2x^2 - 7 = 3x - x^2 - 1$
- $3(x-1) + 5x^2 = x(x+3) + 1$
- $3x(2-x) - 2 = 4x(x-1) + x^2$
- $16 - 5x(2x-3) = x - 2x(3x-1)$

4. Opera y resuelve.

- $x^2 + 2x = (x+2)(1-x)$
- $(x+2)(x-1) + 2 = x(2-x)$
- $3x - (x-2)(x+2) = 2(x^2-1)$
- $x(x-5) + x^2 = (3x-1)(x-1)$
- $(3x-2)(5x+1) = 4(x-1)$
- $15 - (x+2)^2 = (x-3)^2 + 2x$

En la web

Resolución de ecuaciones de segundo grado.

5. Elimina los denominadores y resuelve.

- $x(2x+1) - \frac{(x-1)^2}{2} = 3$
- $\frac{x(x+3)}{2} - \frac{(x+1)^2}{3} + \frac{1}{3} = 0$
- $\frac{7-x^2}{8} - \frac{1}{2} = \frac{2x^2+1}{4}$
- $1 - \frac{x}{6} = \frac{(x-2)x}{2} + \frac{2}{3}$
- $\frac{2(x+3)(x-3)}{5} + \frac{x}{2} = \frac{x(x-2)}{2}$
- $\frac{(x+2)^2}{7} - x = \frac{x(x-4)}{2} + 1$
- $\frac{(2x-3)^2}{9} + \frac{x}{2} = \frac{(x-1)^2}{6} + 5$

Sugerencias

- En este nivel se ha de pretender que los alumnos y las alumnas reconozcan de manera inmediata la expresión general que define a una ecuación de segundo grado.
- Así mismo, recordar cómo se resuelve una ecuación completa, identificar las incompletas y resolverlas por métodos sencillos, son destrezas que el alumnado tiene que ir dominando a través de la práctica.
- Se busca que lleguen a la conclusión de que las ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$, siendo a y c número reales positivos, no tienen solución; mientras que las ecuaciones $ax^2 + bx = 0$ tienen siempre dos soluciones, una de las cuales es $x = 0$.
- Se propone, en el margen de la página 94, la resolución mental de ecuaciones de 2.º grado. Es muy interesante que el alumnado trabaje sobre ello para reforzar el concepto de solución de una ecuación, así como los procedimientos para resolverlas por tanteo.
- En la página 95 se trabaja la resolución de ecuaciones de 2.º grado en las que haya que realizar ciertas manipulaciones para llegar a la expresión general. Es una buena oportunidad para que los estudiantes pongan a prueba su dominio de las herramientas algebraicas y muy en especial de las identidades notables.

Pensamiento crítico

Se sugiere la siguiente actividad:

Descubrir y describir, de forma general, la relación de los coeficientes a , b y c , de una ecuación de segundo grado, con sus soluciones (discusión de soluciones de una ecuación de segundo grado).

Emprendimiento

Se sugiere la actividad siguiente:

Justificar la fórmula que permite resolver las ecuaciones de segundo grado completas. Buscar información en la biblioteca, en Internet, etc.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 2 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:
 Refuerzo: Ejercicio 1 de la pág. 22. Ejercicios 2 y 3 de la pág. 23.
 Ampliación: Ejercicios 4 y 5 de la pág. 23.

Soluciones de "Piensa y practica"

