5 Expresiones algebraicas

Presentación de la unidad

- Esta unidad es la primera de las tres que vamos a dedicar en este curso al estudio del álgebra. Una buena parte de los contenidos que se manejan ya son conocidos de cursos anteriores.
- Los dos primeros apartados de la unidad se centran en recordar los monomios y los polinomios, su terminología básica y sus operaciones. Todo ello es conocido, excepto la división de polinomios, que exigirá un tratamiento más pausado y reiterado.
- Como un caso particular de división, se introducen la regla de Ruffini y, aunque sin nombrarlo, el teorema del resto, que servirán de base para el procedimiento que permite buscar las raíces de un polinomio. Este apartado es, también, nuevo, y supondrá, junto con sus aplicaciones, el mayor reto para la mayoría de los estudiantes.
- Se recuerdan también los productos notables y la extracción de factor común, que junto con las raíces de un polinomio permitirán trabajar en su factorización. Y todo ello se aplicará en la simplificación de expresiones algebraicas.
- Por último, se dedica un apartado a la preparación para resolver ecuaciones mediante la realización de actividades en las que se propone simplificar expresiones o traducir al lenguaje algebraico un enunciado, tareas fundamentales para las próximas unidades.
- Destacamos el carácter procedimental de la unidad, en la que predomina la operativa. Esto supone que en el proceso de aprendizaje se ha de primar la práctica reiterada de ejercicios que permitan adquirir agilidad y seguridad en el cálculo algebraico.

Conocimientos mínimos

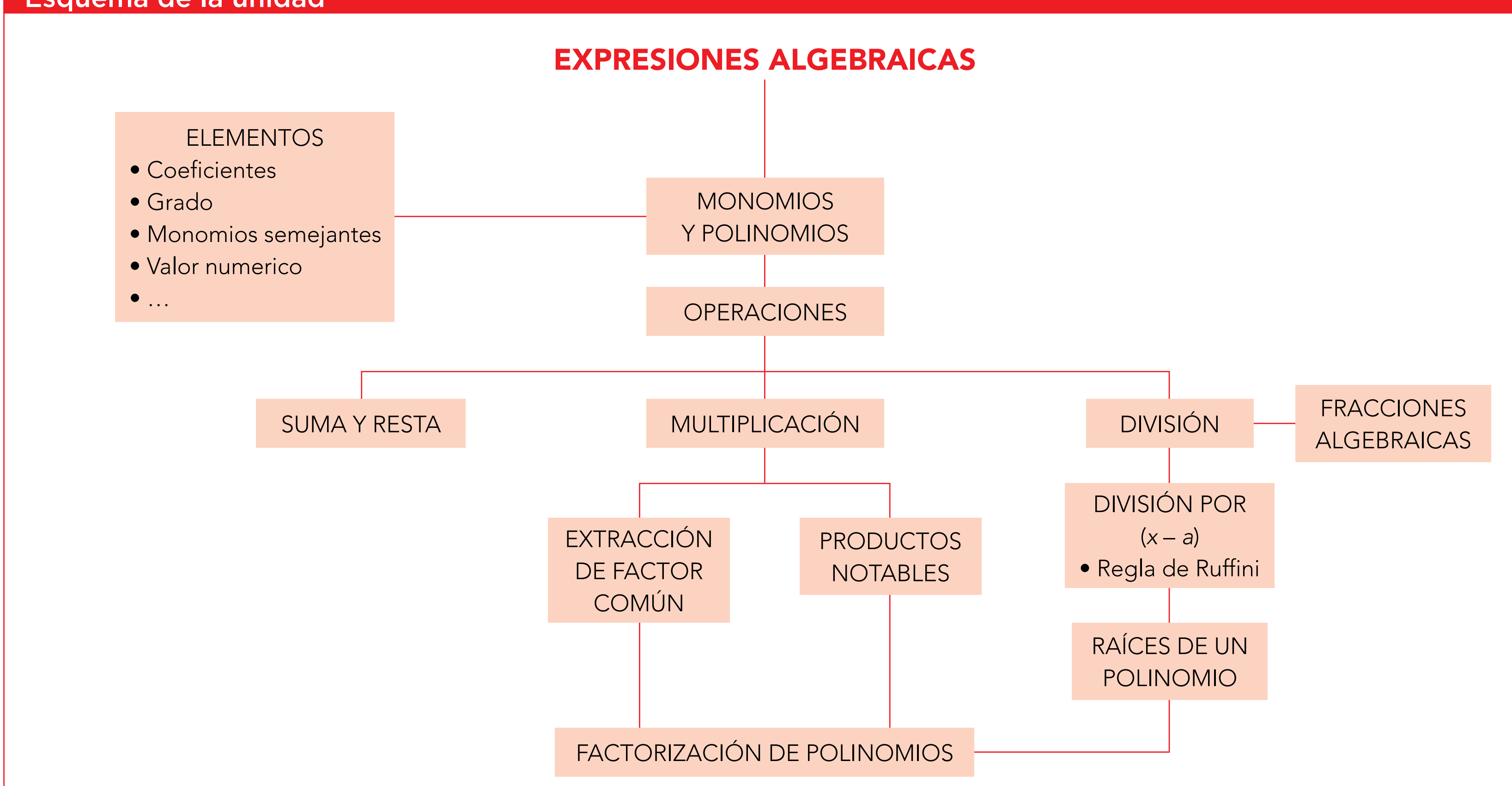
Al finalizar la unidad, consideraremos imprescindible que los estudiantes hayan alcanzado un conocimiento óptimo de los contenidos siguientes:

- Monomios: terminología básica.
- Valor numérico de un monomio.
- Operaciones con monomios: suma, resta, producto y división de monomios.
- Polinomios: terminología básica.
- Suma y resta de polinomios.
- Producto de un polinomio por un monomio.
- Producto de dos polinomios.
- División de polinomios.
- Concepto de raíz de un polinomio y su utilidad para descomponerlo en factores.
- Extracción de factor común.
- Identidades notables.

Complementos importantes

- En la división de monomios, se puede tratar igualmente el caso en el que el grado del numerador es menor que el del denominador.

Esquema de la unidad



- En la división de polinomios, estudiar la relación entre el dividendo, el divisor, el cociente y el resto.
- Al calcular la potencia de un binomio, insistir en que obtenemos el mismo resultado realizando la operación directamente o utilizando las identidades notables.
- Ver la similitud que existe entre las operaciones con polinomios y las operaciones con números.

Anticipación de tareas

- Revisar la prioridad de las operaciones y el uso del paréntesis.
- Resolver expresiones con paréntesis y operaciones combinadas.
- Repasar la operativa con fracciones.
- Recordar las potencias de exponente entero y sus propiedades.
- Utilizar las propiedades de las potencias para simplificar cálculos sencillos.
- Asociar enunciados a expresiones algebraicas.

Adaptación curricular

En la parte de "Recursos fotocopiables" se ofrece una adaptación curricular de esta unidad 5 del libro del alumnado, para cuya elaboración se han tenido en cuenta los conocimientos mínimos que aquí se proponen.

La lectura inicial servirá para ejercitar la comprensión lectora y para mostrar los dos aspectos que justifican el estudio de las matemáticas: el práctico y el intelectual.

Los contenidos, si se adaptan a esos mínimos exigibles, o bien no han sufrido cambio alguno o bien se han modificado ligeramente para adecuarlos al posible nivel de los estudiantes a quienes va dirigido. Lo mismo cabe decir de los ejercicios prácticos que se proponen.

Si algún contenido supera los mínimos exigibles, o bien se ha suprimido o bien se ha adaptado para ajustarlo a los requisitos exigidos.

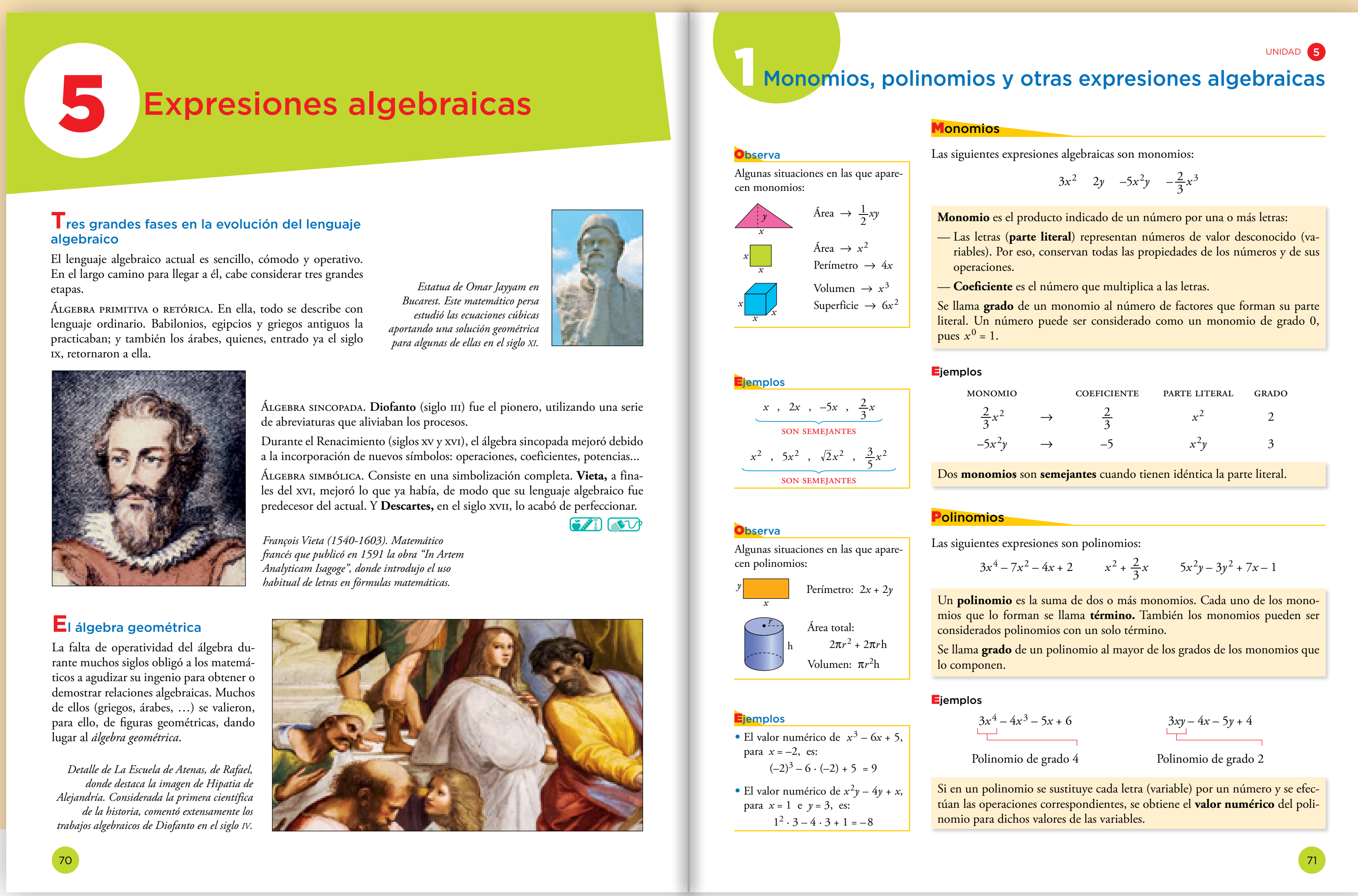
Finalmente, los ejercicios y problemas con los que finaliza la unidad se han reducido en cantidad y se han modificado o bajado de nivel hasta adaptarse a lo convenido.

En la siguiente tabla se recoge una relación de actividades para atender y trabajar el aprendizaje cooperativo, el pensamiento comprensivo, el pensamiento crítico, la interdisciplinariedad, las TIC, el emprendimiento y la resolución de problemas. Unas están propuestas en el libro del alumnado (L.A.), y aquí se hace referencia a ellas indicando la página y la actividad, y otras, como se indica, se sugieren en esta Propuesta Didáctica (P.D.).

Una selección de estas sugerencias están marcadas en el libro del alumnado con un icono; aquí se han marcado con (*).

APRENDIZAJE COOPERATIVO	PENSAMIENTO COMPRENSIVO	PENSAMIENTO CRÍTICO
Pág. 72. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 76. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 72. Actividad 4. Actividad sugerida en esta P.D. (*)
Pág. 73. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 77. Ejercicio resuelto	Pág. 82. Actividad 3
Págs. 74, 75, 76, 77, 79, 81 y 82. Piensa y practica	Pág. 79. Ejercicios resueltos (*)	Pág. 83. Actividades 6 y 7 (*)
Pág. 83. Piensa y practica (*)	Págs. 80, 81 y 82. Ejercicios resueltos	Pág. 84. Actividades 3 y 10 (*)
Pág. 84. Actividades 1, 2, 4 a 9 y 11 a 13	Pág. 83. Ejercicios resueltos (*)	
Pág. 85. Actividades 14 a 24		

INTERDISCIPLINARIEDAD	TIC	EMPRENDIMIENTO	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Pág. 70. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 70. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 80. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Todos los problemas propuestos en el libro del alumnado están encuadrados en este apartado. Aquí se señalan algunos que tienen especial interés.
		Pág. 87. Curiosidades matemáticas	Pág. 87. Actividades 34 a 42 (*)
			Pág. 87. Curiosidades matemáticas (*)



5 Expresiones algebraicas

Tres grandes fases en la evolución del lenguaje algebraico

El lenguaje algebraico actual es sencillo, cómodo y operativo. En el largo camino para llegar a él, cabe considerar tres grandes etapas.

