



doctor
KNOWMAD
rōnin del conocimiento

by Robert Usach, PhD.

5 ESTÁTICA Y CoMs

#ESTÁTICA

LA **#ESTÁTICA** ES LA RAMA DE LA FÍSICA MECÁNICA QUE ESTUDIA LAS CONDICIONES DE **#EQUILIBRIO**.

PARA QUE UN CUERPO ESTÉ EN **#EQUILIBRIO**:

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad ; \quad \sum \mathbf{M} = 0$$

POR ESTE MOTIVO, LA **#ESTÁTICA** SUELE SER UNA PARTE DE LA **#DINÁMICA**, YA QUE ES UN CASO CONCRETO DE ESTA.

#CoM

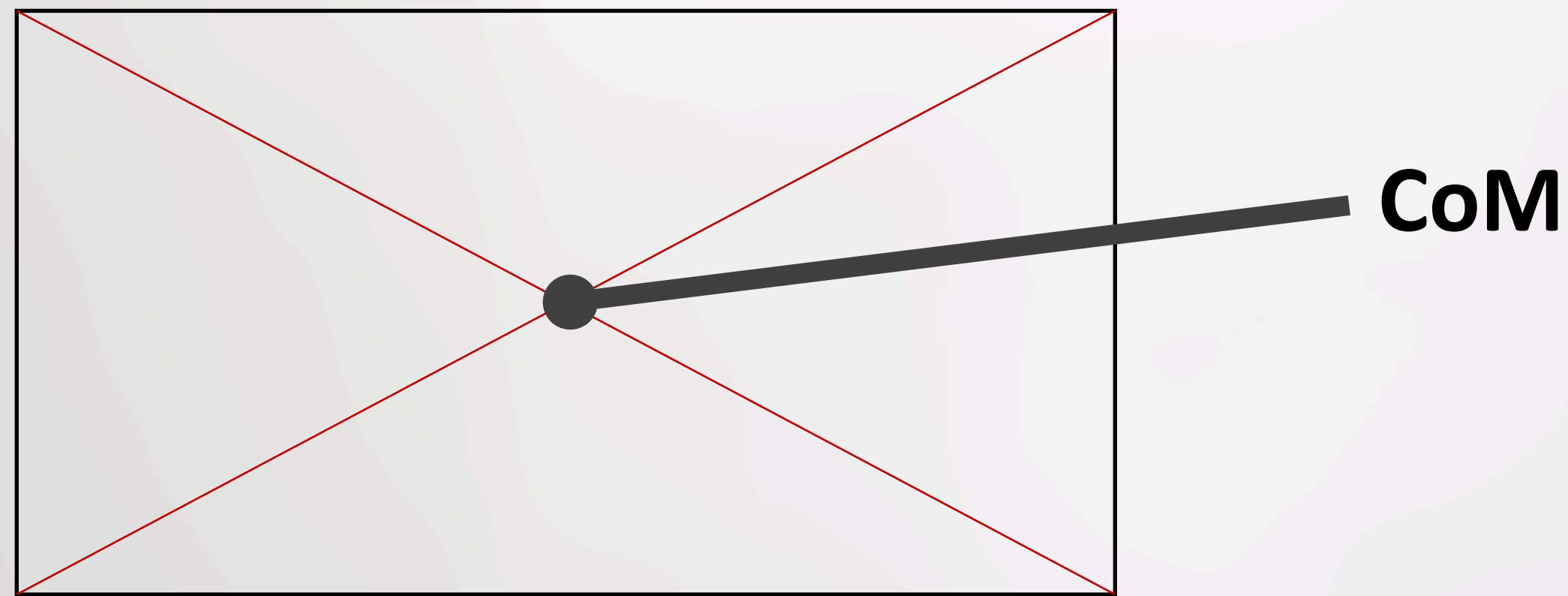
EL **#CENTRO DE MASAS** ES EL PUNTO EN EL QUE ASUMIMOS QUE SE CONCENTRA TODA LA MASA.

LA SUMA DE MOMENTOS DE LAS PARTES DEBE SER EL MOMENTO DEL TODO:

$$\sum \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_t \quad ; \quad \sum (\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{d}_i) = \mathbf{P}_t \cdot \mathbf{d}_{\text{CoM}}$$