- a) $x = 6; x = 1$
 - b) $x = 10$
 - c) No existe solución.
 - d) $x = -\frac{1}{3}; x = -\frac{1}{2}$
 - e) $x = \frac{1}{2}; x = -\frac{1}{5}$
 - f) $x = 2$
- a) $x = 5; x = -5$
 - b) $x = 1; x = -1$
 - c) No tiene solución.
 - d) $x = 0; x = -5$
 - e) $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$
 - f) $x = 0; x = \frac{5}{7}$
- a) $x = 2; x = -1$
 - b) $x = 1; x = -1$
 - c) $x = 1; x = \frac{1}{4}$
 - d) $x = 4; x = -1$
- a) $x = \frac{1}{2}; x = -2$
 - b) $x = 0; x = \frac{1}{2}$
 - c) $x = 2; x = -1$
 - d) No tiene solución.
 - e) $x = \frac{2}{5}; x = \frac{1}{3}$
 - f) $x = 1; x = -1$
- a) $x = 1; x = -\frac{7}{3}$
 - b) $x = 0; x = -5$
 - c) $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$
 - d) $x = 2; x = -\frac{1}{3}$
 - e) $x = 3; x = 12$
 - f) $x = \frac{11 - \sqrt{91}}{5}; x = \frac{11 + \sqrt{91}}{5}$
 - g) $x = 0; x = -\frac{1}{5}$

4 Otros tipos de ecuaciones

No lo olvides

Para resolver una ecuación de este tipo:
 $[\dots] \cdot [\dots] \cdot [\dots] = 0$
 es decir, "producto de varios factores igualado a cero", igualamos a cero cada uno de los factores y resolvemos las correspondientes ecuaciones.

Hay ecuaciones que, aunque no sean ni de primer ni de segundo grado, podrás resolver aplicando lo que ya sabes. Veamos algunos ejemplos.

Ecuaciones factorizadas

Ejemplo: Queremos resolver la ecuación $x(x-1)(x^2-5x+6) = 0$.

En el primer miembro aparece el producto de tres factores. Para que un producto sea cero, es necesario que uno de los factores sea cero.

Por tanto, igualamos a cero cada uno de los factores:

$$x(x-1)(x^2-5x+6) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x-1 = 0 \rightarrow x_2 = 1 \\ x^2-5x+6 = 0 \rightarrow x_3 = 2 \\ \rightarrow x_4 = 3 \end{cases}$$

La ecuación tiene cuatro soluciones: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ y $x_4 = 3$.

No lo olvides

Si en una ecuación aparecen denominadores algebraicos, se suprimen multiplicando los dos miembros por ellos.

Las soluciones obtenidas hay que comprobarlas en la ecuación inicial.

Ecuaciones con x en el denominador

Ejemplo: Vamos a resolver la ecuación $\frac{8}{x} - 3 = \frac{5}{x+3}$.

• Para suprimir los denominadores, multiplicamos todo por $x \cdot (x+3)$:

$$8 \cdot (x+3) - 3 \cdot x \cdot (x+3) = 5x \rightarrow -3x^2 - 6x + 24 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

• En este tipo de ecuaciones (con x en el denominador), al multiplicar por factores que llevan la incógnita, se pueden introducir soluciones falsas. Por eso es necesario comprobar las soluciones obtenidas sustituyéndolas en la ecuación inicial. En el caso que nos ocupa, ambas soluciones son válidas:

$$\frac{8}{2} - 3 = \frac{5}{2+3} \quad \frac{8}{-4} - 3 = \frac{5}{-4+3}$$

Por tanto, la ecuación inicial tiene dos soluciones: $x_1 = 2$ y $x_2 = -4$.

Piensa y practica

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- $(x-4)(x-6) = 0$
- $(x+2)(x-3) = 0$
- $(x+1)(3x-5) = 0$
- $(3x+1)(2x-3) = 0$
- $x(x^2-64) = 0$
- $3x(x^2+x-2) = 0$
- $(x+1)(x^2-4) = 0$
- $(2x+1)(x^2+5x-24) = 0$
- $(x+3)\left(\frac{1}{x}-4\right) = 0$
- $(x-4)\left(\frac{4}{3x-1}-2\right) = 0$