Álgebra primitiva o retórica. En ella, todo se describe con lenguaje ordinario. Babilonios, egipcios y griegos antiguos la practicaban; y también los árabes, quienes, entrado ya el siglo IX, retornaron a ella.

Estatua de Omar Jayyam en Bucarest. Este matemático persa estudió las ecuaciones cúbicas aportando una solución geométrica para algunas de ellas en el siglo XI.

Álgebra sincopada. **Diofanto** (siglo III) fue el pionero, utilizando una serie de abreviaturas que aliviaban los procesos.

Durante el Renacimiento (siglos XV y XVI), el álgebra sincopada mejoró debido a la incorporación de nuevos símbolos: operaciones, coeficientes, potencias...

Álgebra simbólica. Consiste en una simbolización completa. **Vieta,** a finales del XVI, mejoró lo que ya había, de modo que su lenguaje algebraico fue predecesor del actual. Y **Descartes,** en el siglo XVII, lo acabó de perfeccionar.

François Vieta (1540-1603). Matemático francés que publicó en 1591 la obra "In Artem Analyticam Isagoge", donde introdujo el uso habitual de letras en fórmulas matemáticas.

El álgebra geométrica

La falta de operatividad del álgebra durante muchos siglos obligó a los matemáticos a agudizar su ingenio para obtener o demostrar relaciones algebraicas. Muchos de ellos (griegos, árabes, …) se valieron, para ello, de figuras geométricas, dando lugar al *álgebra geométrica*.

Detalle de La Escuela de Atenas, de Rafael, donde destaca la imagen de Hipatia de Alejandría. Considerada la primera científica de la historia, comentó extensamente los trabajos algebraicos de Diofanto en el siglo IV.

70

UNIDAD 5

1 Monomios, polinomios y otras expresiones algebraicas

Observa

Algunas situaciones en las que aparecen monomios:

Área $\rightarrow \frac{1}{2}xy$

Área $\rightarrow x^2$

Perímetro $\rightarrow 4x$

Volumen $\rightarrow x^3$

Superficie $\rightarrow 6x^2$

Monomios

Las siguientes expresiones algebraicas son monomios:

$$3x^2 \quad 2y \quad -5x^2y \quad -\frac{2}{3}x^3$$

Monomio es el producto indicado de un número por una o más letras:

— Las letras (**parte literal**) representan números de valor desconocido (variables). Por eso, conservan todas las propiedades de los números y de sus operaciones.

— **Coeficiente** es el número que multiplica a las letras.

Se llama **grado** de un monomio al número de factores que forman su parte literal. Un número puede ser considerado como un monomio de grado 0, pues $x^0 = 1$.

Ejemplos

$$\underbrace{x \ , \ 2x \ , \ -5x \ , \ \frac{2}{3}x}_{\text{SON SEMEJANTES}}$$

$$\underbrace{x^2 \ , \ 5x^2 \ , \ \sqrt{2}x^2 \ , \ \frac{3}{5}x^2}_{\text{SON SEMEJANTES}}$$

Ejemplos

MONOMIO		COEFICIENTE	PARTE LITERAL	GRADO
$\frac{2}{3}x^2$	$\rightarrow$	$\frac{2}{3}$	x^2	2
$-5x^2y$	$\rightarrow$	-5	x^2y	3

Dos **monomios** son **semejantes** cuando tienen idéntica la parte literal.

Observa

Algunas situaciones en las que aparecen polinomios:

Perímetro: $2x + 2y$

Área total: $2\pi r^2 + 2\pi r h$

Volumen: $\pi r^2 h$

Polinomios

Las siguientes expresiones son polinomios:

$$3x^4 - 7x^2 - 4x + 2 \qquad x^2 + \frac{2}{3}x \qquad 5x^2y - 3y^2 + 7x - 1$$

Un **polinomio** es la suma de dos o más monomios. Cada uno de los monomios que lo forman se llama **término.** También los monomios pueden ser considerados polinomios con un solo término.

Se llama **grado** de un polinomio al mayor de los grados de los monomios que lo componen.

Ejemplos

- El valor numérico de $x^3 - 6x + 5$, para $x = -2$, es: $(-2)^3 - 6 \cdot (-2) + 5 = 9$
- El valor numérico de $x^2y - 4y + x$, para $x = 1$ e $y = 3$, es: $1^2 \cdot 3 - 4 \cdot 3 + 1 = -8$

Ejemplos

$3x^4 - 4x^3 - 5x + 6$

Polinomio de grado 4

$3xy - 4x - 5y + 4$

Polinomio de grado 2

Si en un polinomio se sustituye cada letra (variable) por un número y se efectúan las operaciones correspondientes, se obtiene el **valor numérico** del polinomio para dichos valores de las variables.

71

Al iniciar la unidad

- Con el álgebra se pretende abordar problemas mediante el planteamiento y la resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas. Y la eficacia de los métodos de resolución está íntimamente ligada a una adecuada nomenclatura. Por tanto, la evolución histórica del lenguaje algebraico es clave para entender la evolución del álgebra.
- Esta lectura puede complementarse con las de las unidades 10 del libro de 1.°; 6 del libro de 2.°; y 6 del de 3.°.

Interdisciplinariedad

Se sugiere la siguiente actividad:

Elaborar breves trabajos escritos haciendo una reflexión sobre la utilidad del álgebra en otras áreas de la ciencia (economía, estadística, arquitectura, ingeniería…).

TIC

Se sugiere buscar en Internet información sobre:

— Los matemáticos que aparecen en la lectura.

— La evolución del álgebra a lo largo de la historia.

— El álgebra en el mundo árabe.

— Ejemplos de cuestiones resueltas con el "álgebra geométrica".

ANOTACIONES

Sugerencias

- Iniciamos la página recordando qué es un monomio y el vocabulario asociado a dicho término. Conviene insistir en que las letras se llaman variables o indeterminadas, porque representan cualquier número. Así, para cada valor que demos a las letras, obtendremos un número, que será el valor numérico del monomio.
- Será interesante poner atención a los ejemplos de monomios que aparecen a la izquierda, en el ladillo, dando expresión a elementos geométricos. Así los alumnos y las alumnas les darán significado asociándolos a situaciones concretas.
- Partiendo de ejemplos conocidos (perímetro de un rectángulo, superficie de un ortoedro...), se presentan también el concepto de polinomio y el vocabulario asociado: término y grado de un polinomio.
- Haremos notar a los estudiantes la importancia de observar si el polinomio está dado en su forma reducida antes de decir de qué grado es.

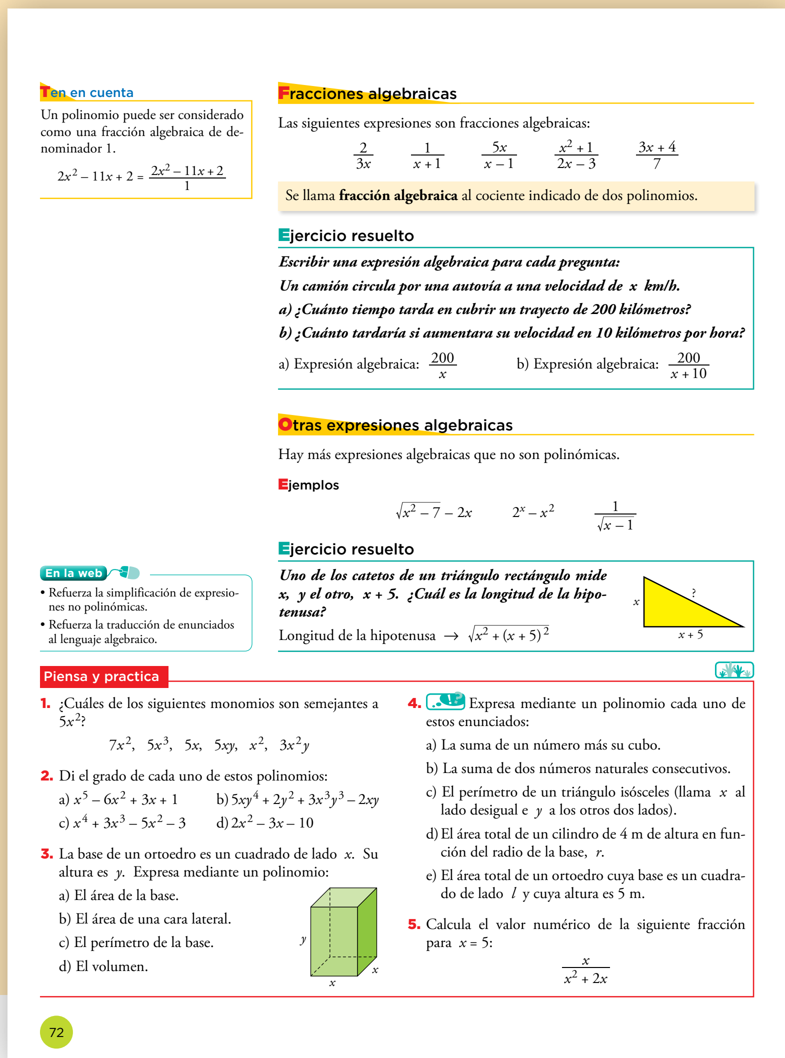
Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.° 2 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1 y 2 de la pág. 3.

ANOTACIONES



Ten en cuenta

Un polinomio puede ser considerado como una fracción algebraica de denominador 1.

$$2x^2 - 11x + 2 = \frac{2x^2 - 11x + 2}{1}$$

Fracciones algebraicas

Las siguientes expresiones son fracciones algebraicas:

$$\frac{2}{3x} \qquad \frac{1}{x+1} \qquad \frac{5x}{x-1} \qquad \frac{x^2+1}{2x-3} \qquad \frac{3x+4}{7}$$

Se llama **fracción algebraica** al cociente indicado de dos polinomios.

Ejercicio resuelto

Escribir una expresión algebraica para cada pregunta:

Un camión circula por una autovía a una velocidad de x km/h.

a) ¿Cuánto tiempo tarda en cubrir un trayecto de 200 kilómetros?

b) ¿Cuánto tardaría si aumentara su velocidad en 10 kilómetros por hora?

a) Expresión algebraica: $\frac{200}{x}$ b) Expresión algebraica: $\frac{200}{x+10}$

Otras expresiones algebraicas

Hay más expresiones algebraicas que no son polinómicas.

Ejemplos

$$\sqrt{x^2 - 7} - 2x \qquad 2^x - x^2 \qquad \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

Ejercicio resuelto

Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide x, y el otro, $x + 5$. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa?

Longitud de la hipotenusa $\rightarrow \sqrt{x^2 + (x+5)^2}$

En la web

- Refuerza la simplificación de expresiones no polinómicas.
- Refuerza la traducción de enunciados al lenguaje algebraico.

Piensa y practica

1. ¿Cuáles de los siguientes monomios son semejantes a $5x^2$?

$$7x^2, \quad 5x^3, \quad 5x, \quad 5xy, \quad x^2, \quad 3x^2y$$

2. Di el grado de cada uno de estos polinomios:

a) $x^5 - 6x^2 + 3x + 1$ b) $5xy^4 + 2y^2 + 3x^3y^3 - 2xy$

c) $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 3$ d) $2x^2 - 3x - 10$

3. La base de un ortoedro es un cuadrado de lado x. Su altura es y. Expresa mediante un polinomio:

a) El área de la base.

b) El área de una cara lateral.

c) El perímetro de la base.

d) El volumen.

4. Expresa mediante un polinomio cada uno de estos enunciados:

a) La suma de un número más su cubo.

b) La suma de dos números naturales consecutivos.

c) El perímetro de un triángulo isósceles (llama x al lado desigual e y a los otros dos lados).

d) El área total de un cilindro de 4 m de altura en función del radio de la base, r.

e) El área total de un ortoedro cuya base es un cuadrado de lado l y cuya altura es 5 m.

5. Calcula el valor numérico de la siguiente fracción para $x = 5$:

$$\frac{x}{x^2 + 2x}$$

72

Sugerencias

- Se presentan algunas expresiones geométricas, no polinómicas, con las que también se encontrarán los estudiantes y que utilizarán para codificar otras situaciones como las que aparecen en los ejercicios resueltos.
- Manejar con soltura la operativa con expresiones no polinómicas permitirá resolver con éxito, en la próxima unidad, ecuaciones con la x en el denominador o ecuaciones con radicales.
- Los alumnos y las alumnas deberán saber que tanto los ejercicios resueltos como las actividades propuestas en este apartado y a lo largo del resto de la unidad serán determinantes para abordar con éxito la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. El trabajo realizado aquí prepara el camino para unidades sucesivas.

Aprendizaje cooperativo

Para las actividades del "Piensa y practica" de la página 72, y para todas las destinadas a afianzar los conocimientos recién adquiridos, se sugiere abordar el trabajo en pequeños grupos. En un primer momento, los estudiantes realizarán las actividades individualmente. Después, contrastarán los resultados con los demás, resolviendo entre ellos las discrepancias. El docente resolverá los desacuerdos y los bloqueos.

Pensamiento crítico

Se sugiere la siguiente actividad:

Tras resolver la actividad 4 de "Piensa y practica", proponer, por parejas, enunciados y traducirlos a lenguaje algebraico.

Soluciones de "Piensa y practica"

1 $7x^2$ y x^2 son semejantes a $5x^2$.