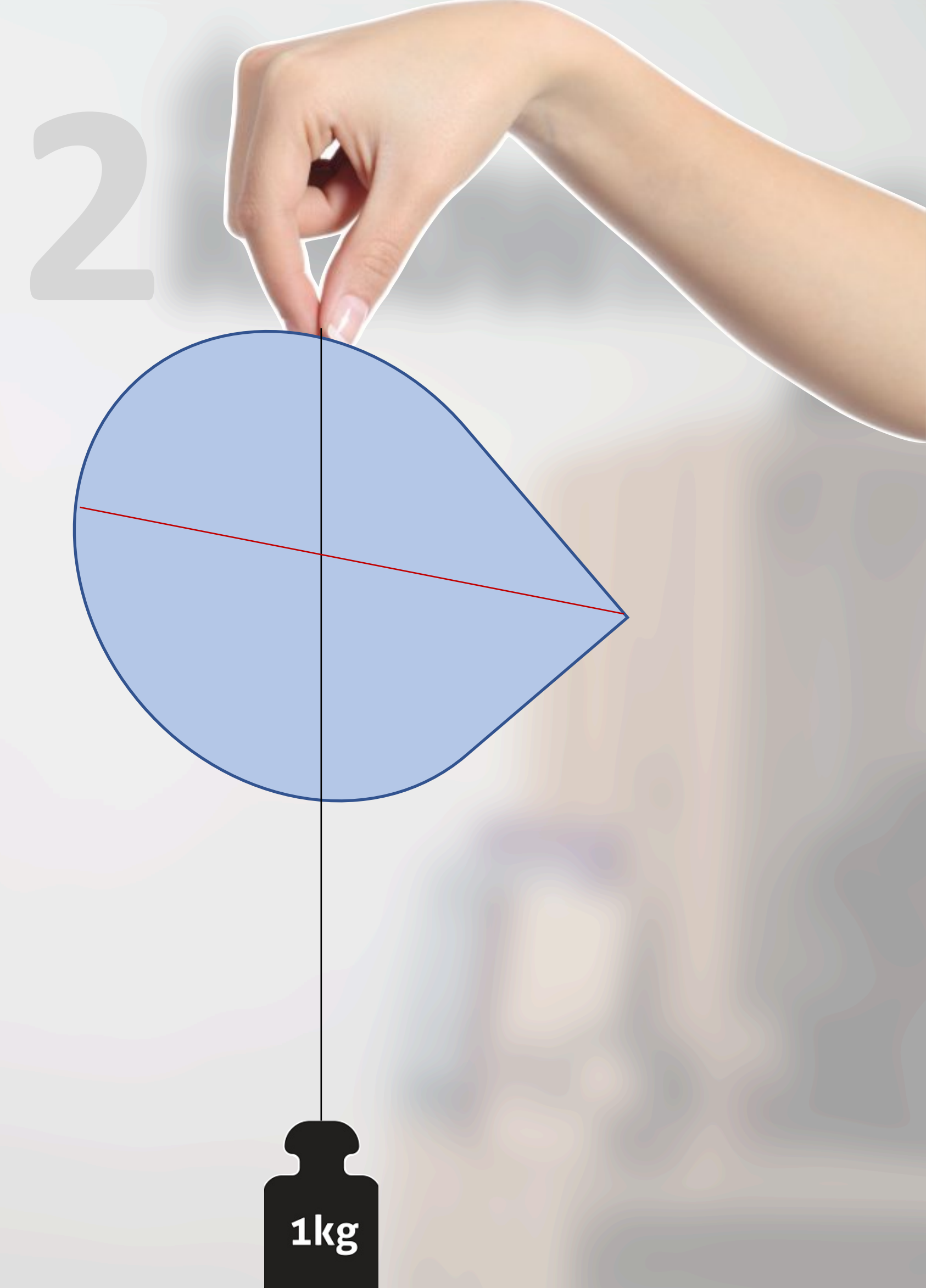
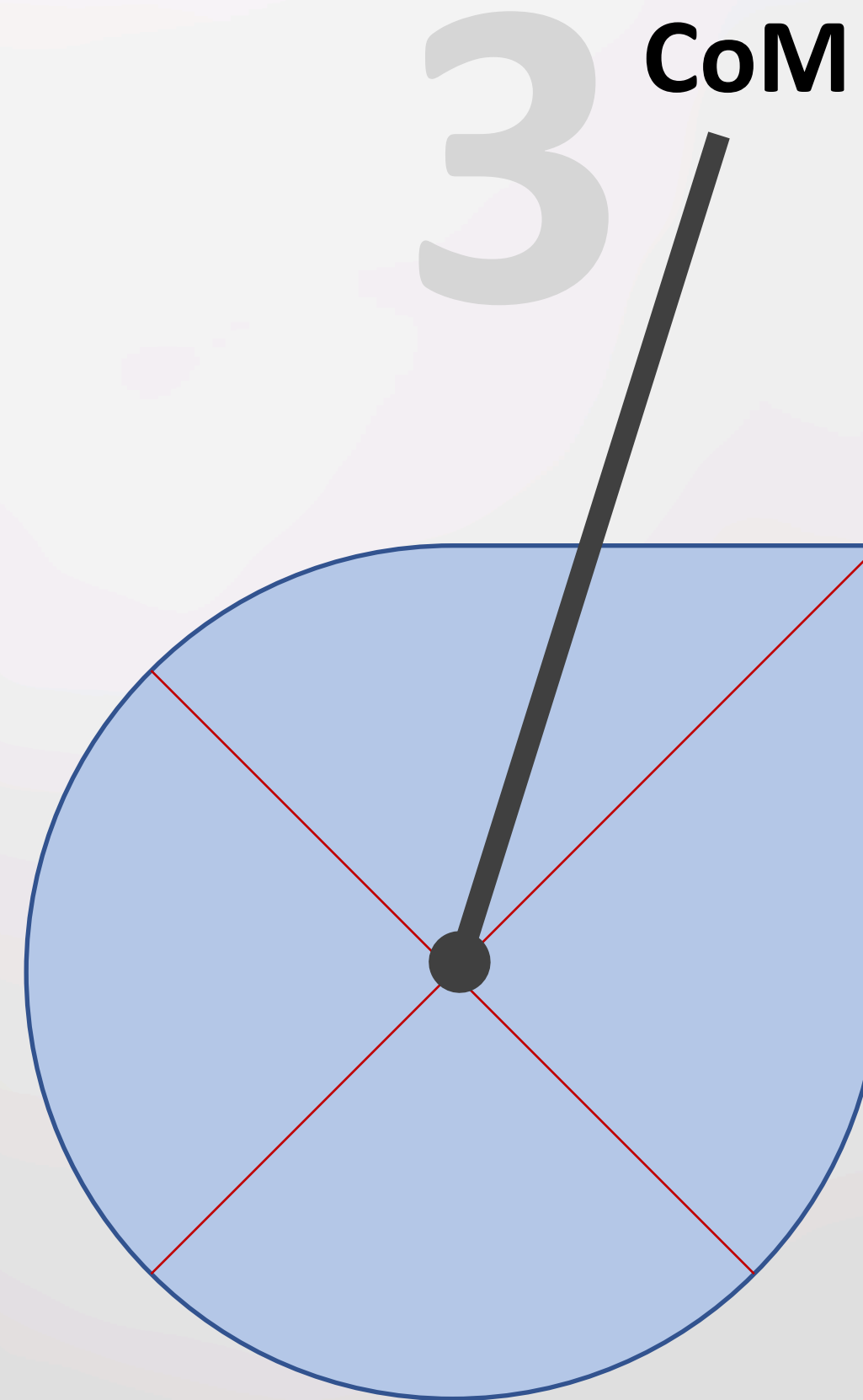
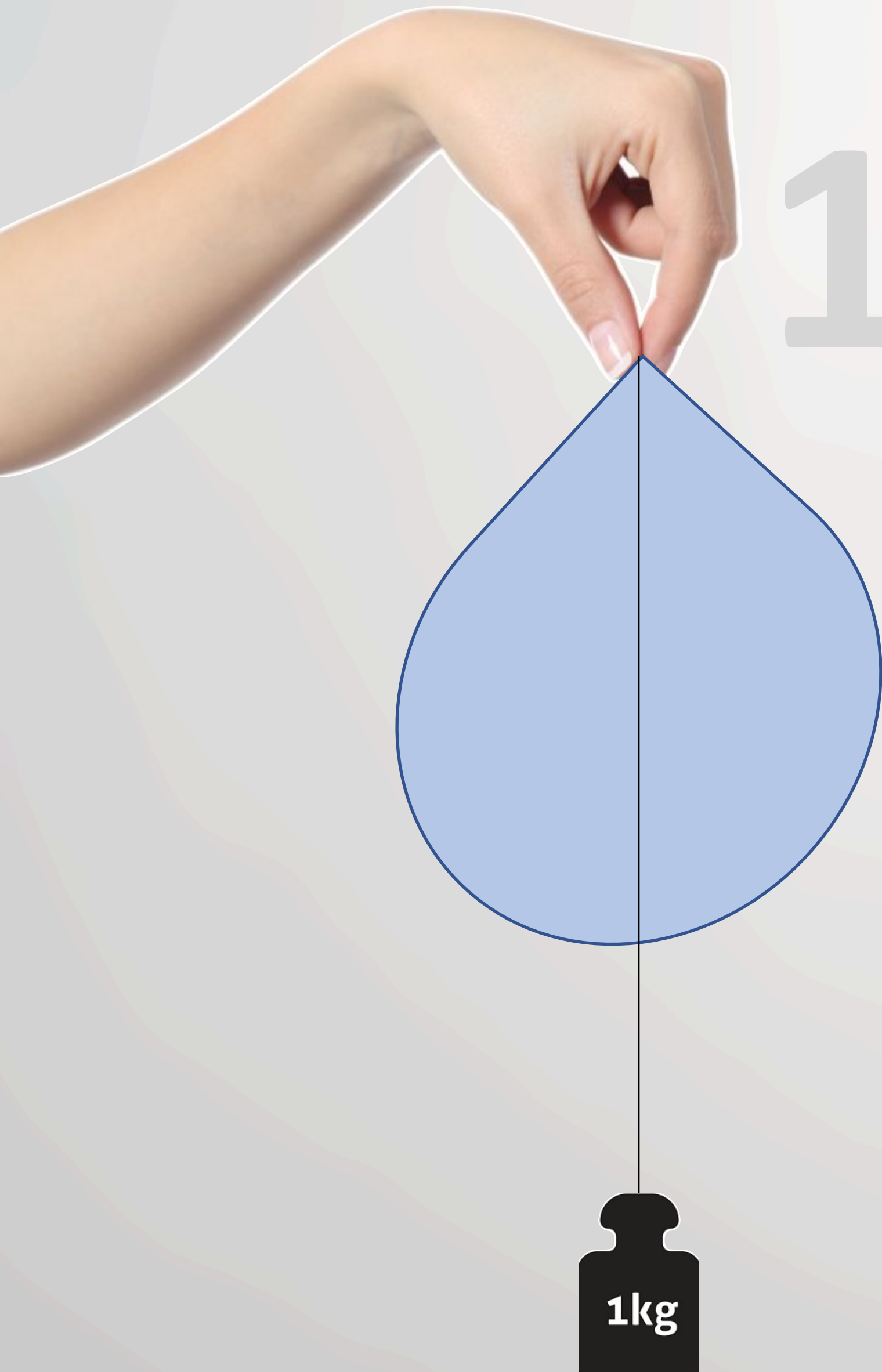
#CoM = #CdG EN CAMPOS GRAVITATORIOS UNIFORMES