2. Elimina los denominadores y resuelve.

- $\frac{12}{x} + 1 = x + 2$
- $\frac{7}{x} - 2 = x + \frac{4}{x}$
- $\frac{5}{x^2+1} + 1 = \frac{10}{x^2+1}$
- $\frac{2}{3x-1} + x = \frac{x+3}{3x-1}$
- $\frac{5}{x-3} - 1 = x$
- $\frac{8}{x} - 3 = \frac{5}{x+3}$
- $\frac{15}{x-1} = \frac{12}{x} + 1$
- $\frac{7}{x+2} + 2 = \frac{9}{x-2}$

98

UNIDAD 6

Ecuaciones con radicales

No lo olvides

Para resolver una ecuación en la que aparece un radical:

- Se aísla el radical en uno de los miembros.
- Se elevan al cuadrado los dos miembros, con lo que desaparece el radical.
- Se resuelve la ecuación resultante.
- Se comprueba la validez de cada solución sobre la ecuación inicial.

Ejemplo: Resolvamos la ecuación $\sqrt{x^2+5} + 1 = 2x$.

• Aislamos el radical en un miembro, pasando al otro lo demás:

$$\sqrt{x^2+5} = 2x - 1$$

• Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$(\sqrt{x^2+5})^2 = (2x-1)^2 \rightarrow x^2+5 = 4x^2-4x+1$$

• Reducimos la ecuación a la forma general y la resolvemos:

$$3x^2 - 4x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2/3 \end{cases}$$

• También aquí será necesario comprobar las soluciones, ya que, al elevar al cuadrado, pueden aparecer soluciones que no lo son de la ecuación original.

Comprueba que $\sqrt{2^2+5} + 1 = 2 \cdot 2$ y que $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+5} + 1 \neq 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$.

En este caso, $x = 2$ es solución, pero $x = -2/3$ no lo es.

Problemas resueltos

1. Con motivo de la jubilación de un empleado, varios compañeros deciden regalarle, como recuerdo, un reloj que cuesta 240 €. Al conocer la idea, se apuntan otros cuatro más y, así, tocan todos a 10 € menos. ¿Cuántos participan finalmente en la compra del regalo?

Finalmente participan x empleados, y cada uno deberá poner $\frac{240}{x}$ euros. Originalmente eran $x-4$, y a cada uno le tocaba pagar $\frac{240}{x-4}$ euros. La diferencia entre ambas cantidades es de 10 €:

$$\frac{240}{x-4} - \frac{240}{x} = 10 \rightarrow 240x - 240(x-4) = 10x(x-4) \rightarrow$$

$$\rightarrow 10x^2 - 40x - 960 = 0 \rightarrow x^2 - 4x - 96 = 0 \begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = -28 \end{cases}$$

Solución: Finalmente participan 12 compañeros en la compra de regalo.

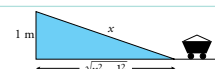
2. Para salvar un desnivel de un metro, se ha construido una rampa que es 10 cm más larga que su proyección horizontal. ¿Cuál es la longitud de la rampa?

La longitud de la rampa, x , se diferencia en 0,1 m de su proyección horizontal.

Es decir, $x - \sqrt{x^2-1} = 0,1$.

$$x - 0,1 = \sqrt{x^2-1} \rightarrow (x-0,1)^2 = x^2-1 \rightarrow x^2-0,2x+0,01 = x^2-1 \rightarrow -0,2x = -1,01 \rightarrow x = 5,005 \text{ m}$$

Solución: La rampa mide 5 m y 5 mm.



Piensa y practica

3. Resuelve.

- $\sqrt{x} - 3 = 0$
- $\sqrt{x} + 2 = x$
- $\sqrt{4x+5} = x+2$
- $\sqrt{x+1} - 3 = x-8$
- $3\sqrt{x-1} = 2x-11$
- $x = \sqrt{2x^2-1}$
- $\sqrt{2x^2-2} = 1-x$
- $\sqrt{3x^2+4} = \sqrt{5x+6}$

En la web Resolución de ecuaciones con radicales.

4. Un comerciante de un mercadillo ha obtenido 240 € por la venta de cierta cantidad de camisetas. Habría obtenido lo mismo vendiendo 6 unidades menos, pero dos euros más caras. ¿Cuántas camisetas ha vendido?