2 a) Grado 5. b) Grado 6.

c) Grado $(x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 3) = 4$ d) Grado $(2x^2 - 3x - 10) = 2$

3 a) x^2 b) $x \cdot y$

c) $4x$ d) x^2y

4 a) $x + x^3$ b) $n + (n + 1) = 2n + 1$

c) $x + 2y$ d) $2\pi r \cdot 4 + 2\pi r^2 = \pi r\,(8 + 2r)$

e) $2l^2 + 4 \cdot 5l = 2l\,(l + 10)$

5 $\frac{1}{7}$

ANOTACIONES

2 Operaciones con monomios

Suma y resta de monomios

La **suma** (o la **resta**) de monomios semejantes es otro monomio, también semejante a ellos, cuyo coeficiente es la suma (o la resta) de sus coeficientes.

Si dos monomios no son semejantes, su suma (o su resta) no se puede simplificar y hay que dejarla indicada.

Por ejemplo, $3xy - 4xy + 7xy = 6xy$ puede operarse porque $3xy$, $-4xy$ y $7xy$ son monomios semejantes. Sin embargo, $7x - 2x^2$ no puede simplificarse.

Producto de monomios

Ten en cuenta

Atendiendo a las propiedades de las potencias:

Para elevar un monomio a una potencia, se eleva cada uno de los factores que contiene.

$(2x^2)^3 = 8x^6 \qquad (\sqrt{3}x)^2 = 3x^2$

$(3x^2y)^3 = 3^3(x^2)^3y^3 = 27x^6y^3$

El **producto** de dos monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes, y su parte literal, el producto de las partes literales de los factores.

Por ejemplo:

$(2x) \cdot (3x^2) = 6x^3 \qquad 3 \cdot 2xy = 6xy \qquad (2x) \cdot (3xy) = 6x^2y \qquad 3x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}y = \frac{3}{\sqrt{3}}x^2y$

Cociente de monomios

El **cociente** de dos monomios se obtiene dividiendo sus correspondientes expresiones y simplificando. El resultado puede ser un número, un monomio o una fracción algebraica.

Por ejemplo:

$$\frac{12x^2}{4x^2} = 3 \qquad \frac{2x^4y}{6x^2y} = \frac{x^2}{3} = \frac{1}{3}x^2 \qquad \frac{3x^2}{6x^3y} = \frac{1}{2xy}$$

Piensa y practica

1. Efectúa las siguientes sumas de monomios. Cuando el resultado no pueda simplificarse, déjalo indicado:

a) $7x - 3x + 8x + 5x - 10x + 2x$

b) $8x^2 - 5x^2 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{x^2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x^2$

c) $x + 7x - x^2 + 3x + 5x^2 - 2x^2$

d) $4xy^2 - 9xy^2 + xy^2 + 3xy^2$

e) $9x^5 + y^2 + 6y^2 - 13x^5 - 5 + y^3$

2. Opera.

a) $(3x^2) \cdot (5xy)$ b) $(\sqrt{3}x) \cdot (\sqrt{3}y)$

c) $(3xy)^2 : (2x^2)$ d) $(\sqrt{3}x)^2 \cdot (2x)$

3. Siendo $A = 5x^2$, $B = 4x$ y $C = -2x^2$, calcula:

a) $A + C$ b) $2A + 3C$

c) $A^2 - C$ d) $(A \cdot B) : C$

e) $(A : C) \cdot B$ f) $B^2 : C^2$

4. Reduce a una sola fracción, como en el ejemplo:

- $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x} = \frac{3}{3x^2} + \frac{x}{3x^2} = \frac{3+x}{3x^2}$

a) $\frac{3}{2x} - \frac{2}{3x}$ b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

c) $\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2x}$ d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$

Sugerencias

- En esta página se repasan las operaciones básicas con monomios: suma, resta, producto y cociente, cuyo dominio es imprescindible para operar con polinomios y resolver ecuaciones, sistemas e inecuaciones.
- A la hora de operar con monomios, puede ser interesante insistir a los alumnos y a las alumnas sobre los siguientes aspectos:

  — Para sumar o restar varios monomios, estos han de ser semejantes.

  — Multiplicar o dividir monomios equivale a operar diestramente con potencias. En este caso, no es necesario que los monomios sean semejantes.

Aprendizaje cooperativo

Para las actividades del "Piensa y practica" de la página 73, y para todas las destinadas al entrenamiento y mejora de la capacidad operativa, se sugiere abordar el trabajo en pequeños grupos.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.° 2 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 3 a 7 de las págs. 3 y 4.

Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) $9x$ b) $\frac{17}{3}$ c) $11x + 2x^2$

d) $-xy^2$ e) $-4x^5 + 7y^2 - 5 + y^3$

2 a) $15x^3y$ b) $3xy$ c) $\frac{9}{2} \cdot y^2$ d) $6x^3$

3 a) $5x^2 - 2x^2 = 3x^2$ b) $10x^2 - 6x^2 = 4x^2$

c) $25x^4 + 2x^2$ d) $(20x^3) : (-2x^2) = -10x$

e) $-\frac{5}{2} \cdot 4x = -10x$ f) $(16x^2) : (4x^4) = \frac{4}{x^2}$

4 a) $\frac{5}{6x}$ b) $\frac{x+1}{x^2}$ c) $\frac{4+x}{2x^2}$ d) $\frac{x^2+2x+3}{x^3}$

ANOTACIONES

3 Operaciones con polinomios

Recuerda

- Para sumar dos polinomios, se reducen los términos semejantes.
- Para restar dos polinomios, se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo.

Suma y resta de polinomios

Observa cómo sumamos y restamos los polinomios $A = x^4 - 7x^3 + 4x + 5$ y $B = 2x^3 - 8x^2 + 6x + 1$:

$$\begin{array}{rr} A \rightarrow & x^4 - 7x^3 + 0x^2 + 4x + 5 \\ +B \rightarrow & 2x^3 - 8x^2 + 6x + 1 \\ \hline A+B \rightarrow & x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 10x + 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} A \rightarrow & x^4 - 7x^3 + 0x^2 + 4x + 5 \\ -B \rightarrow & -2x^3 + 8x^2 - 6x - 1 \\ \hline A-B \rightarrow & x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 2x + 4 \end{array}$$

También podemos operar directamente, quitando paréntesis y agrupando los términos semejantes:

$$(x^4 - 7x^3 + 4x + 5) + (2x^3 - 8x^2 + 6x + 1) = x^4 - 7x^3 + 4x + 5 + 2x^3 - 8x^2 + 6x + 1 =$$
$$= x^4 - 7x^3 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 6x + 5 + 1 = x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 10x + 6$$

$$(x^4 - 7x^3 + 4x + 5) - (2x^3 - 8x^2 + 6x + 1) = x^4 - 7x^3 + 4x + 5 - 2x^3 + 8x^2 - 6x - 1 =$$
$$= x^4 - 7x^3 - 2x^3 + 8x^2 + 4x - 6x + 5 - 1 = x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 2x + 4$$

Recuerda

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

Producto de un polinomio por un monomio

Multiplicamos el polinomio $M = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ por 3 y por $N = 4x^3$:

$$\begin{array}{rr} M \rightarrow & 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3 \\ \times 3 \rightarrow & \times 3 \\ \hline 3M \rightarrow & 6x^3 - 15x^2 + 12x - 9 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} M \rightarrow & 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3 \\ \times N \rightarrow & \times 4x^3 \\ \hline M \cdot N \rightarrow & 8x^6 - 20x^5 + 16x^4 - 12x^3 \end{array}$$

También podemos multiplicar directamente:

$$3 \cdot (2x^3 - 5x^2 + 4x - 3) = 3 \cdot 2x^3 - 3 \cdot 5x^2 + 3 \cdot 4x - 3 \cdot 3 = 6x^3 - 15x^2 + 12x - 9$$
$$4x^3 \cdot (2x^3 - 5x^2 + 4x - 3) = 4x^3 \cdot 2x^3 - 4x^3 \cdot 5x^2 + 4x^3 \cdot 4x - 4x^3 \cdot 3 =$$
$$= 8x^6 - 20x^5 + 16x^4 - 12x^3$$

Piensa y practica

1. Quita paréntesis y reduce.

a) $(x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 3x) + (4x^3 - 9x^2 + 7x - 1)$

b) $(5x^4 - 5x^2 - 3x) - (x^3 + 3x^2 + 6x - 11)$

c) $(7x^2 - 9x + 1) - (x^3 - 5x^2 - 4) + (x^3 - 4x^2)$

2. Efectúa.

a) $2 \cdot (3x^2 - 4x)$ b) $-5 \cdot (x^3 - 3x)$

c) $x \cdot (-2x + 3)$ d) $x^2 \cdot (x^2 - x + 1)$

3. Sean $P = x^5 - 3x^4 + 5x + 9$, $Q = 5x^2 + 3x - 11$.

Halla: a) $P + Q$ b) $P - Q$ c) $2P - 3Q$

4. Halla los productos siguientes:

a) $3x \cdot (2x + y + 1)$ b) $3a \cdot (a^2 + 2a^4)$

c) $ab^2 \cdot (a - b)$ d) $-5x^3 \cdot (3x^2 + 7x + 11)$

e) $x^2y \cdot (2x - y + 2)$ f) $7x^2y \cdot (3x + y)$

g) $5x^3y^3 \cdot (x^2 + x - 1)$ h) $3a^2b^3 \cdot (3a - b + 1)$

5. Calcula el polinomio P en cada caso.

a) $2 \cdot P = 6x^3 - 4x^2 - 8x + 2$

b) $x \cdot P = x^3 - 3x^2 - 5x$

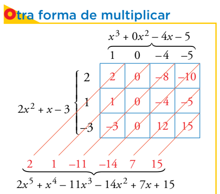
c) $4x^2 \cdot P = -12x^5 + 4x^3 - 8x^2$

d) $2xy^2 \cdot P = 2x^2y^2 + 4xy^3 + 6x^2y^3$

Recuerda

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada monomio de uno de los factores por todos y cada uno de los monomios del otro, y se suman los monomios semejantes obtenidos.

Otra forma de multiplicar



Nomenclatura

Si un polinomio P depende de la variable x, se le suele designar $P(x)$.

Producto de polinomios

Vamos a multiplicar los polinomios $P = x^3 - 4x - 5$ y $Q = 2x^2 + x - 3$.

(Observa que cuando falta algún término, se incluye un monomio de coeficiente 0 en el lugar correspondiente).

$$\begin{array}{rrrrrrl} & & x^3 & +0x^2 & -4x & -5 & \leftarrow P \\ & & \times & 2x^2 & +x & -3 & \leftarrow Q \\ \hline & & -3x^3 & +0x^2 & +12x & +15 & \leftarrow \text{Producto por } -3 \\ & x^4 & -0x^3 & -4x^2 & -5x & & \leftarrow \text{Producto por } x \\ 2x^5 & +0x^4 & -8x^3 & -10x^2 & & & \leftarrow \text{Producto por } 2x^2 \\ \hline 2x^5 & +x^4 & -11x^3 & -14x^2 & +7x & +15 & \leftarrow P \cdot Q \end{array}$$

Cuando se multiplican polinomios de pocos términos, se suele operar directamente:

$$(5x^2 - 2) \cdot (2x - 3) = 10x^3 - 15x^2 - 4x + 6$$

División de polinomios

La división de polinomios es similar a la división entera de números naturales. Veamos cómo se procede en la práctica dividiendo dos polinomios concretos:

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 11x + 13 \qquad Q(x) = 2x + 3 \qquad P(x) : Q(x)$$

$$\begin{array}{lrl} & 2x^3 - 7x^2 - 11x + 13 & \underline{|\ 2x + 3} \\ \text{Restamos } x^2 \cdot (2x + 3) \longrightarrow & \underline{-2x^3 - 3x^2} \qquad\qquad & x^2 - 5x + 2 \\ & -10x^2 - 11x + 13 & \\ \text{Restamos } -5x \cdot (2x + 3) \longrightarrow & \underline{10x^2 + 15x} \qquad & (2x^3) : (2x) = x^2 \\ & 4x + 13 & (-10x^2) : (2x) = -5x \\ \text{Restamos } 2 \cdot (2x + 3) \longrightarrow & \underline{-4x - 6} & (4x) : (2x) = 2 \\ & 7 & \end{array}$$

DIVIDENDO = DIVISOR · COCIENTE + RESTO

Por tanto: $2x^3 - 7x^2 - 11x + 13 = (2x + 3) \cdot (x^2 - 5x + 2) + 7$

Piensa y practica

6. Dados los polinomios $P = 5x^2 - 3$, $Q = x^2 - 4x + 1$, $R = -5x + 2$, calcula:

a) $P \cdot R$ b) $Q \cdot R$ c) $P \cdot Q$

7. Opera y simplifica:

a) $3x^2(2x^3 - 1) + 6(4x^2 - 3)$

b) $(x - 3)(x^2 + 1) - x^2(2x^3 + 5x^2)$

c) $(x - 3)(2x + 5) - 4(x^3 + 7x)$

8. Efectúa $P(x) : Q(x)$ en cada caso y expresa el resultado así:

$P(x) = Q(x) \cdot$ COCIENTE + RESTO

a) $P(x) = 3x^2 - 11x + 5$ $Q(x) = x + 6$

b) $P(x) = 6x^3 + 2x^2 + 18x + 3$ $Q(x) = 3x + 1$

c) $P(x) = 6x^3 + 2x^2 + 18x + 3$ $Q(x) = x$

d) $P(x) = 5x^2 + 11x - 4$ $Q(x) = 5x - 2$

Sugerencias

- Dominada la operativa con monomios, los alumnos y las alumnas no tendrán dificultad en sumar, restar y multiplicar polinomios, teniendo en cuenta, además, que son operaciones ya conocidas de cursos anteriores. Habrá que prestar mayor atención al algoritmo de la división, que se presenta como contenido nuevo. Sin embargo, no debe suponer mayor dificultad, al establecer paralelismos con el mecanismo de la división de números.
- Los estudiantes deben concienciarse de que el éxito en la operativa con polinomios radica en tener una buena organización en los cálculos. Por ejemplo, la colocación de un polinomio debajo de otro. O, en el caso de la división, ir colocando los monomios semejantes uno debajo del otro en el dividendo antes de restar.
- En la actividad 8 del "Piensa y practica" se llama la atención sobre la relación entre la divisibilidad numérica ($D = d \cdot c + r$) y la polinómica ($P(x) = Q(x) \cdot$ COCIENTE + RESTO).