El **centro de masas** de un sistema discreto o continuo es el punto geométrico que dinámicamente se comporta como si en él estuviera aplicada la resultante de las fuerzas externas al sistema. De manera análoga, se puede decir que el sistema formado por toda la masa concentrada en el centro de masas es un sistema equivalente al original.



Si este objeto tiene una distribución de masa uniforme, y la forma rectangular, su CoM se halla en el cruce de estas líneas

Hallar el CoM de un objeto de modo **visual**:



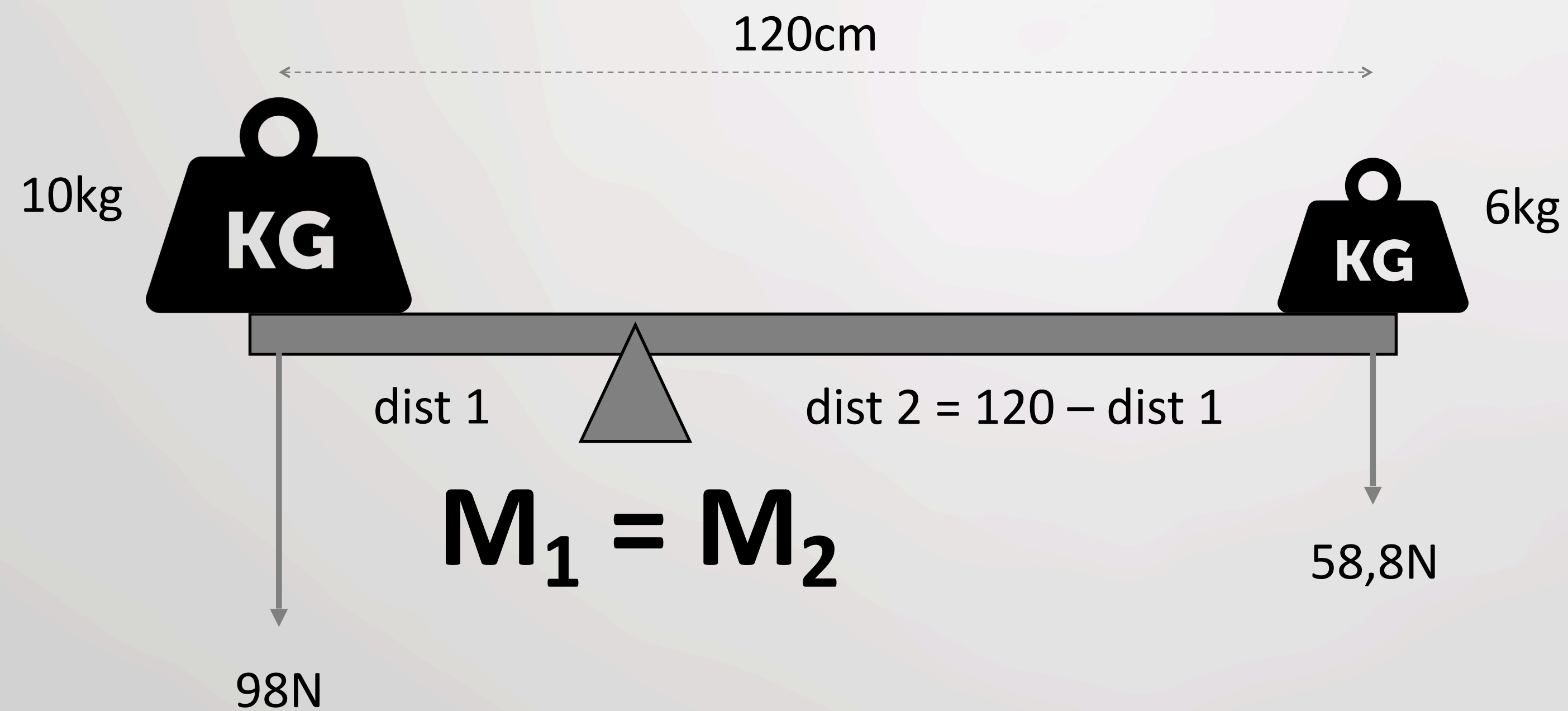
Hallar el CoM de un objeto de modo **matemático**:

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Hallar el CoM de un objeto de modo **matemático**:

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

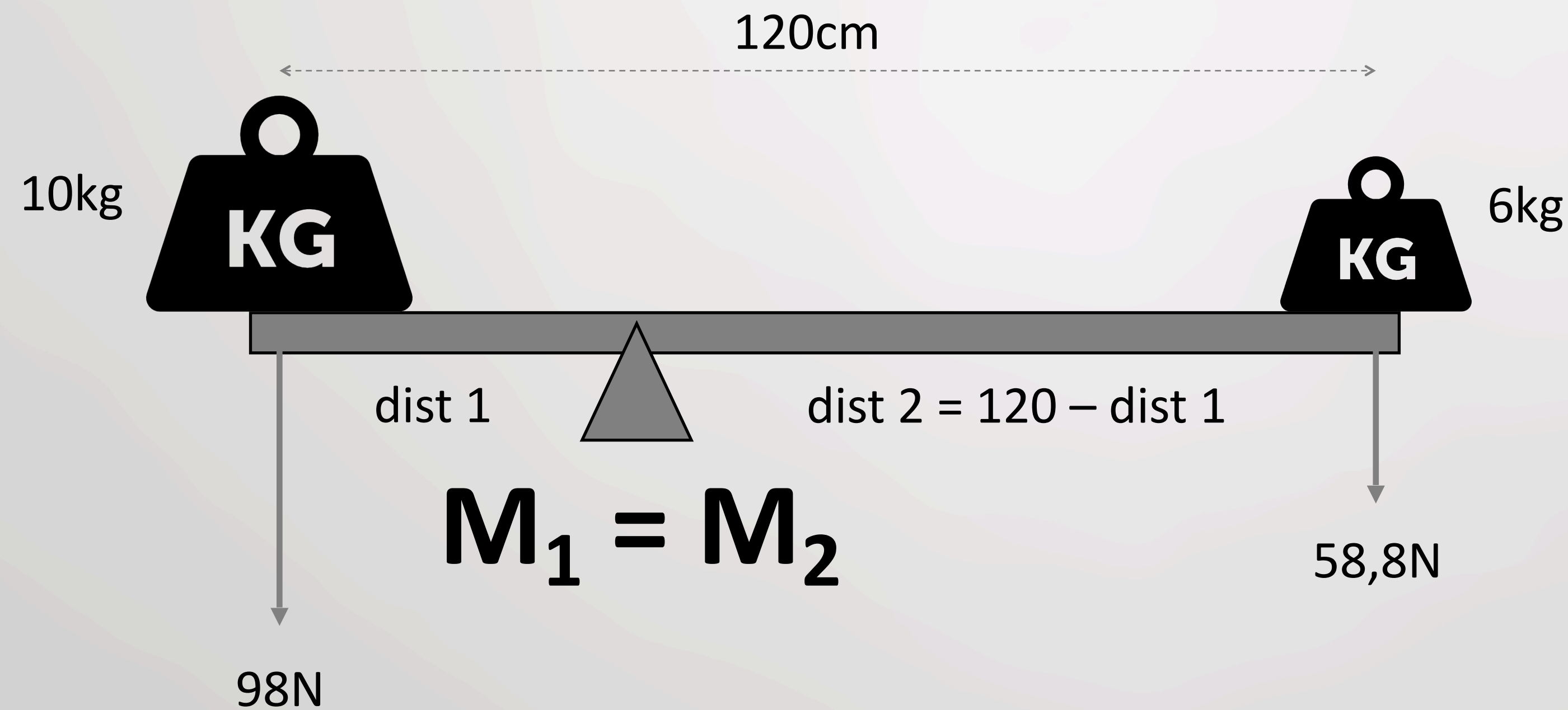
Veámoslo por pasos: es como si sabemos los Pesos que hay en cada lado de una palanca-balancín, y queremos saber donde se halla el Fulcro respecto el inicio de la palanca (aplicación Peso 1):



Hallar el CoM de un objeto de modo **matemático**:

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Veámoslo por pasos: es como si sabemos los Pesos que hay en cada lado de una palanca-balancín, y queremos saber donde se halla el Fulcro respecto el inicio de la palanca (aplicación Peso 1):



$$M_1 = M_2$$

$$98 \cdot \text{dist 1} = 58,8 \cdot (120 - \text{dist 1})$$

$$98 \cdot \text{dist 1} = 58,8 \cdot 120 - 58,8 \cdot \text{dist 1}$$

$$98 \cdot \text{dist 1} + 58,8 \cdot \text{dist 1} = 58,8 \cdot 120$$

$$156,8 \cdot \text{dist 1} = 7056$$

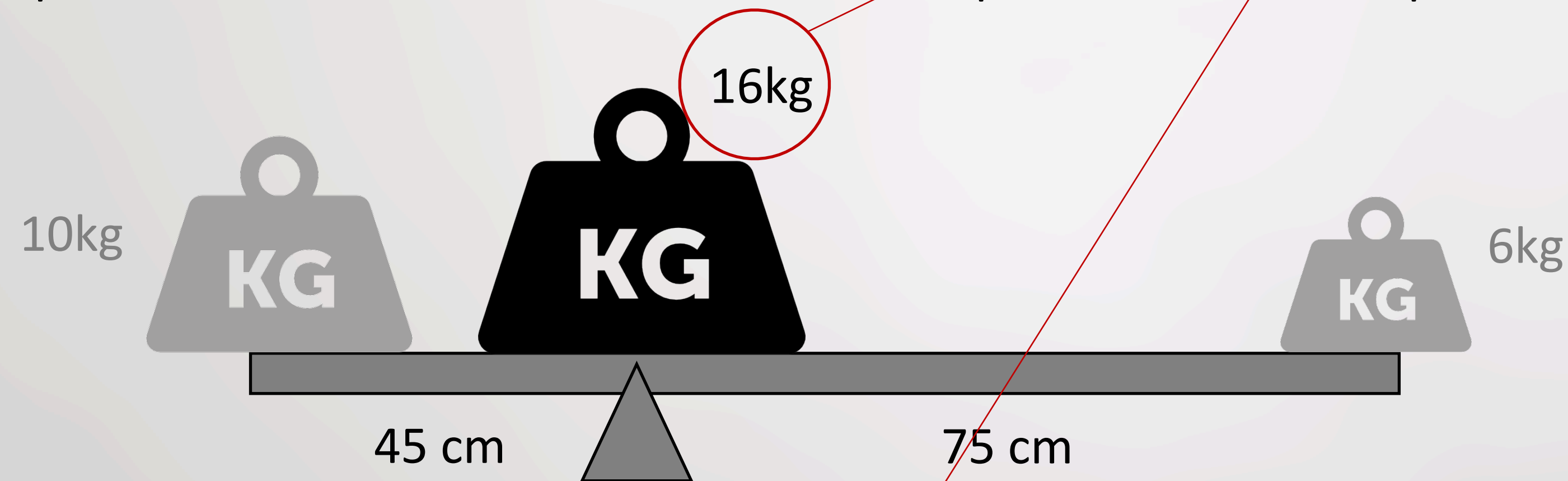
$$\text{dist 1} = 7056 / 156,8 = 45 \text{ cm}$$

$$\text{dist 2} = 120 - \text{dist 1} = 75 \text{ cm}$$

Hallar el CoM de un objeto de modo **matemático**:

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Veámoslo por pasos: es como si sabemos los Pesos que hay en cada lado de una palanca-balancín, y queremos saber donde se halla el Fulcro respecto el inicio de la palanca (aplicación Peso 1):



$$M_1 = M_2$$

$$98 \cdot \text{dist } 1 = 58,8 \cdot (120 - \text{dist } 1)$$

$$98 \cdot \text{dist } 1 = 58,8 \cdot 120 - 58,8 \cdot \text{dist } 1$$

$$98 \cdot \text{dist } 1 + 58,8 \cdot \text{dist } 1 = 58,8 \cdot 120$$

$$156,8 \cdot \text{dist } 1 = 7056$$

$$\text{dist } 1 = 7056 / 156,8 = 45 \text{ cm}$$

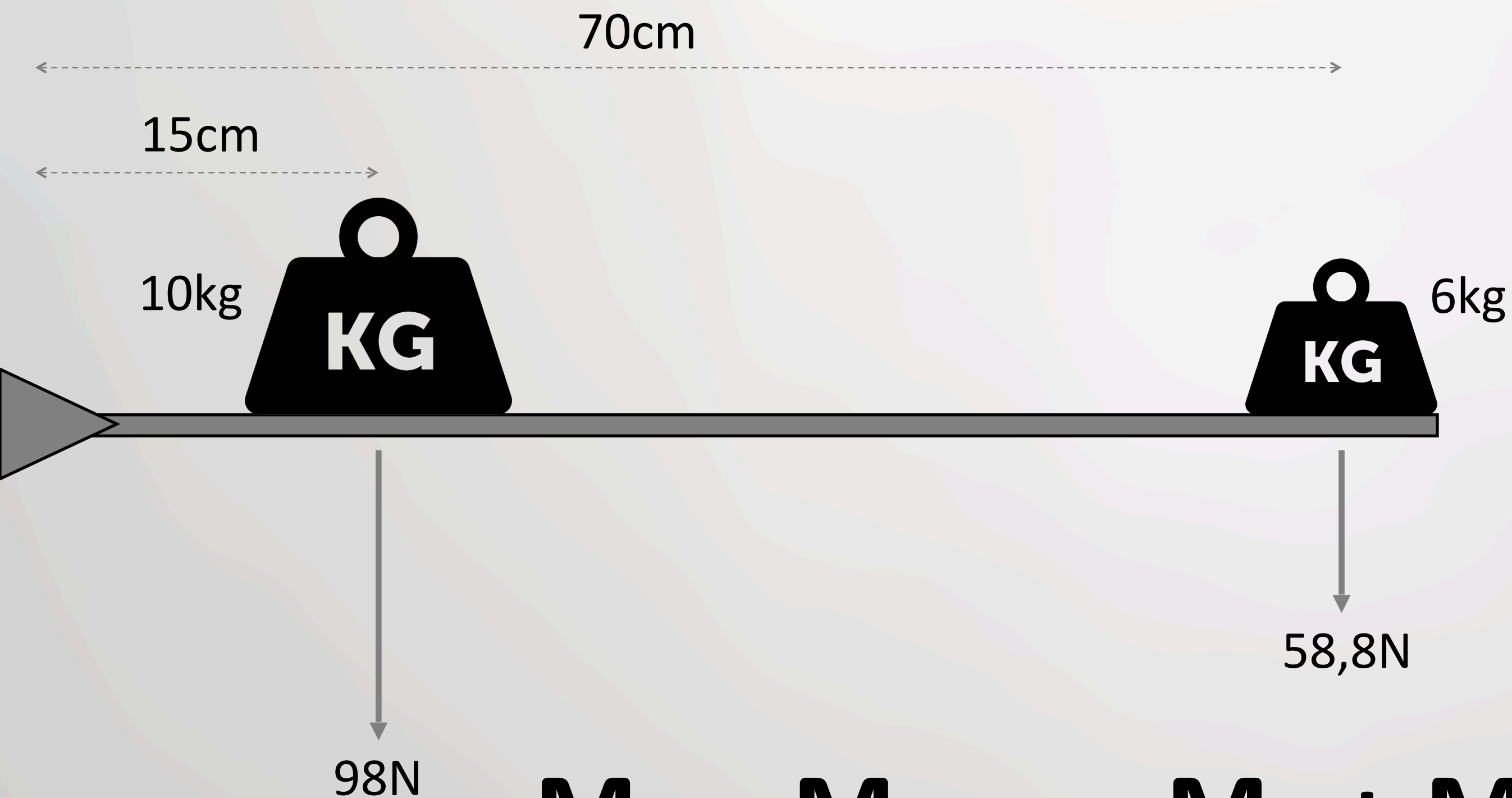
$$\text{dist } 2 = 120 - \text{dist } 1 = 75 \text{ cm}$$

$$M_1 = M_2$$

$$M_1 + M_2 = 0$$

Ahora, veámoslo de una manera similar:

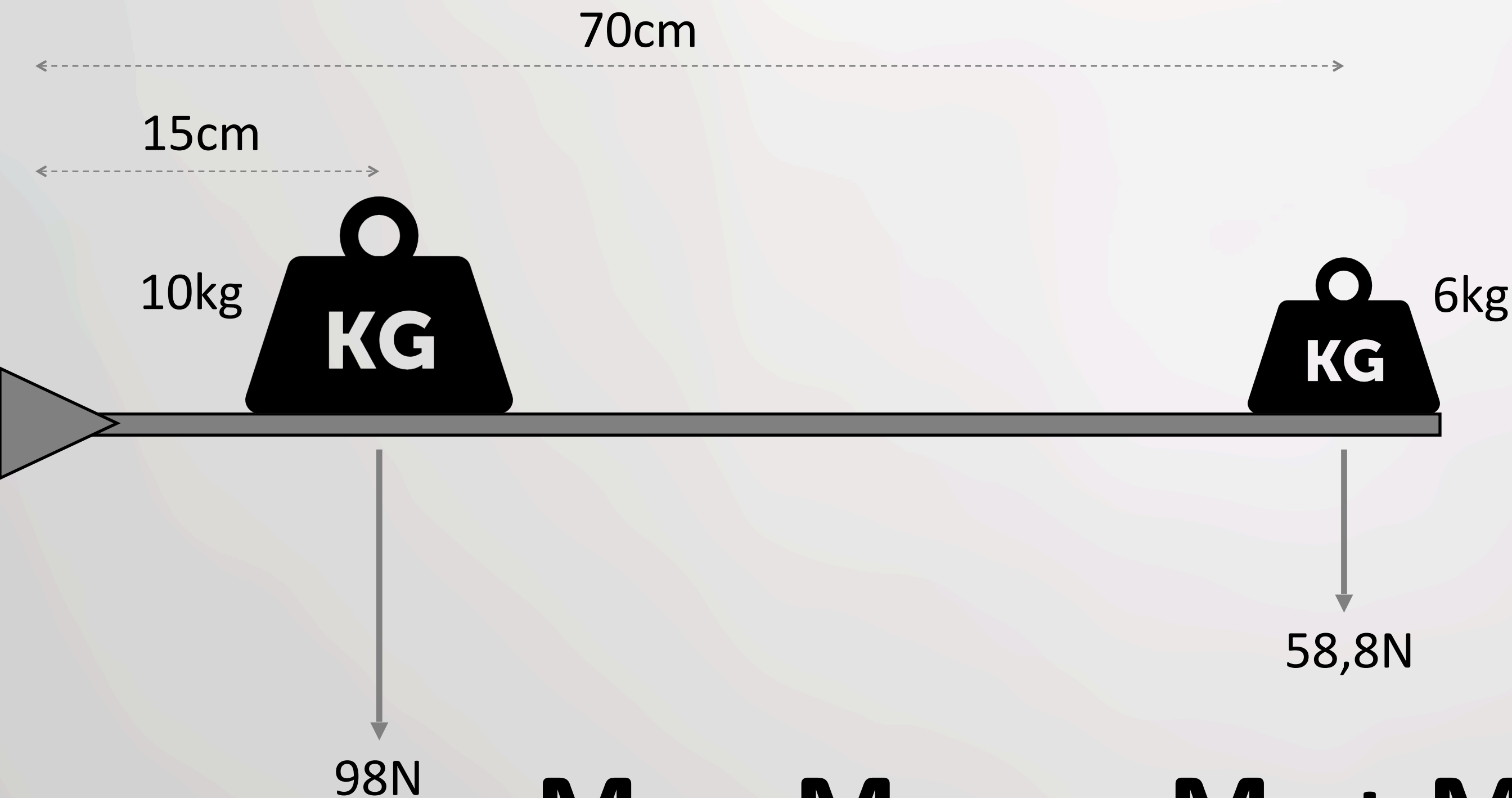
¿Dónde (distancia respecto la pared) debería aplicarse el total de Peso que muestra el diagrama de la palanca, para que genere el mismo efecto (Momento)?



$$M_T = M_{CoM} = M_1 + M_2$$

Ahora, veámoslo de una manera similar:

¿Dónde (distancia respecto la pared) debería aplicarse el total de Peso que muestra el diagrama de la palanca, para que genere el mismo efecto (Momento)?



$$M_1 = P_1 \cdot \text{dist}_1 = m_1 \cdot g \cdot \text{dist}_1$$

$$M_1 = 10 \cdot 9,8 \cdot 0,15 = 14,7 \text{ Nm}$$

$$M_2 = P_2 \cdot \text{dist}_2 = m_2 \cdot g \cdot \text{dist}_2$$

$$M_2 = 6 \cdot 9,8 \cdot 0,70 = 41,16 \text{ Nm}$$

$$M_T = M_{\text{CoM}} = m_T \cdot g \cdot \text{dist}_{\text{CoM}}$$

$$M_T = M_1 + M_2 = 14,7 + 41,16 = 55,86 \text{ Nm}$$

$$m_T = \Sigma m = 10 + 6 = 16 \text{ kg}$$

$$m_T \cdot g \cdot \text{dist}_{\text{CoM}} = 55,86$$

$$\text{dist}_{\text{CoM}} = 55,86 / (16 \cdot 9,8) = 0,36 \text{ m}$$

$$M_T = M_{\text{CoM}} = M_1 + M_2$$

Ahora, veámoslo de una manera similar:

¿Dónde (distancia respecto la pared) debería aplicarse el total de Peso que muestra el diagrama de la palanca, para que genere el mismo efecto (Momento)?



$$M_T = M_{CoM} = M_1 + M_2 + \dots$$

$$M_1 = P_1 \cdot \text{dist}_1 = m_1 \cdot g \cdot \text{dist}_1$$

$$M_2 = P_2 \cdot \text{dist}_2 = m_2 \cdot g \cdot \text{dist}_2$$

$$M_T = M_{CoM} = m_T \cdot g \cdot \text{dist}_{CoM}$$

$$m_T = \Sigma m$$

$$\Sigma m \cdot g \cdot \text{dist}_{CoM} = m_1 \cdot g \cdot \text{dist}_1 + m_2 \cdot g \cdot \text{dist}_2$$

$$\Sigma m \cdot \text{dist}_{CoM} = m_1 \cdot \text{dist}_1 + m_2 \cdot \text{dist}_2$$

$$\text{dist}_{CoM} = ((m_1 \cdot \text{dist}_1) + (m_2 \cdot \text{dist}_2)) / \Sigma m$$

$$\text{dist}_{CoM} = \Sigma(m_i \cdot \text{dist}_i) / \Sigma m$$

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

PROBLEMA – CoM 2D

Halla las coordenadas (x,y) del CoM de un objeto compuesto de 2 bloques geométricos (cada bloque tiene una distribución de masa homogénea)



$$\text{CoM}_{TX} = \frac{\sum(m_i \cdot \text{CoM}_{iX})}{\sum m}$$

$$\text{CoM}_{TY} = \frac{\sum(m_i \cdot \text{CoM}_{iY})}{\sum m}$$

Halla las coordenadas (x,y) del CoM de un objeto compuesto de 2 bloques geométricos (cada bloque tiene una distribución de masa homogénea)