5. Piensa en un triángulo rectángulo y escribe el enunciado de un problema que se resuelva con la ecuación $\sqrt{x^2+8} = x+2$. Da la solución.

99

Sugerencias

- Pretendemos mostrar aquí la resolución de ecuaciones que, en principio, no son de segundo grado, pero que con ciertas modificaciones podemos llegar a convertirlas en este tipo.
- La resolución de ecuaciones del tipo $(\dots) \cdot (\dots) \cdot \dots \cdot (\dots) = 0$ se puede presentar como una ampliación del método usado para resolver la ecuación $ax^2 + bx = 0$. Se debe insistir en que esta forma de resolución solo es válida cuando en uno de los dos miembros de la ecuación hay un 0.
- La resolución de ecuaciones con x en el denominador o bajo el signo radical se reduce a tener claro un procedimiento —cálculo del mínimo común múltiplo entre denominadores o eliminación de la raíz— que permita reducir la ecuación original a una de primer o segundo grado, cuyas resoluciones ya son conocidas.
- Por otro lado, es conveniente recordar la necesidad de comprobar todas las soluciones obtenidas al resolver una ecuación con x en el denominador o con radicales.
- Dada la variedad de ecuaciones con las que los estudiantes se han de enfrentar por primera vez, se recomienda que resuelvan muchas, con el fin de que asimilen y afiancen los mecanismos de resolución vistos para cada modelo de ecuación.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 2 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

Refuerzo: Ejercicio 1 de la pág. 24. Ejercicio 2 de la pág. 25. Ejercicios 1 y 2, apartados a) a h), de la pág. 27. Ejercicio 1 de la pág. 28. Ejercicio 1 de la pág. 29.

Ampliación: Ejercicios 3 y 4 de la pág. 25. Ejercicio 2, apartados i) a m), de la pág. 27. Ejercicios 2 y 3 de la pág. 28. Ejercicios 2 y 3 de la pág. 29. Ejercicio 3 de la pág. 44. Ejercicios 16 y 17 de la pág. 47.

Soluciones de "Piensa y practica"

- $x = 4$; $x = 6$
 - $x = -2$; $x = 3$
 - $x = -1$; $x = \frac{5}{3}$
 - $x = 0$; $x = 8$; $x = -8$
 - $x = -1$; $x = 2$; $x = -2$
 - $x = -3$; $x = \frac{1}{4}$
- $x = 3$; $x = -4$
 - $x = 1$; $x = -3$
 - $x = 2$; $x = -2$
 - $x = -2$; $x = 4$
 - $x = -2$; $x = 6$
- $x = 9$
 - $x = 4$
 - $x = 1$; $x = -1$
 - $x = 8$
 - $x = 10$
 - $x = 2$; $x = -\frac{1}{3}$
 - $x = -3$; $x = 1$
- Se vendieron 30 camisetas.
- 8 cm y 30 cm miden los catetos, y 32 cm, la hipotenusa.

ANOTACIONES

Ejercicios y problemas

Practica

Ecuaciones: soluciones por tanteo

1. Busca por tanteo una solución exacta de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2^x + 3 = 32$ b) $\sqrt{2x+1} = 9$
c) $x^x + 1 = 8$ d) $(x-1)^3 = 27$