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.° 2 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1, 2 y 3 de la pág. 5. Ejercicios 6, 7 y 8 de la pág. 6. Ejercicio 10 de la pág. 7. Ejercicio 1 de la pág. 8. Ejercicios 1 y 2 de la pág. 9. Ejercicios 5 y 6 de la página 10. Ejercicio 8 de la pág. 11.

  Ampliación: Ejercicio 4 de la pág. 5. Ejercicio 5 de la pág. 6. Ejercicios 9 y 11 de la pág. 7. Ejercicios 1 y 2 de la pág. 8. Ejercicios 3 y 4 de la pág. 10. Ejercicios 7, 9 y 10 de la pág. 11.

- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Refuerzo: Ejercicio 1 de Practica, ficha A.

  Ampliación: Ejercicio 1 de Practica, ficha B.

Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) $x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ b) $5x^4 - x^3 - 8x^2 - 9x + 11$

c) $8x^2 - 9x + 5$

2 a) $6x^2 - 8x$ b) $-5x^3 + 15x$

c) $-2x^2 + 3x$ d) $x^4 - x^3 + x^2$

3 a) $x^5 - 3x^4 + 5x^2 + 8x - 2$ b) $x^5 - 3x^4 - 5x^2 + 2x + 20$

c) $2x^5 - 6x^4 - 15x^2 + x + 51$

4 a) $6x^2 + 3xy + 3x$ b) $3a^3 + 6a^5$

c) $a^2b^2 - ab^3$ d) $-15x^5 - 35x^4 - 55x^3$

e) $2x^3y - x^2y^2 + 2x^2y$ f) $21x^3y + 7x^2y^2$

g) $5x^5y^3 + 5x^4y^3 - 5x^3y^3$ h) $9a^3b^3 - 3a^2b^4 + 3a^2b^3$

5 a) $P = 3x^3 - 2x^2 - 4x + 1$

b) $P = x^2 - 3x - 5$

c) $P = -3x^3 + x - 2$

d) $P = \dfrac{2x^2y^2}{2xy^2} + \dfrac{4xy^3}{2xy^2} + \dfrac{6x^2y^3}{2xy^2} = x + 2y + 3xy$

6 a) $-25x^3 + 10x^2 + 15x - 6$ b) $-5x^3 + 22x^2 - 13x + 2$

c) $5x^4 - 20x^3 + 2x^2 + 12x - 3$

7 a) $6x^5 + 21x^2 - 18$ b) $-2x^5 - 5x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 3$

c) $-4x^3 + 2x^2 - 29x - 15$

8 a) $3x^2 - 11x + 5 = (x + 6)(3x - 29) + 179$

b) $6x^3 + 2x^2 + 18x + 3 = (3x + 1)(2x^2 + 6) - 3$

c) $6x^3 + 2x^2 + 18x + 3 = x(6x^2 + 2x + 18) + 3$

d) $5x^2 + 11x - 4 = (5x - 2)\left(x + \dfrac{13}{5}\right) + \dfrac{6}{5}$

4 División de un polinomio por $(x - a)$

La regla de Ruffini

Vas a aprender ahora un sencillo procedimiento para realizar con rapidez las divisiones de polinomios cuyos divisores son del tipo $(x - a)$.

Veámoslo con un ejemplo: $(2x^4 - 7x^3 + 11x - 2) : (x - 3)$

La división que conoces sería así:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -7x^3 & +0x^2 & +11x & -2 & x-3 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & +6x^3 & & & & 2x^3 - x^2 - 3x + 2 \\ \cline{1-2}
 & -x^3 & +0x^2 & & & \\
 & +x^3 & -3x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & -3x^2 & +11x & & \\
 & & +3x^2 & -9x & & \\ \cline{3-4}
 & & & +2x & -2 & \\
 & & & -2x & +6 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 4 &
\end{array}$$

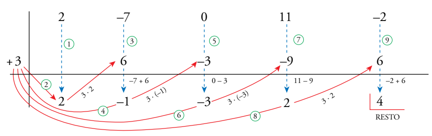
Esa misma división se puede realizar, sintéticamente, del siguiente modo:

$(2x^4 - 7x^3 + 11x - 2) : (x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -7 & 0 & 11 & -2 \\
3 & & 6 & -3 & -9 & 6 \\ \hline
 & 2 & -1 & -3 & 2 & \boxed{4}
\end{array}$$

Resto

Cociente: $2x^3 - x^2 - 3x + 2$



COCIENTE: 2 –1 –3 2 → significa: $2x^3 - x^2 - 3x + 2$

RESTO: 4

Los pasos numerados en verde son los que se dan en la división de arriba.

Este método, en el que solo intervienen los coeficientes y solo se realizan las operaciones que realmente importan, se llama **regla de Ruffini** en honor al matemático italiano que lo divulgó.

Ejercicio resuelto

Obtener el cociente y el resto en estas divisiones de polinomios:

a) $(4x^3 - 9x^2 + 6x + 5) : (x - 2)$

b) $(5x^4 - 2x^2 - 5) : (x + 1)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 4 & -9 & 6 & 5 \\
2 & & 8 & -2 & 8 \\ \hline
 & 4 & -1 & 4 & \boxed{13}
\end{array}$$

$C(x) = 4x^2 - x + 4$

$R = 13$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 5 & 0 & -2 & 0 & -5 \\
-1 & & -5 & 5 & -3 & 3 \\ \hline
 & 5 & -5 & 3 & -3 & \boxed{-2}
\end{array}$$

$C(x) = 5x^3 - 5x^2 + 3x - 3$

$R = -2$

Piensa y practica

1. Calcula el cociente y el resto en cada caso:

a) $(x^3 - 7x^2 + 9x - 3) : (x - 5)$

b) $(2x^3 + 7x^2 + 2x + 4) : (x + 3)$

c) $(x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 3x - 6) : (x + 2)$

d) $(4x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x - 1) : (x - 1)$

e) $(x^5 - 32) : (x - 2)$

Valor de un polinomio, $P(x)$, para $x = a$

Volviendo al polinomio que aparece como dividendo en el ejemplo de la página anterior, $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 11x - 2$, observa que el valor que toma para $x = 3$ coincide con el resto de su división entre $(x - 3)$:

$P(3) = 2 \cdot 3^4 - 7 \cdot 3^3 + 11 \cdot 3 - 2 = 162 - 189 + 33 - 2 = 4$

Resto de la división $P(x) : (x - 3) \to 4$

La coincidencia de esos valores no es casual, y su justificación es sencilla. Atendiendo a las relaciones entre los términos de la división, $D = d \cdot C + R$, vemos que:

$$P(x) = (x - 3) \cdot C(x) + \underbrace{4}_{\text{RESTO}}$$

$$P(3) = \underbrace{(3 - 3)}_{0} \cdot C(3) + 4 = 4$$

Y lo dicho para el ejemplo se puede generalizar para cualquier división de un polinomio entre $(x - a)$, como puedes ver a la izquierda.

Ten en cuenta

La notación $P(a)$ significa: valor del polinomio P para $x = a$.

$$\begin{array}{c|l}
P(x) & x - a \\ \cline{2-2}
\dots & C(x) \\
R &
\end{array}$$

$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R$

$P(a) = (a - a) \cdot C(a) + R =$

$= 0 \cdot C(a) + R = R$

> El valor de un polinomio para $x = a$ coincide con el resto que se obtiene al dividirlo entre $(x - a)$.

Según estos resultados, podemos calcular el valor de un polinomio para $x = a$ con ayuda de la regla de Ruffini: lo dividimos entre $(x - a)$ y tomamos el resto de la división.

Ejercicio resuelto

Calcular el valor del polinomio $Q(x) = x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 6x + 2$ ***para los valores siguientes:***

a) $x = 2$

b) $x = -5$

a) Dividimos $Q(x) : (x - 2)$ y tomamos el resto:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 7 & 6 & -6 & 2 \\
2 & & 2 & 18 & 48 & 84 \\ \hline
 & 1 & 9 & 24 & 42 & \boxed{86}
\end{array}$$

$Q(2) = 86$

b) Dividimos $Q(x) : (x + 5)$ y tomamos el resto:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 7 & 6 & -6 & 2 \\
-5 & & -5 & -10 & 20 & -70 \\ \hline
 & 1 & 2 & -4 & 14 & \boxed{-68}
\end{array}$$

$Q(-5) = -68$

En la web Regla de Ruffini: ejemplos y ejercicios.

Piensa y practica

2. Sea el polinomio $M(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 7x + 8$.

a) Calcula $M(4) = 4^4 - 8 \cdot 4^3 + 15 \cdot 4^2 + 7 \cdot 4 + 8$.

b) Divide, con la regla de Ruffini, $M(x) : (x - 4)$.

c) Comprueba que el resultado del apartado a) coincide con el resto de la división que has realizado en b).

3. El valor de un polinomio, $A(x)$, para $x = 7$ es 54. ¿Qué puedes decir de la división $A(x) : (x - 7)$?

4. Del polinomio $H(x)$ sabemos:

$H(5) = 18 \qquad H(-5) = 13$

a) ¿Cuál es el resto de la división $H(x) : (x - 5)$?

b) ¿Y el de la división $H(x) : (x + 5)$?

5. Considera los polinomios siguientes:

$P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 9x + 3$

$Q(x) = x^4 - 12x^2 - 11x + 9$

Calcula, utilizando la regla de Ruffini:

a) $P(3)$ b) $P(-1)$ c) $Q(3)$ d) $Q(-1)$

6. Calcula, con ayuda de la regla de Ruffini, el valor del polinomio $2x^3 - 7x^2 - 17x + 10$ para:

a) $x = -2$ b) $x = -3$ c) $x = 5$

7. De un polinomio $P(x)$, sabemos que se anula para el valor $x = 8$, es decir, $P(8) = 0$.

¿Qué puedes decir de la división $P(x) : (x - 8)$?

Sugerencias

- Se presenta la regla de Ruffini como mero mecanismo para realizar cómoda y rápidamente las divisiones con divisores del tipo $(x - a)$. Como justificación, y para hacer la regla más próxima al alumnado, se sugiere, en los primeros ensayos, realizar previamente la división estándar y después contrastarla con los sucesivos pasos de este nuevo método abreviado.

  En esta etapa inicial, nos aseguraremos del correcto uso de signos según el divisor sea una suma o una resta: $(x \pm a)$.

- Superados los primeros intentos, y resueltas las dudas, queda fijar y agilizar el procedimiento mediante la práctica.

- La página 77 presenta, sin nombrarlo, el teorema del resto. Se sugiere empezar constatando en varios ejemplos que *"el resto de la división $P(x) : (x - a)$ coincide con $P(a)$"*, y, después, revisar colectivamente su justificación animando a los estudiantes a resolver dudas.

  También es recomendable aplicar la regla de Ruffini dejando todas las operaciones indicadas. De esta manera, se observa muy claramente por qué es cierto el teorema.

- Una vez que los estudiantes conocen el mecanismo de la regla de Ruffini, es muy interesante que aprendan a ponerlo en práctica con la calculadora utilizando las teclas oportunas.

  De esta manera se darán cuenta de lo rápido que resulta hallar con calculadora el valor numérico de un polinomio $P(x)$ para $x = a$ siendo a un número racional.

Pensamiento comprensivo

Los ejercicios resueltos de estas páginas, y de todas las siguientes, se pueden intentar resolver inicialmente con lo que ya saben los estudiantes, por tanteo, mediante ensayo-error, etc., detectando las dificultades y los bloqueos. Después, analizarán los procesos que ofrece el texto, poniendo en común sus conclusiones y resolviendo las dudas que les surjan.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 2 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1, 2 y 3 de la pág. 12. Ejercicios 5, 6 y 7 de la pág. 13. Ejercicio 8 de la pág. 14.

  Ampliación: Ejercicio 4 de la pág. 13. Ejercicios 9 y 10 de la pág. 14.

Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) $C(x) = x^2 - 2x - 1$; $R = -8$ b) $C(x) = 2x^2 + x - 1$; $R = 7$

c) $C(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 3$; $R = 0$ d) $C(x) = 4x^3 + x^2 + 5$; $R = 4$

e) $C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$; $R = 0$

2 a) 20

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -8 & 15 & 7 & 8 \\
4 & & 4 & -16 & -4 & 12 \\ \hline
 & 1 & -4 & -1 & 3 & \boxed{20}
\end{array}$$

El resto de dividir por $(x - 4)$ coincide con el valor del polinomio en $x = 4$.