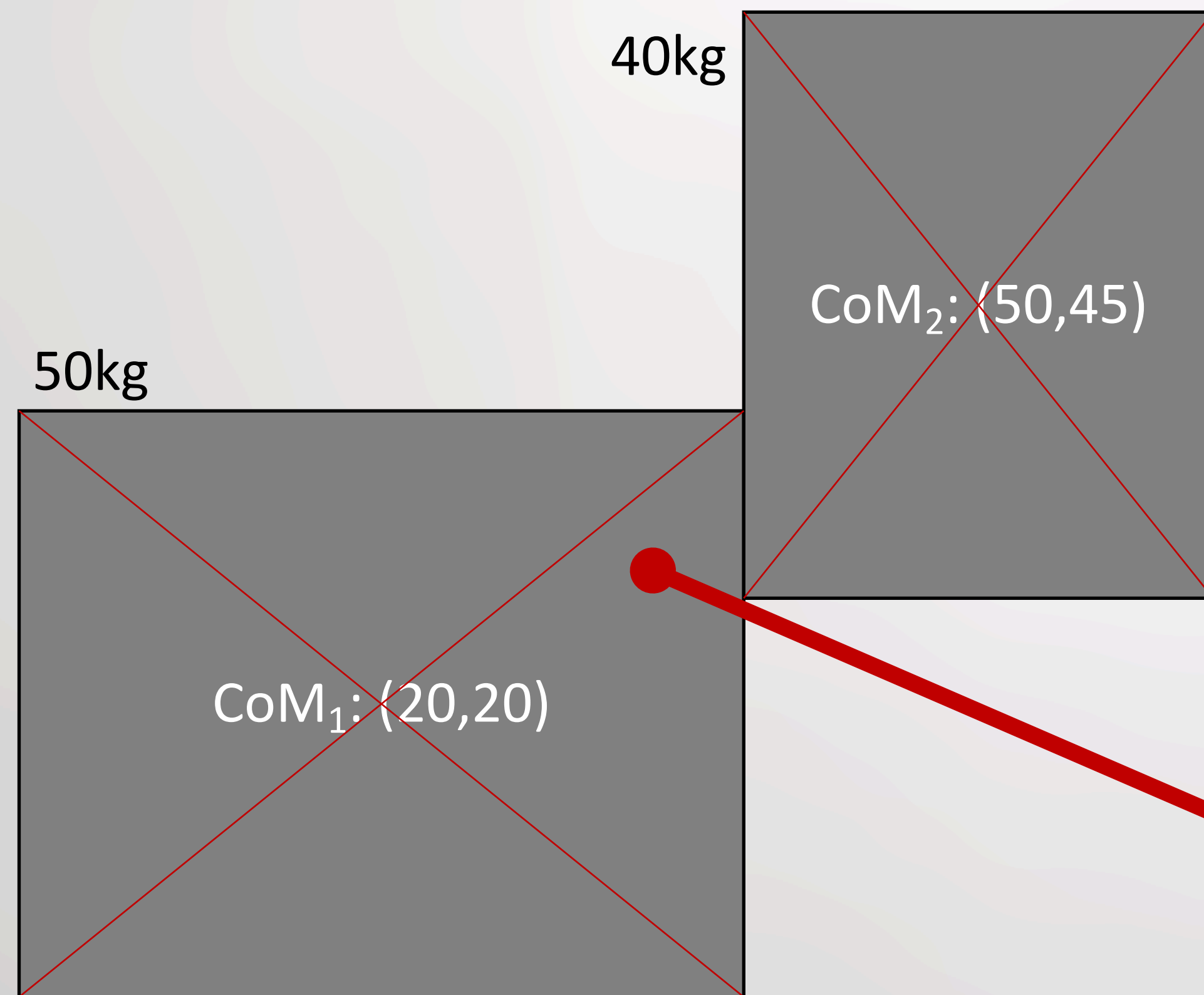
$$\text{CoM}_{\text{TX}} = \frac{\sum(m_i \cdot \text{CoM}_{iX})}{\sum m}$$

$$\text{CoM}_{\text{TY}} = \frac{\sum(m_i \cdot \text{CoM}_{iY})}{\sum m}$$

$$\text{CoM}_{\text{TX}} = \frac{(m_1 \cdot \text{CoM}_{1X}) + (m_2 \cdot \text{CoM}_{2X})}{(m_1 + m_2)}$$

$$\text{CoM}_{\text{TY}} = \frac{(m_1 \cdot \text{CoM}_{1Y}) + (m_2 \cdot \text{CoM}_{2Y})}{(m_1 + m_2)}$$

Halla las coordenadas (x,y) del CoM de un objeto compuesto de 2 bloques geométricos (cada bloque tiene una distribución de masa homogénea)



$$\text{CoM}_{\text{TX}} = \Sigma(m_i \cdot \text{CoM}_{iX}) / \Sigma m$$

$$\text{CoM}_{\text{TY}} = \Sigma(m_i \cdot \text{CoM}_{iY}) / \Sigma m$$

$$\text{CoM}_{\text{TX}} = ((m_1 \cdot \text{CoM}_{1X}) + (m_2 \cdot \text{CoM}_{2X})) / (m_1 + m_2)$$

$$\text{CoM}_{\text{TX}} = ((50 \cdot 20) + (40 \cdot 50)) / (50 + 40)$$

$$\text{CoM}_{\text{TX}} = (1000 + 2000) / (90) = 33,33$$

$$\text{CoM}_{\text{TY}} = ((m_1 \cdot \text{CoM}_{1Y}) + (m_2 \cdot \text{CoM}_{2Y})) / (m_1 + m_2)$$