2. Las siguientes ecuaciones tienen más de una solución entera. Búscalas tanteando.

a) $(x+1)^2 = 4$ b) $(x+1)(x-3) = 0$
c) $x^2 = 2x$ d) $3(x-2)^2 = 3$

3. Busca por tanteo, con la calculadora, una solución aproximada hasta las décimas.

a) $x^3 + x^2 = 20$ b) $x^x = 35$
c) $3^x = 1000$ d) $x^3 = 30$

Ecuaciones de primer grado

4. Quita paréntesis y resuelve.

a) $5(x-1) - 6x + 2 = 3(1-x) - (1-3x)$
b) $7[x-2(x+1)] - 4 = 3x - 4(x+3)$
c) $x+5 = 3x-2[1-3(2x-1)]$
d) $2x-3[8-4(x-1)] = 2[14-3(x-1)]$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1-2x}{9} = 1 - \frac{x+4}{6}$
b) $\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} = \frac{x+1}{4}$
c) $\frac{x-3}{2} - \frac{5x+1}{3} = \frac{1-9x}{6}$
d) $\frac{2x-5}{4} - \frac{x-1}{5} = 1 - \frac{2x+1}{20}$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3-x}{2} - \frac{2(x-2)}{3} = 4 - \frac{7(2x-1)}{9}$
b) $\frac{1+12x}{4} + \frac{x-4}{2} = \frac{3(x+1) - (1-x)}{8}$
c) $\frac{3x-2}{6} - \frac{4x+1}{10} = \frac{-2}{15} - \frac{2(x-3)}{4}$
d) $\frac{2x-3}{6} - \frac{3(x-1)}{4} - \frac{2(3-x)}{6} + \frac{5}{8} = 0$

7. Las siguientes ecuaciones son de primer grado.

Compruébalo y resuélvelas:

a) $(x+1)^2 + (x-2)^2 = (x+2)^2 + (x-1)^2$
b) $4(x-3)(x+3) - (2x+1)^2 = 3$
c) $\frac{x+3}{5} + \frac{(x-1)^2}{4} = \frac{x^2+1}{4}$
d) $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(2x-1)^2}{16} = \frac{35}{16}$

Ecuaciones de segundo grado

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ b) $2x^2 - 7x - 4 = 0$
c) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ d) $x^2 + x + 2 = 0$

9. Resuelve.

a) $4x^2 - 64 = 0$ b) $3x^2 - 9x = 0$
c) $2x^2 + 5x = 0$ d) $2x^2 - 8 = 0$

10. Resuelve estas ecuaciones de segundo grado:

a) $-2x^2 - x + 3 = 0$ b) $25 - 100x^2 = 0$
c) $\frac{5}{2}x^2 + 3x = 0$ d) $-x^2 + 3x + 10 = 0$

11. Resuelve.

a) $(x-3)(x+3) + (x-4)(x+4) = 25$
b) $(x+1)(x-3) + (x-2)(x-3) = x^2 - 3x - 1$
c) $x(x-3) + (x+4)(x-4) = 2 - 3x$
d) $3x(x+4) - x(x-1) = 13x + 8$

12. Las siguientes ecuaciones son de segundo grado e incompletas. Resuélvelas sin aplicar la fórmula general.

a) $(3x+1)(3x-1) + \frac{(x-2)^2}{2} = 1 - 2x$
b) $\frac{x^2+2}{3} - \frac{x^2+1}{4} = \frac{x+5}{12}$
c) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{3} = \frac{3x-2}{6} + \frac{x^2}{3}$

13. Resuelve.

a) $(2x-3)^2 - 19 = 3x(x-5)$
b) $x(1-2x) = (1-2x)^2$
c) $(x-4)^2 + 8(x+1) = 17$
d) $(x-2)^2 + (2x+1)^2 = 0$
e) $(x-3)^2 + 17 = (2x+5)^2 - 28x$

12 a) $x = 0$

b) $x = 0$; $x = 1$

c) $x = 0$; $x = \frac{1}{2}$

13 a) $x = 2$; $x = -5$

b) $x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{3}$

c) No tiene solución.

d) No tiene solución. e) $x = -\frac{1}{3}$; $x = 1$

ANOTACIONES

Soluciones de "Ejercicios y problemas"

1 a) $x = 2$ b) $x = 40$ c) $x = 2$ d) $x = 4$

2 a) $x = 1$; $x = -3$ b) $x = -1$; $x = 3$
c) $x = 0$; $x = 2$ d) $x = 3$; $x = 1$