3 El resto de la división será 34.

4 a) $R = 18$ b) $R = 13$

5 a) $P(3) = 12$ b) $P(-1) = 4$

c) $Q(3) = -51$ d) $Q(-1) = 9$

6 a) $P(-2) = 0$ b) $P(-3) = -56$

c) $P(5) = 0$

7 El resto de la división $P(x) : (x - 8)$ es 0 y, por tanto, la división es exacta.

5 Raíces de un polinomio

División exacta

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x-a \\ \cline{2-2} \dots & C(x) \\ 0 & \end{array}$$

$P(x) = (x-a) \cdot C(x)$

Vamos a pensar ahora en las divisiones exactas del tipo $P(x) : (x-a)$.

Por ser exactas, el resto es cero y, según el apartado anterior, también será cero el valor que toma el polinomio $P(x)$ para $x = a$:

$$P(x) = (x-a) \cdot C(x) + 0 \rightarrow P(a) = (a-a) \cdot C(a) + 0 = 0$$

Ejemplo

Dividimos el polinomio $P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$ entre $(x-2)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -6 & -8 \\ 2 & & 2 & 10 & 8 \\ \hline & 1 & 5 & 4 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow R$$

$C(x) = x^2 + 5x + 4$

$P(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 8 =$
$= 8 + 12 - 12 - 8 = 0$

RESTO DE LA DIVISIÓN $\rightarrow 0$

$P(2) = (2-2) \cdot C(2) = 0$
$P(2) = R = 0$

Decimos entonces que el valor $x = 2$ es una *raíz* del polinomio.

Ten en cuenta

Una raíz, a, de un polinomio, permite descomponerlo en dos factores:
$P(x) = (x-a) \cdot C(x)$

Si la división $P(x) : (x-a)$ es exacta, entonces el polinomio $P(x)$ se anula para $x = a$.

Decimos que a **es una raíz** del polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$.

Búsqueda de las raíces enteras de un polinomio $P(x)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -6 & -8 \\ 2 & & & & 8 \\ \hline & & \times & 4 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow R$$

Observa que en la división exacta anterior, el último producto, $2 \cdot 4$, cambiado de signo, es igual al último coeficiente del polinomio, -8. Así, la raíz, 2, es divisor de 8. En caso contrario, el resto no habría podido ser cero.

Confirmémoslo con otro ejemplo:

La división $(x^3 - 4x^2 - 11x + 30) : (x-5)$ es exacta y, por tanto, el valor $x = 5$ es una raíz del polinomio $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -11 & 30 \\ 5 & & 5 & 5 & -30 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -11 & 30 \\ 5 & & & & -30 \\ \hline & & \times & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

Al aplicar la regla de Ruffini, el último producto es $5 \cdot (-6) = -30$, opuesto del último coeficiente del polinomio.

Vemos que $x = a$ no puede ser raíz entera del polinomio del ejemplo si a no es divisor de 30.

Una raíz entera de un polinomio con coeficientes enteros es, necesariamente, un divisor del **término independiente,** el que no lleva x.

Un divisor del término independiente del polinomio puede ser raíz del polinomio o no serlo.

Observa

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -11 & 30 \\ 3 & & 3 & -3 & -42 \\ \hline & 1 & -1 & -14 & \boxed{-12} \end{array}$$

3 es divisor de 30, pero no es raíz del polinomio dividendo.

Así, cuando queramos buscar las raíces enteras de un polinomio, lo haremos entre los divisores del término independiente.

78

UNIDAD 5

Ejercicios resueltos

1. ***Averiguar si $x = 5$ es raíz de alguno de estos polinomios:***

$M(x) = x^4 - 9x^3 + 17x + 18$

$N(x) = 2x^4 - 11x^3 + 18x + 20$

$K(x) = x^4 - 23x^2 - 7x - 15$

- La división $M(x) : (x-5)$ no puede tener resto cero, porque 5 no es divisor del término independiente del polinomio, 18.

  Por tanto, el valor $x = 5$ no es raíz del polinomio $M(x)$.

- La división $N(x) : (x-5)$ no es exacta, pues $R = N(5) = -15$.

  El valor $x = 5$ no es raíz del polinomio $N(x)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -11 & 0 & 18 & 20 \\ 5 & & 10 & -5 & -25 & -35 \\ \hline & 2 & -1 & -5 & -7 & \boxed{-15} \end{array}$$

- La división $K(x) : (x-5)$ es exacta, pues $R = K(5) = 0$.

  El valor $x = 5$ sí es raíz del polinomio $K(x)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -23 & -7 & -15 \\ 5 & & 5 & 25 & 10 & 15 \\ \hline & 1 & 5 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

2. ***Considerar el polinomio $Q(x) = 2x^3 + 7x^2 + 6x + 9$.***

a) Encontrar una raíz entera de $Q(x)$.

b) Descomponer $Q(x)$ en dos factores.

El término independiente del polinomio es 9.

Buscaremos la raíz entre los divisores de 9, que son ± 1, ± 3 y ± 9.

Iremos probando divisiones $Q(x) : (x-a)$, siendo a cada uno de esos divisores.

Los primeros intentos entre $(x-1)$, $(x+1)$ y $(x-3)$ son fallidos. Observa:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & & 2 & 9 & 15 \\ \hline & 2 & 9 & 15 & \boxed{24} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 2 & 7 & 6 & 9 \\ -1 & & -2 & -5 & -1 \\ \hline & 2 & 5 & 1 & \boxed{8} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 2 & 7 & 6 & 9 \\ 3 & & 6 & 39 & 135 \\ \hline & 2 & 13 & 45 & \boxed{144} \end{array}$$

Sin embargo, al dividir entre $(x+3)$, obtenemos de resto 0. Es decir, $x = -3$ es raíz de $Q(x)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 7 & 6 & 9 \\ -3 & & -6 & -3 & -9 \\ \hline & 2 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

a) $x = -3$ es raíz del polinomio $Q(x)$, porque $Q(-3) = 0$.

b) $Q(x) = 2x^3 + 7x^2 + 6x + 9 = (x+3) \cdot (2x^2 + x + 3)$

3. ***Escribir un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 0, 1 y 2.***

$P(x) = x(x-1)(x-2)$ cumple esta condición.

Observa que: $P(0) = 0 \cdot (0-1) \cdot (0-2) = 0$ $\quad P(1) = 1 \cdot (1-1) \cdot (1-2) = 0$

$P(2) = 2 \cdot (2-1) \cdot (2-2) = 0$

Solución: $P(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$

Piensa y practica

1. Averigua si alguno de los valores 1, –3, 5, –7 es raíz del polinomio $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 4$.

2. ¿Cuáles son las raíces de $P(x) = (x-2)(x+5)(x-6)$?

3. Escribe un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 2, –2 y 3.

4. Calcula mentalmente alguna raíz de cada uno de estos polinomios:

a) $x^2 - x$ b) $x^3 - 1$ c) $x^4 + x$

5. Busca una raíz entera de cada uno de estos polinomios. Si no la hay, justifica por qué.

$A(x) = 4x^3 + 2x^2 + 5x + 7$

$B(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

$C(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 7x + 3$

$D(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

6. El polinomio $x^3 + 2x^2 - 8x$ tiene tres raíces enteras. Calcúlalas por tanteo.

79

Sugerencias

- Se define el concepto de raíz de un polinomio y se razona el procedimiento para la búsqueda de raíces.
- El criterio de búsqueda de raíces encontrará, después, su aplicación en la factorización de polinomios, de ahí su importancia. Por ello, merece la pena que los estudiantes reflexionen sobre la idea clave que aparece en la pastilla final de la página 78: los únicos valores enteros posibles de a son los divisores del término independiente.
- Todo lo anterior deberá contrastarse y comprobarse en numerosos ejemplos y ejercicios.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 2 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Ampliación: Ejercicio 7 de la pág. 13. Ejercicios 8, 9, 10, 11 y 12 de la pág. 14.

Soluciones de “Piensa y practica”

1 $x = 1$ sí es raíz.

2 $x = 2$; $x = -5$ y $x = 6$

3 $P(x) = (x-2)(x+2)(x-3)$

4 a) $x = 0$, $x = 1$ b) $x = 1$ c) $x = 0$, $x = -1$

5 $A(x)$ tiene como raíz $x = -1$. $B(x)$ no tiene ninguna raíz.

$C(x)$ tiene como raíz $x = 3$. $D(x)$ tiene como raíz $x = -1$.

6 Las raíces de $x^3 + 2x^2 - 8x$ son $x = 0$; $x = 2$ y $x = -4$.

ANOTACIONES

6 Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio es descomponerlo en producto de polinomios (factores) del menor grado posible.

Para factorizar polinomios, dispones de algunos recursos que se exponen, mediante ejemplos, a continuación.

Sacar factor común

Comprueba

Si recorres el camino contrario, multiplicando $3x$ por el paréntesis, obtienes el polinomio original.

Ejemplo 1

$P(x) = 6x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 3x \rightarrow$ El factor común es $3x$.

$P(x) = 6x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 3x = 3x(2x^3 - 3x^2 + 4x - 1)$

Ejemplo 2

$Q(x) = 45x^5 + 120x^3 + 80x^2 \rightarrow$ El factor común es $5x^2$.

$Q(x) = 45x^5 + 120x^3 + 80x^2 = 5x^2(9x^3 + 24x + 16)$

Utilizar las identidades notables

Recuerda

Identidades notables:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Ejemplo 3

$A(x) = 4x^2 + 4x + 1 \rightarrow$ Se puede expresar como cuadrado de una suma.

$A(x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot (1) + (1)^2 = (2x + 1)^2$

Ejemplo 4

$B(x) = 9x^2 - 12x + 4 \rightarrow$ Se puede expresar como cuadrado de una diferencia.

$B(x) = 9x^2 - 12x + 4 = (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot (2) + (2)^2 = (3x - 2)^2$

En la web

Repasa la utilización de las identidades notables.

Ejemplo 5

$C(x) = 4x^2 - 25 \rightarrow$ Se puede expresar como producto de suma por diferencia.

$C(x) = 4x^2 - 25 = (2x)^2 - (5)^2 = (2x + 5)(2x - 5)$

Ejercicios resueltos

1. *Descomponer en factores:*

$Q(x) = 2x^4 - 12x^3 + 18x^2$

Empezamos sacando factor común $2x^2$:

$Q(x) = 2x^4 - 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 - 6x + 9)$

Observando el segundo factor, vemos que se puede expresar como el cuadrado de una diferencia:

$Q(x) = 2x^4 - 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) = 2x^2(x - 3)^2$

2. *Simplificar esta fracción:*

$\dfrac{2x^3 - 18x}{2x^4 - 12x^3 + 18x^2}$

Descomponemos el numerador sacando factor común y, después, transformando una diferencia de cuadrados en suma por diferencia:

$2x^3 - 18x = 2x(x^2 - 9) = 2x(x + 3)(x - 3)$

El denominador coincide con el polinomio descompuesto en el ejercicio anterior:

$$\frac{2x^3 - 18x}{2x^4 - 12x^3 + 18x^2} = \frac{2x(x + 3)(x - 3)}{2x^2(x - 3)^2} = \frac{x + 3}{x(x - 3)}$$

En la web Practica las identidades notables.

80

UNIDAD 5

Factorizar con ayuda de la regla de Ruffini

En la web

Factorización de polinomios mediante la regla de Ruffini.

Vamos ahora a aplicar lo aprendido en el epígrafe anterior sobre la búsqueda de las raíces de un polinomio.

Ejemplo 6

$A(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3 \rightarrow$ Aplicamos la regla de Ruffini, probando con los divisores de 3 (+1, –1, +3, –3).

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -2 & -2 & -3 \\ -1 & & -1 & 3 & -1 & 3 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ 3 & & 3 & 0 & 3 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

Vemos que la división del polinomio $A(x)$ entre $(x + 1)$ es exacta, lo que nos permite una primera descomposición:

$A(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x + 1) \cdot (x^3 - 3x^2 + x - 3)$

Seguimos el mismo proceso con el polinomio $C(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$, y vemos que la división entre $(x - 3)$ es exacta:

$C(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3 = (x - 3) \cdot (x^2 + 0x + 1)$

$A(x) = (x + 1) \cdot (x^3 - 3x^2 + x - 3) = (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (x^2 + 1)$

El último factor, $(x^2 + 1)$, no se puede descomponer, pues no hay ningún valor de x que lo anule. Es decir, no tiene raíces.

Ejercicios resueltos

1. *Factorizar el siguiente polinomio:*

$H(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$

Empezamos buscando raíces del polinomio entre los divisores del término independiente: +1, –1, +2, –2.

Y encontramos que la división entre $(x - 2)$ es exacta:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -8 & -1 & 2 \\ 2 & & 8 & 0 & -2 \\ \hline & 4 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$H(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2 = (x - 2) \cdot (4x^2 - 1)$

El segundo factor es una diferencia de cuadrados, que se descompone en suma por diferencia:

$H(x) = (x - 2) \cdot (2x + 1) \cdot (2x - 1)$

2. *Simplificar esta fracción:*

$\dfrac{12x^2 - 3}{4x^3 - 8x^2 - x + 2}$

Sacamos factor común en el numerador. El denominador coincide con el polinomio del ejercicio anterior.

$$\frac{12x^2 - 3}{4x^3 - 8x^2 - x + 2} = \frac{3(4x^2 - 1)}{(x - 2)(4x^2 - 1)} = \frac{3}{x - 2}$$

Piensa y practica

1. Descompón en factores sacando factor común y utilizando los productos notables.

a) $x^3 + 6x^2 + 9x$ b) $2x^3 - 4x^2 + 2x$

c) $3x^4 - 12x^2$ d) $8x^5 - 24x^4 + 18x^3$

2. Factoriza con ayuda de la regla de Ruffini.

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ b) $2x^3 + 6x^2 - x - 30$

c) $x^3 + 7x^2 + 14x + 8$ d) $3x^5 + x^2 - 24x + 36$

3. Descompón en el máximo número de factores que sea posible.

a) $2x^4 - 12x^3 + 10x^2$ b) $5x^3 + 10x^4 + 25x^2$

c) $x^3 - x^2 - x - 2$ d) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9$

e) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ f) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

4. Simplifica.

a) $\dfrac{5x^3 + 20x^2}{3x^3 - 24x^2 + 48x}$ b) $\dfrac{x^2 + 7}{x^3 - 3x^2 + 7x - 21}$

En la web

- Factorización de polinomios de grado 2.
- Factorización de polinomios de grado 3.

81

Sugerencias

- Para comprender el significado de factorizar un polinomio, conviene que el alumnado revise la factorización de un número y cómo se aplica en una situación concreta.
- Para factorizar polinomios, recurriremos a tres técnicas: sacar factor común, emplear las identidades notables y buscar divisores del polinomio encontrando sus raíces.
- El procedimiento de sacar factor común ya es conocido de cursos anteriores y tiene ahora una de sus aplicaciones más significativas. Los ejemplos tienen como finalidad ayudar al alumnado a recordar el procedimiento: por un lado, reconocer el factor o factores que se pueden extraer, y por otro, aplicar correctamente la división de monomios en cada sumando. Y, una vez más, hemos de insistir sobre el hecho de que cuando un sumando coincide plenamente con el factor a extraer, en su lugar queda la unidad: $ax + x = (a + 1) \cdot x$
- En cuanto al recurso de las identidades notables, los alumnos y las alumnas han de recordar las fórmulas que aparecen en el margen y entrenarse en una tarea de mayor dificultad: identificar los polinomios que son resultado de un producto notable para aplicar las fórmulas en sentido inverso.
- Finalmente, en la página de la derecha se muestra cómo factorizar un polinomio recurriendo a la búsqueda de sus raíces; es decir, aplicando lo visto en los epígrafes anteriores.
- En los ejercicios resueltos se combinan los tres procedimientos de factorización, aplicándolos, después, en la simplificación de fracciones algebraicas.

Emprendimiento

Se sugiere la siguiente actividad:

Proponer inicialmente a los estudiantes que intenten las factorizaciones, con lo que saben, sin ninguna instrucción previa. Si la actividad se realiza en grupo pequeño, seguramente surgirán ideas. El docente puede ayudar en los bloqueos con pequeñas sugerencias. La formalización de los procedimientos surgirá como resultado final del proceso, más lento pero de mayor calado comprensivo.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 2 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1 y 2 de la pág. 15. Ejercicio 3 de la pág. 16. Ejercicios 1 y 2 de la pág. 17. Ejercicios 3 y 4 de la pág. 18. Ejercicio 5 de la pág. 19.

  Ampliación: Ejercicios 6 y 7 de la pág. 19.

- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Refuerzo: Ejercicio 3 de Practica, ficha A.

  Ampliación: Ejercicio 2 de Practica, ficha B.

Soluciones de “Piensa y practica”

1 a) $x(x^2 + 6x + 9) = x(x + 3)^2$ b) $2x(x^2 - 2x + 1) = 2x(x - 1)^2$

c) $3x^2(x^2 - 4) = 3x^2(x + 2)(x - 2)$ d) $2x^3(4x^2 - 12x + 9) = 2x^3(2x - 3)^2$

2 a) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ b) No tiene raíces enteras.

c) $(x + 1)(x + 4)(x + 2)$ d) No tiene raíces enteras.

3 a) $2x^2(x - 5)(x - 1)$ b) $5x^2(x + 2x^2 + 5)$

c) $(x - 2)(x^2 + x + 1)$ d) $(x - 1)^2(x + 3)(x - 3)$

e) $(x + 1)^3$ f) $(x - 2)^3$

4 a) $\dfrac{5x(x + 4)}{3(x - 4)^2}$ b) $\dfrac{1}{x - 3}$

7 Preparación para ecuaciones

Expresiones de primer grado

Con el fin de prepararte para la resolución de ecuaciones y sistemas de primer grado, te conviene adquirir agilidad en la operatoria y simplificación de expresiones de primer grado.

Ejercicios resueltos

1. *Simplificar esta expresión:* $3(5x-7)+2(x-1)-5x+3$	$3(5x-7)+2(x-1)-5x+3 = 15x-21+2x-2-5x+3 =$ $= 12x-20$
2. *Multiplicar por 36 y simplificar esta expresión:* $-\frac{3(x+5)}{12}-\frac{2(11-x)}{9}+6$	$-\frac{36\cdot 3(x+5)}{12}-\frac{36\cdot 2(11-x)}{9}+36\cdot 6 = -9(x+5)-8(11-x)+216 =$ $= -9x-45-88+8x+216 =$ $= -x+83$
3. *En la expresión* $4x+3y-3$, *sustituir* x *por* $(7-4y)$ *y simplificar.*	$4x+3y-3$ $4(7-4y)+3y-3 = 28-16y+3y-3 = -13y+25$
4. *Multiplicar por 6 y simplificar esta expresión:* $\frac{2(x-y+4)}{3}-\frac{2x-y}{2}-\frac{5}{6}$	$6\cdot\left(\frac{2(x-y+4)}{3}\right)-\frac{6(2x-y)}{2}-6\cdot\frac{5}{6} = 2\cdot 2(x-y+4)-3(2x-y)-5 =$ $= 4x-4y+16-6x+3y-5 =$ $= -2x-y+11$

Piensa y practica

1. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $3(x-1)+5(x-2)-7x$

b) $2(2x-3)+1-(x-5)$

c) $5x+3(1-x)-12-2(x-5)$

d) $10(x-1)+2(x+9)-4(2+3x)$

e) $3x-1-(2x+1)-1+(x+2)+3$

2. Multiplica por el número indicado y simplifica.

a) $\frac{3(x+2)}{2}+\frac{x-1}{5}-\frac{2(x+1)}{5}-\frac{37}{10}$ por 10

b) $\frac{2x-3}{2}-\frac{x+3}{4}+4+\frac{x-1}{2}$ por 4

c) $x+\frac{2x-3}{9}+\frac{x-1}{3}-\frac{12x+4}{9}$ por 9

d) $\frac{2x}{3}-\frac{3y}{2}-2(x+y)+3$ por 6

e) $\frac{2(x+1)}{3}-\frac{y}{2}-1$ por 6

3. Expresa algebraicamente y simplifica.

a) La suma de un número más su tercera parte.

b) La suma de las edades de Ana y Raquel, sabiendo que Ana tiene 8 años más que Raquel.

c) Invertí una cantidad, x, y ha aumentado un 12 %. ¿Qué cantidad tengo ahora?

d) Invertí una cantidad, x, y he perdido el 5 %. ¿Qué cantidad tengo ahora?

e) La suma de tres números consecutivos.

f) El triple de un número menos su cuarta parte.

g) La suma de las edades de Alberto y su padre, sabiendo que este tiene 28 años más que aquel.

h) Un ciclista va a una velocidad v. Otro ciclista viene 10 km/h más rápido. ¿A qué velocidad se acerca el uno al otro?

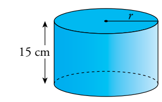
82

UNIDAD 5

Expresiones de segundo grado

Con vistas a la resolución de ecuaciones de segundo grado, te conviene adquirir agilidad en el manejo de este tipo de expresiones.

Ejercicios resueltos

1. *Simplificar esta expresión:* $(x+5)^2-2(x+1)(x-3)$	$(x+5)^2-2(x+1)(x-3) =$ (efectuamos las multiplicaciones) $= x^2+10x+25-2(x^2-2x-3) =$ (suprimimos paréntesis) $= x^2+10x+25-2x^2+4x+6 = -x^2+14x+31$
2. *Multiplicar por 4 y simplificar esta expresión:* $\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x+2)(x-2)}{4}-\frac{3}{4}$	$4\cdot\frac{(x-1)^2}{2}-4\cdot\frac{(x+2)(x-2)}{4}-4\cdot\frac{3}{4} =$ $= 2(x-1)^2-(x+2)(x-2)-3 = 2(x^2-2x+1)-(x^2-4)-3 =$ $= 2x^2-4x+2-x^2+4-3 = x^2-4x+3$
3. *Expresar algebraicamente el producto de dos números pares consecutivos.*	Un número par cualquiera: $2x$ El siguiente número par: $2x+2$ El producto: $2x\cdot(2x+2)$ Simplificando: $4x^2+4x$
4. *Expresar algebraicamente el área total de un cilindro de 15 cm de altura y radio de la base desconocido.*	$A_{TOTAL} = 2A_{BASE}+A_{LATERAL} = 2\cdot\pi r^2+2\pi r h$ $h = 15 \rightarrow A_{TOTAL} = 2\pi r^2+30\pi r$ Es una expresión de 2.º grado con variable r. 

Piensa y practica

4. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $(x-1)(x+1)+(x-2)^2-3$

b) $(x+2)(x-3)+x-3$

c) $(x+1)^2-2x(x+2)+14$

d) $(x+1)^2-(x-1)^2+2-x^2-6$

5. Multiplica por el número indicado y simplifica:

a) $x(2x+1)-\frac{(x-1)^2}{2}-3$ por 2

b) $\frac{x(x+3)}{2}-\frac{(x+1)^2}{3}+\frac{1}{3}$ por 6

6. Expresa algebraicamente y simplifica.

a) El producto de dos números naturales consecutivos.

b) El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden x y $x+5$.

c) El área de un rectángulo cuyas dimensiones (largo y ancho) suman 11 dm.

d) El área de un rectángulo de 200 m de perímetro.

7. La diferencia de dos números es 20. Si al menor lo llamamos x:

a) ¿Cómo se designa al mayor?

b) ¿Cómo se designa su producto?

c) ¿Cómo se designa la suma de sus cuadrados?

83

Sugerencias

- En este epígrafe, sin introducir contenidos nuevos, y mediante ejemplos resueltos, se pretende entrenar al alumnado en habilidades y procedimientos que necesitará en el desarrollo de las dos próximas unidades.
- Este entrenamiento se dirige a dos objetivos:
  — Algunos aspectos de la operativa algebraica que van a aparecer en la resolución de ecuaciones. Destacamos aquí la gestión de expresiones con denominadores y su producto por cantidades (múltiplos) que los eliminan.
  — La traducción de enunciados a lenguaje algebraico, que necesitarán a la hora de aplicar las ecuaciones a la resolución de problemas.

Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) $x-13$ b) $3x$ c) 1 d) 0 e) $2x+2$

2 a) $13x-13$ b) $5x+5$ c) $2x-10$ d) $-8x-21y+18$ e) $4x-3y-2$

3 a) $x+\frac{x}{3}=\frac{4}{3}x$ b) $x+(x+8)=2x+8$ c) $1{,}12x$ d) $0{,}95x$ e) $x+(x+1)+(x+2)=3x+3$ f) $3x-\frac{x}{4}=\frac{11}{4}x$ g) $x+(x+28)=2x+28$ h) $v+(v+10)=2v+10$

4 a) $2x^2-4x$ b) x^2-9 c) $-x^2-2x+15$ d) $-x^2+4x-4$

5 a) $3x^2+4x-7$ b) x^2+5x

6 a) $n(n+1)=n^2+n$ b) $x^2+(x+5)^2=2x^2+10x+25$ c) $x(11-x)=11x-x^2$ d) $x(100-x)=100x-x^2$

7 a) $20+x$ b) $20x+x^2$ c) $2x^2+40x+400$

ANOTACIONES

Ejercicios y problemas

Practica

Monomios

1. Considera los siguientes monomios:

a) $2x^2$ b) $-3x^3$ c) $\frac{1}{2}x^2$

d) $\frac{3}{4}x$ e) $-\frac{1}{3}x$ f) x^3

- Indica el grado y el coeficiente en cada caso.
- Calcula el valor numérico de cada uno para $x = -1$ y para $x = 1/2$.

2. Opera y simplifica todo lo posible.

a) $-2x^3 + x^3 - 3x^3$ b) $-3x^2 - \frac{2}{5}x^2 + 5x^2$

c) $\frac{1}{2}xy - \frac{3}{4}xy + xy$ d) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{10}x^2 + x^2$

e) $2x \cdot (-3x^2) \cdot (-x)$ f) $\frac{3}{4}x^3 \cdot (-2x^2) \cdot 2x$

g) $-\frac{15x^6}{3x^2} \cdot x$ h) $-\frac{7x^3}{2x^2} \cdot x$

3. Expresa mediante un monomio estos enunciados:

a) La mitad de un número más su tercera parte.

b) El área de un círculo de radio r.

c) El producto de un número por el triple de otro.

d) El volumen de un ortoedro de dimensiones x, $2x$ y 5 cm.

e) El volumen de una pirámide de altura h cuya base es un cuadrado de lado l.

Polinomios

4. Reduce e indica el grado de cada polinomio:

a) $2x^4 - 3x^2 + 4x$ b) $x^2 - 3x^3 + 2x$

c) $3x^3 - 2x^2 - 3x^3$ d) $2x + 3$

5. Dados los polinomios $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x - 1$ y $Q(x) = 6x^3 + 2x^2 - 7$, calcula $P + Q$ y $P - Q$.