3 a) $x = 2,4$ b) $x = 3,1$ c) $x = 6,3$ d) $x = 3,1$

4 a) $x = -5$ b) $x = -1$ c) $x = \frac{13}{14}$ $x = \frac{7}{2}$

5 a) $x = -4$ b) $x = 0$ c) $x = 6$ d) $x = 5$

6 a) $x = 5$ b) $x = 3$ c) $x = -\frac{3}{2}$

7 a) $x = 0$ b) $x = -10$ c) $x = 2$ d) $x = 0$

8 a) $x = 3$; $x = -1$ b) $x = 4$; $x = -\frac{1}{2}$
c) $x = 3$; $x = -\frac{1}{2}$ d) No tiene solución.

9 a) $x = 4$; $x = -4$ b) $x = 0$; $x = 3$
c) $x = 0$; $x = -\frac{5}{2}$ d) $x = -2$; $x = 2$

10 a) $x = -\frac{3}{2}$; $x = 1$ b) $x = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{1}{2}$
c) $x = 0$; $x = -\frac{6}{5}$ d) $x = 5$; $x = -2$

11 a) $x = 5$; $x = -5$ b) $x = 2$
c) $x = 3$; $x = -3$ d) $x = -2$; $x = 2$

Ejercicios y problemas

29. En una papelería, el precio de una copia en color es 0,75 € y el de una en blanco y negro es 0,20 €. En una semana, el número de copias en color fue la décima parte que en blanco y negro y se recaudaron 110 €. Calcula cuántas copias se hicieron de cada tipo.

30. Se mezclan 8 l de aceite de 4 €/l con otro más barato para obtener 20 l a 2,50 €/l. ¿Cuál es el precio del aceite barato?

Resuelve problemas

31. Hoy, la edad de Alberto cuadruplica la de su hija Marta, pero dentro de cinco años solo la triplicará. ¿Cuántos años tiene cada uno?

	HOY	DENTRO DE 5 AÑOS
MARTA	x	$x + 5$
ALBERTO	$4x$	$4x + 5$

32. Tengo 3 600 euros en el banco, repartidos en dos cuentas. Si hiciera una transferencia de la que más tiene a la que menos tiene, la primera aún seguiría teniendo el doble. ¿Cuánto hay en cada cuenta?

33. Problema resuelto

Un grupo de chicas y chicos sale a cenar y pagan 18 € cada uno. Si hubieran sido menos, habrían pagado, por la misma cuenta, 6 € más cada uno. ¿Cuántos han ido a cenar? ¿Cuánto les ha costado en total?

- x chicas y chicos van de cena y cada uno pone 18 €.
- Si hubieran sido $(x - 2)$, habrían puesto 24 € cada uno.

Coste total con x participantes $\rightarrow 18x$

Coste total con $(x - 2)$ participantes $\rightarrow 24(x - 2)$

- El coste es el mismo en ambos casos. Por tanto:

$$18x = 24(x - 2)$$

$$18x = 24x - 48 \rightarrow 48 = 6x \rightarrow x = 8$$

Solución: Salen a cenar 8 chicas y chicos y en total han pagado $8 \cdot 18 = 144$ euros.

34. Un granjero quiere vender una partida de botellas de leche a 0,50 € la botella. Se le rompen 60 botellas. Para obtener el mismo beneficio, aumenta en 0,05 € el precio de cada botella. ¿Cuántas botellas tenía? ¿Cuánto dinero pretende ganar?

35. Un grupo de estudiantes alquila un piso por 700 € al mes. Si fueran dos más, cada uno pagaría 40 € menos. ¿Cuántos son?

36. Un tipo de aceite de 3,20 €/l se obtiene mezclando un 60% de aceite virgen de 4 €/l y el resto con otro más barato. ¿Cuál es el precio de ese otro?