6. Efectúa.

a) $3x(2x^2 - 5x + 1)$ b) $7x^3(2x^3 + 3x^2 - 2)$

c) $-5x(x^4 - 3x^2 + 5x)$ d) $-x^2(x^3 + 4x^2 - 6x + 3)$

7. Opera y simplifica.

a) $(5x - 2)(3 - 2x)$ b) $x(x - 3)(2x - 1)$

c) $(x^2 - 5x)(x^3 + 2x)$ d) $(3x^3 + 1)(2x^2 - 3x + 5)$

8. Calcula el cociente y el resto en estas divisiones:

a) $(3x^2 - 7x + 5) : (3x + 1)$

b) $(4x^3 - x) : (2x + 3)$

c) $(5x^3 - 3x^2 + 8x) : (5x + 2)$

9. Las siguientes divisiones son exactas. Efectúalas y expresa el dividendo como producto de dos factores:

a) $(x^5 + 2x^4 + x + 2) : (x + 2)$

b) $(3x^3 + 7x^2 + 7x + 4) : (3x + 4)$

c) $(x^3 - x^2 + 9x - 9) : (x - 1)$

d) $(2x^3 - 3x^2 + 10x - 15) : (2x - 3)$

10. Expresa mediante un polinomio cada uno de estos enunciados:

a) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos.

b) El área total de un ortoedro de dimensiones x, $2x$ y 5 cm.

c) La cantidad de leche envasada en "x" botellas de 1,5 l y en "y" botellas de 1 l.

d) El área de un triángulo rectángulo en el que un cateto mide 3 cm más que el otro.

Factor común e identidades notables

11. Saca factor común en cada polinomio:

a) $9x^2 + 6x - 3$ b) $2x^3 - 6x^2 + 4x$

c) $10x^3 - 5x^2$ d) $x^4 - x^3 + x^2 - x$

e) $410x^5 - 620x^3 + 130x$ f) $72x^4 - 64x^3$

g) $5x - 100x^3$ h) $30x^6 - 75x^4 - 45x^2$

12. Completa estas expresiones en tu cuaderno:

a) $(x - 3)^2 = x^2 - \square x + 9$

b) $(2x + 1)^2 = 4x^2 + \square x + 1$

c) $(x + \square)^2 = x^2 + \square x + 16$

d) $(3x - \square)^2 = \square x^2 - \square x + 4$

13. Expresa los polinomios siguientes como cuadrado de un binomio (hazlo en tu cuaderno):

a) $x^2 + 12x + 36 = (x + \square)^2$

b) $49 + 14x + x^2 = (\square + \square)^2$

c) $4x^2 - 20x + 25 = (\square - 5)^2$

d) $1 + 4x + 4x^2 = (\square + \square)^2$

84

Soluciones de "Ejercicios y problemas"

1 a) $2x^2$: grado 2; coeficiente 2

$x = -1 \rightarrow 2 \cdot (-1)^2 = 2 \cdot 1 = 2$

$x = \frac{1}{2} \rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

b) $-3x^3$: grado 3; coeficiente -3

$x = -1 \rightarrow -3 \cdot (-1)^3 = -3 \cdot (-1) = 3$

$x = \frac{1}{2} \rightarrow -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = -3 \cdot \frac{1}{8} = -\frac{3}{8}$

c) $\frac{1}{2}x^2$: grado 2; coeficiente $\frac{1}{2}$

$x = -1 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

d) $\frac{3}{4}x$: grado 1; coeficiente $\frac{3}{4}$

$x = -1 \rightarrow \frac{3}{4} \cdot (-1) = -\frac{3}{4}$

$x = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

e) $-\frac{1}{3}x$: grado 1; coeficiente $-\frac{1}{3}$

$x = 1 \rightarrow -\frac{1}{3} \cdot (-1) = \frac{1}{3}$

$x = \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

f) x^3: grado 3; coeficiente 1

$x = -1 \rightarrow (-1)^3 = -1$

$x = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

2 a) $-4x^3$ b) $\frac{8}{5}x^2$ c) $\frac{3}{4}xy$ d) $\frac{13}{10}x^2$

e) $6x^4$ f) $-3x^6$ g) $-5x^4$ h) $-\frac{7}{2}x$

3 a) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}x$ b) πr^2 c) $x \cdot 3y = 3xy$

d) $x \cdot 2x \cdot 5 = 10x^2$ e) $\frac{l^2 h}{3}$

4 a) Grado 4 b) Grado 3 c) Grado 2 d) Grado 1

5 $P + Q = 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 8$

$P - Q = 2x^4 - 11x^3 - 2x^2 + 3x + 6$

6 a) $6x^3 - 15x^2 + 3x$ b) $14x^6 + 21x^5 - 14x^3$

c) $-5x^5 + 15x^3 - 25x^2$ d) $-x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 3x^2$

7 a) $-10x^2 + 19x - 6$ b) $2x^3 - 7x^2 + 3x$

c) $x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 10x^2$ d) $6x^5 - 9x^4 + 15x^3 + 2x^2 - 3x + 5$

8 a) Cociente $= x - \frac{8}{3}$; Resto $= \frac{23}{3}$

b) Cociente $= 2x^2 - 3x + 4$; Resto $= -12$

c) Cociente $= x^2 - x + 2$; Resto $= -4$

9 a) $x^5 + 2x^4 + x + 2 = (x + 2)(x^4 + 1)$

b) $3x^3 + 7x^2 + 7x + 4 = (3x + 4)(x^2 + x + 1)$

c) $x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x - 1)(x^2 + 9)$

d) $2x^3 - 3x^2 + 10x - 15 = (2x - 3)(x^2 + 5)$

10 a) $2x^2 + 2x + 1$ b) $4x^2 + 30x$

c) $1{,}5x + y$ d) $\frac{x^2 + 3x}{2}$

11 a) $9x^2 + 6x - 3 = 3(3x^2 + 2x - 1)$

b) $2x^3 - 6x^2 + 4x = 2x(x^2 - 3x + 2)$

c) $10x^3 - 5x^2 = 5x^2(2x - 1)$

d) $x^4 - x^3 + x^2 - x = x(x^3 - x^2 + x - 1)$

e) $410x^5 - 620x^3 + 130x = 10x(41x^4 - 6x^2 + 13)$

f) $72x^4 - 64x^3 = 8x^3(9x - 8)$

g) $5x - 100x^3 = (1 - 20x^2)\,5x$

h) $30x^6 - 75x^4 - 45x^2 = 15x^2(2x^4 - 5x^2 - 3)$

12 a) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$ b) $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

c) $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$ d) $(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

13 a) $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$ b) $49 + 14x + x^2 = (7 + x)^2$

c) $4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$ d) $1 + 4x + 4x^2 = (1 + 2x)^2$

ANOTACIONES

14. Expresa en cada caso como producto de dos binomios (hazlo en tu cuaderno):

a) $x^2 - 16 = (x + \square)(x - \square)$

b) $x^2 - 1$ c) $9 - x^2$

d) $4x^2 - 1$ e) $25 - 9x^2$

Expresiones de primer grado

15. Opera y simplifica.

a) $6(x + 3) - 2(x - 5)$

b) $3(2x + 1) + 7(x - 3) - 4x$

c) $5(3 - 2x) - (x + 7) - 8$

d) $4(1 - x) + 6x - 10 - 3(x - 5)$

e) $2x - 3 + 3(x - 1) - 2(3 - x) + 5$

f) $2(x + 3) - (x + 1) - 1 + 3(5x - 4)$

16. Multiplica por el número indicado en cada caso y simplifica:

a) $\frac{1-2x}{9} - 1 + \frac{x+4}{6}$ por 18

b) $\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} - \frac{x+1}{4}$ por 40

c) $\frac{x-3}{2} - \frac{5x+1}{3} - \frac{1-9x}{6}$ por 6

17. Multiplica en cada caso por el mínimo común múltiplo de los denominadores y simplifica la expresión resultante:

a) $\frac{x+1}{2} + \frac{x-3}{5} - 2x + 6 - \frac{x-8}{5}$

b) $\frac{1+12x}{4} - \frac{x-4}{12} - \frac{3(x+1)-(1-x)}{8}$

c) $\frac{3x-2}{6} - \frac{4x+1}{10} + \frac{2}{15} + \frac{2(x-3)}{4}$

Expresiones de segundo grado

18. Opera y simplifica.

a) $(x - 3)(x + 3) + (x - 4)(x + 4) - 25$

b) $(x + 1)(x - 3) + (x - 2)(x - 3) - (x^2 - 3x - 1)$

c) $2x(x + 3) - 2(3x + 5) + x$

d) $(x + 1)^2 - 3x - 3$

e) $(2x + 1)^2 - 1 - (x - 1)(x + 1)$

f) $x(x - 3) + (x + 4)(x - 4) - (2 - 3x)$

19. Multiplica por el número indicado y simplifica.

a) $(3x + 1)(3x - 1) + \frac{(x-2)^2}{2} - 1 + 2x$ por 2

b) $\frac{x^2+2}{3} - \frac{x^2+1}{4} - \frac{x+15}{12}$ por 12

c) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{3} - \frac{3x-2}{6} - \frac{x^2}{3}$ por 6

20. Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.

a) $\frac{(x+1)(x-3)}{2} + x - \frac{x}{4}$

b) $x + \frac{3x+1}{2} - \frac{x-2}{3} - x^2 + 2$

c) $\frac{x(x-1)}{3} - \frac{x(x+1)}{4} - \frac{3x+4}{12}$

Regla de Ruffini

21. Divide aplicando la regla de Ruffini.

a) $(x^2 - 5x + 1) : (x - 2)$

b) $(x^3 - 3x^2 + 5x + 2) : (x + 1)$

c) $(2x^3 - 15x - 7) : (x - 3)$

d) $(3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x + 2)$

22. Calcula el cociente y el resto de estas divisiones:

a) $(5x^2 + 13x + 4) : (x + 3)$

b) $(x^3 - x^2 - 15x - 11) : (x - 5)$

c) $(3x^3 - 2x^2 + 8x - 6) : (x + 1)$

d) $(x^4 - 2x^3 - 16x^2 - 7x) : (x - 2)$

23. Calcula el valor numérico de cada polinomio para el valor de la incógnita que se indica:

a) $5x^2 - 4x + 4$ para $x = -1$

b) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 9$ para $x = 2$

c) $3x^3 - 4x^2 - 16x + 15$ para $x = -2$

d) $x^4 - x^3 - 17x^2 - 11x$ para $x = 4$

24. Busca el valor que debe tomar en cada polinomio el término independiente, m, para que la división sea exacta:

a) $(6x^2 - 5x + m) : (x - 2)$

b) $(2x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 9x - m) : (x + 1)$

c) $(x^3 - 9x^2 - 10x + m) : (x - 1)$

d) $(2x^4 - 9x^3 - 18x + m) : (x - 5)$

85

Soluciones de "Ejercicios y problemas"

14 a) $(x + 4)(x - 4)$ b) $(x + 1)(x - 1)$ c) $(3 + x)(3 - x)$

d) $(2x - 1)(1 + 2x)$ e) $(5 + 3x)(5 - 3x)$

15 a) $4x + 28$ b) $9x - 18$ c) $-11x$

d) $-x + 9$ e) $7x - 7$ f) $16x - 8$

16 a) $-x - 4$ b) $23x$ c) $2x - 12$

17 a) $-15x + 75$ b) $60x$ c) $36x - 108$

18 a) $2x^2 - 50$ b) $x^2 - 4x + 4$ c) $2x^2 + x - 10$

d) $x^2 - x - 2$ e) $3x^2 + 4x + 1$ f) $2x^2 - 18$

19 a) $19x^2$ b) $x^2 - x$ c) $6x^2 - 3x$

20 a) $2x^2 - x - 6$ b) $-6x^2 + 13x + 19$ c) $x^2 - 4x + 4$

21 a)
$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 1 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{-5} \end{array}$$

$C(x) = x - 3$

$R = -5$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 5 & 2 \\ -1 & & -1 & 4 & -9 \\ \hline & 1 & -4 & 9 & \boxed{-7} \end{array}$$

$C(x) = x^2 - 4x + 9$

$R = -7$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -15 & -7 \\ 3 & & 6 & 18 & 9 \\ \hline & 2 & 6 & 3 & \boxed{2} \end{array}$$

$C(x) = 2x^2 + 6x + 3$

$R = 2$

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 5 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & & -6 & 2 & 0 & -2 \\ \hline & 3 & -1 & 0 & 1 & \boxed{-3} \end{array}$$

$C(x) = 3x^3 - x^2 + 1$

$R = -3$

22 a) $C(x) = 5x - 2;\ R = 10$ b) $C(x) = x^2 + 4x + 5;\ R = 14$

c) $C(x) = 3x^2 - 5x + 13;\ R = -19$ d) $C(x) = x^3 - 16x - 39;\ R = -78$

23 a) 13 b) 7 c) 7 d) –124

24 a) $m = -14$ b) $m = -10$ c) $m = 18$ d) $m = -35$

ANOTACIONES

Ejercicios y problemas

25. Observa y contesta.

	1	–3	–13	15
1		1	–2	–15
	1	–2	–15	0
–3		–3	15	
	1	–5	0	

a) ¿Cuáles con las raíces del polinomio $P(x)$?

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$$

b) Factoriza $P(x)$.