37. El gerente de cierto negocio familiar, al cerrar el balance del mes, hace cuentas y concluye: si durante el próximo trimestre consiguiera, cada mes, un aumento progresivo del 10% respecto al mes anterior, obtendría unos beneficios de 7 289 €. ¿Cuánto ha ganado este mes?

38. Problema resuelto

Una oposición consta de dos exámenes: uno escrito, que es el 65% de la nota, y otro oral, que es el 35%. Si un opositor tiene en el escrito un 4, ¿qué nota tiene que sacar como mínimo en el oral para aprobar?

$$\text{Nota final} = \frac{0,65 \cdot \text{ESCRITO} + 0,35 \cdot \text{ORAL}}{4}$$

Buscamos un valor de x tal que:

$$0,65 \cdot 4 + 0,35x \geq 5$$

Resolvemos la ecuación:

$$0,65 \cdot 4 + 0,35x = 5 \rightarrow x = 6,86$$

Si $x = 6,86$, la nota final sería un 5. Si $x > 6,86$, la nota final superaría el 5.

Solución: En el examen oral tiene que sacar, como mínimo, un 6,86.

39. Un profesor de lengua calcula la nota final de sus estudiantes mediante un examen escrito, que es el 75% de la nota final, y otro de expresión oral, que es el 25%. Ana obtiene en el segundo un 6.

¿Qué tiene que sacar en el escrito para obtener como nota final al menos un notable (a partir de 7)?

40. Algunos de los miembros de un equipo de atletismo deciden regalar a su entrenador un cronómetro que cuesta 150 €. Al conocer la idea, se apuntan dos atletas más, con lo que a cada uno le toca pagar 5 € menos. ¿Cuántos participan finalmente en la compra del regalo?

36 El precio del aceite barato es de 2 €/l.

37 Este mes ha ganado 5 476,34 €.

39 En el examen escrito tiene que sacar, al menos, un 7,33.

40 En el regalo participan 15 atletas y cada uno pone 10 €.

ANOTACIONES

Resolución de problemas

Se sugiere la siguiente metodología para afrontar la resolución de los problemas en pequeño grupo:

- Un tiempo de reflexión individual destinado a interiorizar los problemas y planear los procesos de resolución.
- Un tiempo de puesta en común, exponiendo los bloqueos y comentando los procesos que se pretenden seguir.
- Un tiempo de resolución individual.
- Un tiempo de puesta en común de las soluciones y corrección de las mismas.

Al finalizar, cualquier estudiante debe ser capaz de exponer razonadamente los procesos y las soluciones.

Soluciones de "Ejercicios y problemas"

29 Se hicieron 400 copias en blanco y negro y 40 en color.

30 El precio del aceite barato era de 1,50 €/l.

31 Marta tiene 10 años, y Alberto, 40 años.

32 En la cuenta A hay 2 400 € más la cantidad que se transfiere, y en la cuenta B hay 1 200 € menos la cantidad que se transfiere.

Por ejemplo:

Pueden haberse transferido 1 000 €, en cuyo caso, en A había 3 400 €, y en B, 200 €.

Pueden haberse transferido 400 € y, en este caso, en A había 2 800 €, y en B, 800 €.

34 Salió de la granja con 660 botellas y pretende ganar $0,50 \cdot 660 = 330$ €.

35 Han alquilado el piso 5 estudiantes.

41. Un vendedor del mercadillo lleva un cierto número de relojes, por los que piensa sacar 200 €, pero comprueba que dos de ellos están deteriorados. Aumentando el precio de los restantes en 5 €, consigue recaudar la misma cantidad. ¿Cuántos relojes lleva?

42. En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide los $\frac{3}{5}$ de la hipotenusa, y el otro cateto mide 5 cm menos que esta. Halla su perímetro.

43. La base de un rectángulo es 2 cm mayor que la altura, y si se hace 2 cm más largo y otros 2 cm más ancho, se dobla su superficie. ¿Cuáles son las dimensiones de ese rectángulo?