Aplica lo aprendido

26. Saca factor común y utiliza las identidades notables para factorizar los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 6x^2 + 9x$ b) $x^3 - x$
c) $4x^4 - 81x^2$ d) $x^3 + 2x^2 + x$
e) $3x^3 - 27x$ f) $3x^2 + 30x + 75$

27. Factoriza los polinomios siguientes:

a) $x^4 - 8x^3 + 16x^2$ b) $x^3 - 4x$
c) $9x^3 + 6x^2 + x$ d) $4x^2 - 25$

28. Encuentra las raíces de estos polinomios y factorízalos:

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$ b) $x^3 - 19x^2 + 34x$
c) $x^3 - x^2 - 5x - 3$ d) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

29. Simplifica.

a) $\dfrac{x^2 + 2x}{3x^3 + 6x^2}$ b) $\dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 10x + 25}$
c) $\dfrac{20x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x + 9}$ d) $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 6x^2 + 5x - 12}$

30. En cada caso, desarrolla $A + B$ y simplifica:

a) $A = 4(x - 3) + y$ $B = 3(x + 3) - y - 18$
b) $A = \dfrac{x + 4}{5} - y + 1$ $B = \dfrac{x - 6}{5} + y + 1$
c) $A = -2\left(\dfrac{x + 1}{3} + y - 1\right)$ $B = \dfrac{x - 3}{4} + 2y - 1$
d) $A = 6(x + 2) - 2(y + 7)$ $B = x + 2(y + 1)$

31. Expresa algebraicamente.

a) La edad de Alberto dentro de 22 años, si hoy tiene x años.
b) La cantidad que se obtiene al invertir x euros y ganar el 11 %.
c) Por un ordenador y un reproductor de música se pagan 2 500 €. Si el ordenador cuesta x euros, ¿cuánto cuesta el reproductor de música?
d) Se compra un artículo por x euros y pierde el 15 % de su valor. ¿Cuánto costaría ahora?
e) El perímetro de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide x cm, un cateto, los 3/5 de la hipotenusa, y el otro cateto, 5 cm menos que esta.
f) Los lados iguales de un triángulo isósceles de 24 cm de perímetro, si el desigual mide x cm.

32. Expresa algebraicamente y simplifica cada expresión obtenida:

a) El área de una lámina rectangular de bronce cuya base mide 5/3 de su altura.
b) El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $16 - x$ y $9 - x$.
c) El área de un cuadrado de lado $x + 3$.
d) La diferencia de áreas de dos cuadrados de lados x y $x + 3$, respectivamente.
e) La superficie de un jardín rectangular de base x metros y perímetro 70 m.
f) El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles si un cateto mide x cm, y el perímetro, 24 cm.
g) El área de un rombo sabiendo que la longitud de una diagonal, x, es el triple de la otra.

33. Expresa algebraicamente cada enunciado:

a) El cuadrado de la diferencia de dos números.
b) La suma de los cuadrados de dos números.
c) La diagonal de un rectángulo de dimensiones x e y.
d) El coste de la mezcla de dos tipos de café, cuyos precios son 8 €/kg y 10 €/kg.
e) El dinero que tengo si llevo monedas de 2 € y de 50 céntimos.

86

Soluciones de "Ejercicios y problemas"

25 a) $x = 1$
$x = -3$
$x = 5$

b) $P(x) = (x - 1)(x + 3)(x - 5)$

26 a) $x(x - 3)^2$ b) $x(x - 1)(x + 1)$
c) $x^2(2x + 9)(2x - 9)$ d) $x(x + 1)^2$
e) $3x(x + 3)(x - 3)$ f) $3(x + 5)^2$

27 a) $x^2(x - 4)^2$ b) $x(x + 2)(x - 2)$
c) $x(3x + 1)$ d) $(2x + 5)(2x - 5)$

28 a) $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$ b) $x(x - 17)(x - 2)$
c) $(x + 1)^2(x - 3)$ d) $(x + 2)(x + 3)(x - 3)$

29 a) $\dfrac{1}{3x}$ b) $\dfrac{x + 5}{x - 5}$
c) $\dfrac{20x^2 - 2x - 3}{(x - 3)^2}$ d) $\dfrac{1}{x + 4}$

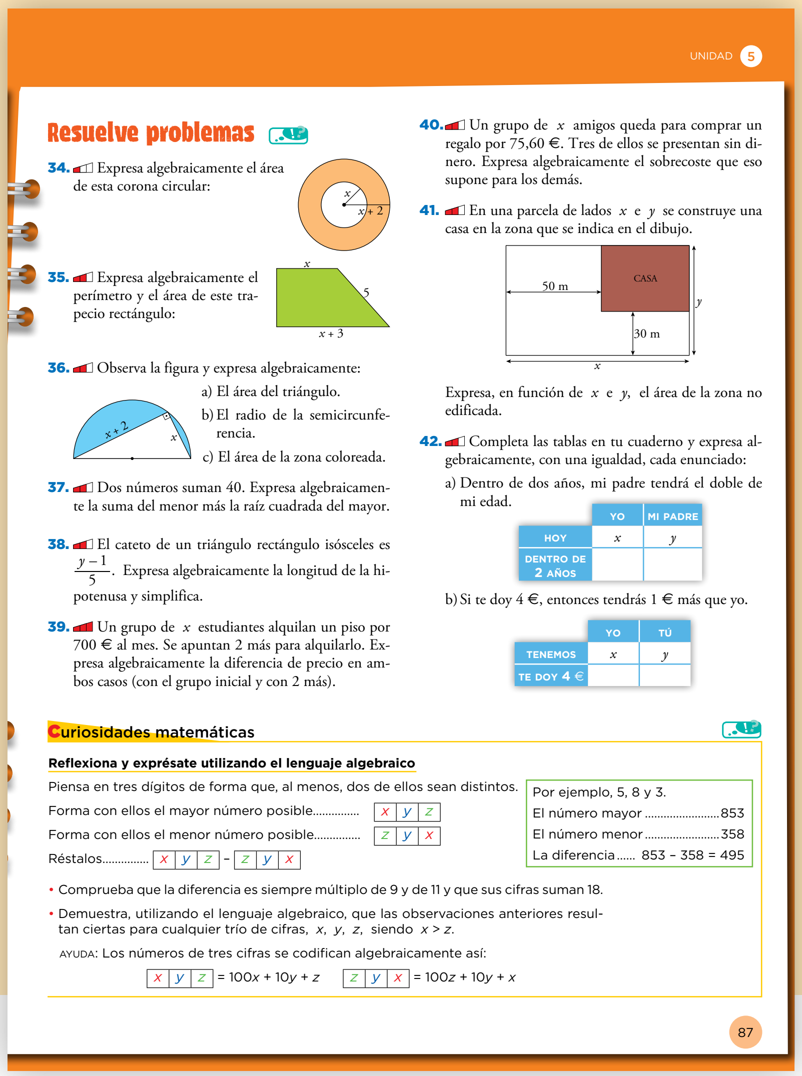
30 a) $7x - 21$ b) $\dfrac{2x + 8}{5}$
c) $\dfrac{-5x - 5}{12}$ d) $7x$

31 a) Tendrá $x + 22$ años.
b) Obtiene $1{,}11x$.
c) Ordenador: x €; equipo de música: $2500 - x$ €
d) Precio final $= 0{,}85x$
e) Perímetro $= \dfrac{13}{5}x - 5$
f) El lado desigual medirá $24 - 2x$.

32 a) Área $= \dfrac{5}{3}x^2$ b) $2x^2 - 50x + 337$ c) $x^2 + 6x + 9$
d) $6x + 9$ e) $35x - x^2$ f) $576 - 96x + 4x^2$
g) Área $= \dfrac{3x^2}{2}$

33 a) $(x - y)^2$ b) $x^2 + y^2$ c) $\sqrt{x^2 + y^2}$
d) $\dfrac{8x + 10y}{x + y}$ e) $2x + 0{,}50y$

ANOTACIONES



Resuelve problemas

34. Expresa algebraicamente el área de esta corona circular:

35. Expresa algebraicamente el perímetro y el área de este trapecio rectángulo:

36. Observa la figura y expresa algebraicamente:

a) El área del triángulo.

b) El radio de la semicircunferencia.

c) El área de la zona coloreada.

37. Dos números suman 40. Expresa algebraicamente la suma del menor más la raíz cuadrada del mayor.

38. El cateto de un triángulo rectángulo isósceles es $\frac{y-1}{5}$. Expresa algebraicamente la longitud de la hipotenusa y simplifica.

39. Un grupo de x estudiantes alquilan un piso por 700 € al mes. Se apuntan 2 más para alquilarlo. Expresa algebraicamente la diferencia de precio en ambos casos (con el grupo inicial y con 2 más).

40. Un grupo de x amigos queda para comprar un regalo por 75,60 €. Tres de ellos se presentan sin dinero. Expresa algebraicamente el sobrecoste que eso supone para los demás.

41. En una parcela de lados x e y se construye una casa en la zona que se indica en el dibujo.

Expresa, en función de x e y, el área de la zona no edificada.

42. Completa las tablas en tu cuaderno y expresa algebraicamente, con una igualdad, cada enunciado:

a) Dentro de dos años, mi padre tendrá el doble de mi edad.

	YO	MI PADRE
HOY	x	y
DENTRO DE 2 AÑOS		

b) Si te doy 4 €, entonces tendrás 1 € más que yo.

	YO	TÚ
TENEMOS	x	y
TE DOY 4 €		

Curiosidades matemáticas

Reflexiona y exprésate utilizando el lenguaje algebraico

Piensa en tres dígitos de forma que, al menos, dos de ellos sean distintos.

Forma con ellos el mayor número posible.............. $\boxed{x\,|\,y\,|\,z}$

Forma con ellos el menor número posible.............. $\boxed{z\,|\,y\,|\,x}$

Réstalos.............. $\boxed{x\,|\,y\,|\,z} - \boxed{z\,|\,y\,|\,x}$

Por ejemplo, 5, 8 y 3.
El número mayor 853
El número menor 358
La diferencia ...... 853 – 358 = 495

- Comprueba que la diferencia es siempre múltiplo de 9 y de 11 y que sus cifras suman 18.
- Demuestra, utilizando el lenguaje algebraico, que las observaciones anteriores resultan ciertas para cualquier trío de cifras, x, y, z, siendo $x > z$.

AYUDA: Los números de tres cifras se codifican algebraicamente así:

$\boxed{x\,|\,y\,|\,z} = 100x + 10y + z$ $\quad\boxed{z\,|\,y\,|\,x} = 100z + 10y + x$

Soluciones de "Ejercicios y problemas"

34 $4\pi(x+1)$

35 Perímetro $= 2(x+6)$; Área $= 4x + 6$

36 a) $A = \dfrac{x^2+2x}{2}$ b) $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2+2x+2}$

c) $A = \pi\left(\dfrac{x^2+2x+2}{4}\right) - \dfrac{x^2+2x}{x}$

37 $40 - x + \sqrt{x}$

38 $h = \sqrt{2}\,\dfrac{y-1}{5}$

39 Diferencia $= \dfrac{1400}{x(x+2)}$

40 $\dfrac{226{,}8}{x(x-3)}$

41 $50y + 30x - 1\,500$

42 a) $y = 2x + 2$

	YO	MI PADRE
HOY	x	y
DENTRO DE 2 AÑOS	$x+2$	$y+2$

b) $y = x - 7$

	YO	TÚ
TENEMOS	x	y
TE DOY 4 €	$x-4$	$y+4$

Curiosidades matemáticas

Se incluyen en este apartado anécdotas y curiosidades, y también algún problema o reto, relacionados con el mundo de las matemáticas.

Se pretende ofrecer un espacio, fuera de programa, en el que, mediante actividades o situaciones más distendidas, experimentar el placer de razonar y superar retos.

Soluciones

- Sean x, y, z los tres dígitos, con $x > z$.

  Diferencia entre ambos números:

  $$(100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) =$$
  $$= 99 \cdot (x - z) = 9 \cdot 11 \cdot (x - z) \rightarrow \text{Es múltiplo de 9 y de 11.}$$

  La diferencia siempre es múltiplo de 99 y, por tanto, lo es de 9 y de 11.

- Pensemos ahora en la resta cifra a cifra:

  — Para restar las unidades, como $x > z$, tomaríamos una decena:

  $$z + 10 - x \text{ (y nos llevamos una)}$$

  $$\begin{array}{rccc} & x & y & z \\ - & z & y & x \\ \hline & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \quad\rightarrow\quad \begin{array}{rccc} & x & y-1 & z+10 \\ - & z & y & x \\ \hline & \bullet & \bullet & z+10-x \end{array}$$

  — Para restar las decenas, $(y - 1) - y$, como hemos tomado una decena del minuendo, nos vemos obligados a tomar una centena:

  $$(y - 1 + 10) - y = 9 \text{ (y nos llevamos una)}$$

  $$\begin{array}{rccc} & x-1 & y-1+10 & z+10 \\ - & z & y & x \\ \hline & \bullet & 9 & z+10-x \end{array} \quad\rightarrow\quad \begin{array}{rccc} & x-1 & y+9 & z+10 \\ - & z & y & x \\ \hline & x-1-z & 9 & z+10-x \end{array}$$

  — Finalmente, restamos las centenas $\rightarrow$ $x - 1 - z$

  La suma de las cifras de la diferencia es siempre 18:

  $$(x - 1 - z) + 9 + (z + 10 - x) = 18$$

ANOTACIONES