Problemas “+”

44. Un pilón de riego se abastece mediante dos bombas que extraen el agua de sendos pozos. La primera, actuando sola, tarda cinco horas en llenar el pilón, y conectadas ambas a la vez, el pilón se llena en tan solo dos horas. ¿Cuánto tarda la segunda bomba actuando en solitario?

• Llamamos x a las horas que tarda la 2.ª bomba.

— La 1.ª bomba, en una hora, llena $\frac{1}{5}$ del pilón.

— La 2.ª bomba, en una hora, llena $\frac{1}{x}$ del pilón.

— Las dos juntas, en una hora, llenan $\frac{1}{2}$ del pilón.

Curiosidades matemáticas

Sabías que...

Ecuación viene del término latino *aequatío*, que, a su vez, se deriva de *aequare* (igualar) o *aequus* (igual). Aquí tienes otras palabras del castellano con la misma raíz:

ECUADOR: Circunferencia máxima a igual distancia de los polos.

EQUILÁTERO: Que está a igual distancia. Con los lados iguales.

EQUIDISTANTE: Que está a igual distancia.

ECUANIMIDAD: Igualdad o constancia de ánimo.

EQUIVALENTES: Que tienen igual valor.

• Busca otras cuatro palabras que tengan la misma raíz que *ecuación*.

45. Una persona tarda 4 horas más que otra en hacer un trabajo. Si lo hacen entre las dos, tardan una hora y media en acabarlo. ¿Cuánto tarda cada una por separado?

46. Un camión ha salido de A hacia B a la vez que una furgoneta sale de B hacia A. Han tardado en cruzarse una hora y 12 minutos ($\frac{6}{5}$ de hora) y ambos vehículos han marchado a una velocidad constante. ¿Cuánto tiempo ha invertido cada vehículo en su recorrido sabiendo que el camión ha tardado una hora más que la furgoneta?

47. Una caja de embalaje es 2 cm más ancha que alta y 3 cm más larga que ancha. En su construcción se han empleado 900 cm² de plancha de cartón, de los que el 20 % se usa para las solapas.

¿Cuáles son las dimensiones de la caja?

48. En un terreno circular se quiere construir un polideportivo rectangular de 2 600 m² de área y en el que uno de los lados mida 2 m más que el otro.

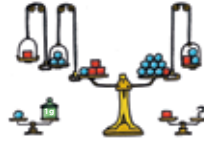


¿Cuál es la superficie de la zona que quedará sin edificar?

49. En un rectángulo en el que la base mide 3 cm más que la altura, el perímetro es mayor que 50 pero no llega a 54. ¿Qué puedes decir de la medida de la base?

En equilibrio

Observa la balanza. Si cada bola pesa un gramo, ¿cuánto pesa cada caja?



Ingéniate las como puedas

Encuentra una solución a esta ecuación:

$$7 + \sqrt{1 + \sqrt{5 - \sqrt{30 - \sqrt{13 + x}}}} = 8$$

Soluciones de “Ejercicios y problemas”

41 El vendedor llevaba 10 relojes.

42 Perímetro = 60 cm

43 El rectángulo inicial tiene 4 m de altura y 6 m de base.

44 La segunda bomba tarda en llenar el pilón 3 h y 20 min.

45 La primera persona tarda 6 horas en hacer el trabajo, y la segunda, 2 horas.

46 La furgoneta ha tardado 2 horas en recorrer la distancia que hay de A a B, y el camión, 3 horas.

47 Las dimensiones de la caja son 8,71 cm de alto, 10,71 cm de ancho y 13,71 cm de largo.

48 1487 m²

49 La base mide entre 14 cm y 15 cm, sin incluir ninguna de estas dos medidas.

Curiosidades matemáticas

Soluciones

Sabías que...

Ejemplos: equilibrio, equinoccio, equiparar, equivocación, equitativo, ecualizador...

En equilibrio

Cada caja pesa 2 g.

Ingéniate las como puedas

$x = 144$