$$\text{CoM}_{\text{TY}} = ((50 \cdot 20) + (40 \cdot 45)) / (50 + 40)$$

$$\text{CoM}_{\text{TY}} = (1000 + 1800) / (90) = 31,11$$

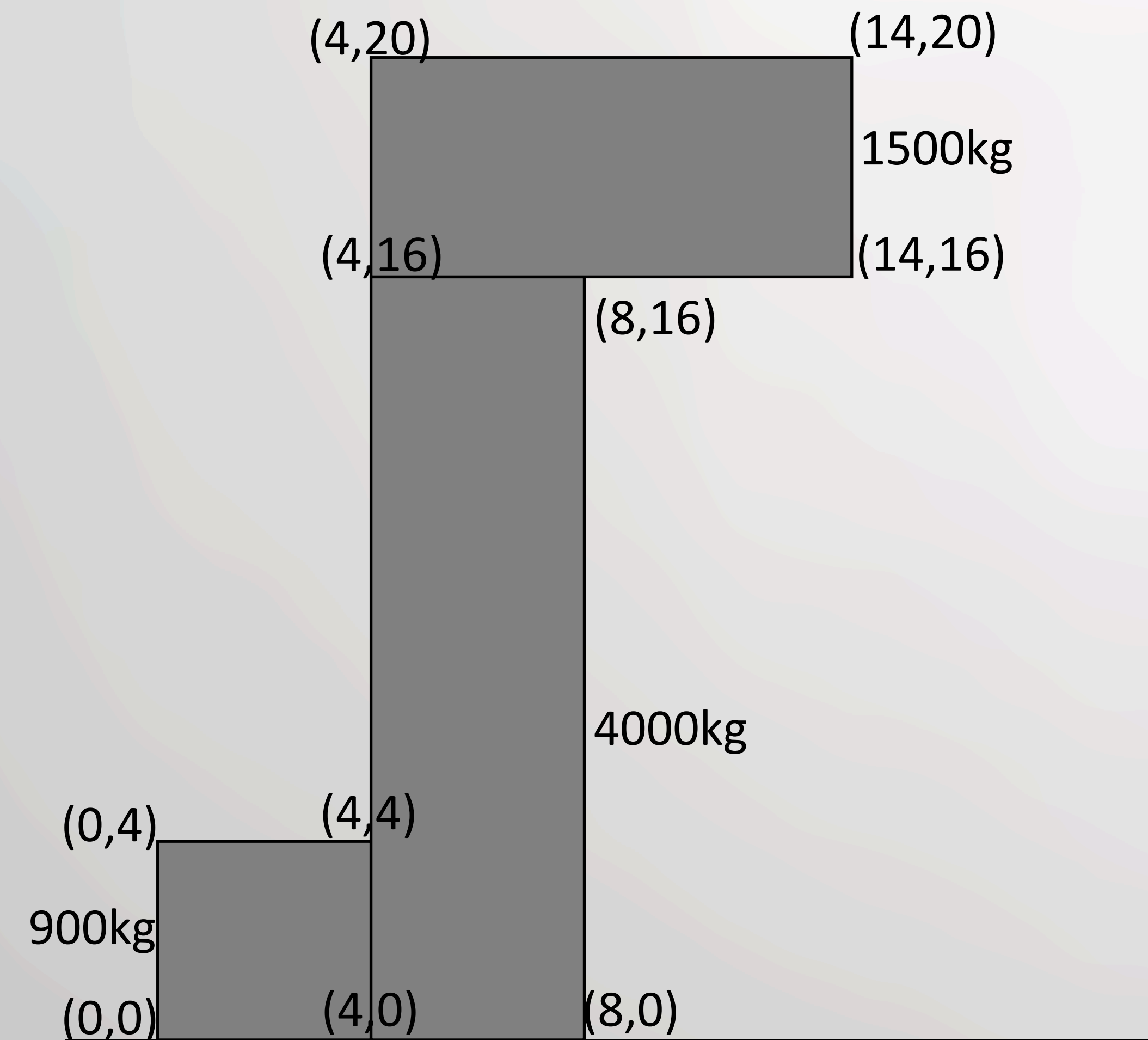
$$\text{CoM: } (33,33 , 31,11)$$

PROBLEMA 2 ESTABILIDAD

Halla el CoM (x,y) y determina si el siguiente “edificio” es estable.

De momento, definiremos que un objeto es estable si proyecta su Peso (CoM) sobre la base de sustentación.

El edificio se puede “descomponer” en 3 bloques geométricos (cada bloque tiene una distribución de masa homogénea), y no hay problemas de unión entre bloques.



$$\text{CoM}_{TX} = \frac{\sum(m_i \cdot \text{CoM}_{iX})}{\sum m}$$

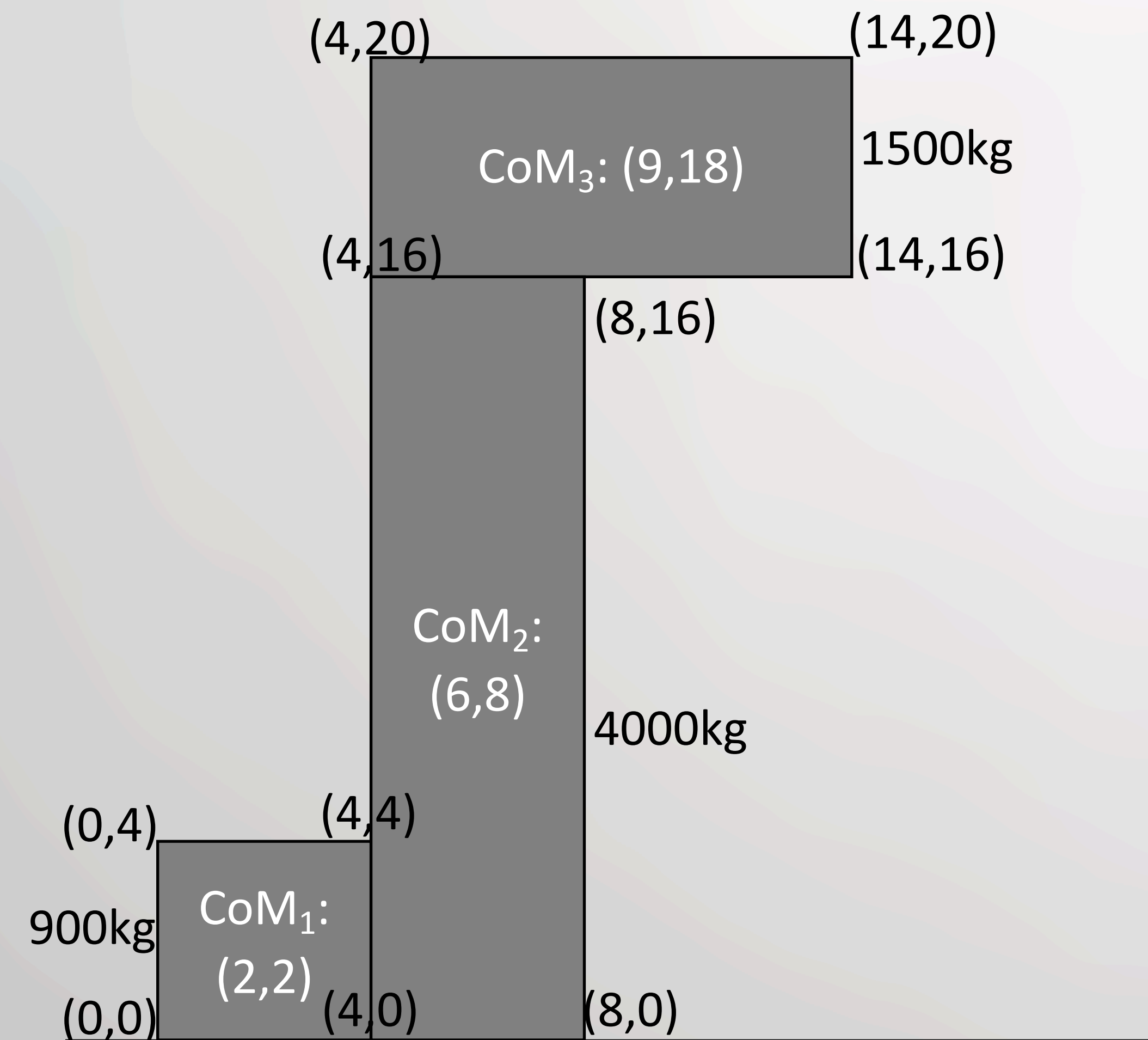
$$\text{CoM}_{TY} = \frac{\sum(m_i \cdot \text{CoM}_{iY})}{\sum m}$$

$$0 < \text{CoM}_{TX} < 8$$

Halla el CoM (x,y) y determina si el siguiente “edificio” es estable.

De momento, definiremos que un objeto es estable si proyecta su Peso (CoM) sobre la base de sustentación.

El edificio se puede “descomponer” en 3 bloques geométricos (cada bloque tiene una distribución de masa homogénea), y no hay problemas de unión entre bloques.



$$\text{CoM}_{TX} = \Sigma(m_i \cdot \text{CoM}_{iX}) / \Sigma m$$

$$\text{CoM}_{TY} = \Sigma(m_i \cdot \text{CoM}_{iY}) / \Sigma m$$

$$0 < \text{CoM}_{TX} < 8$$

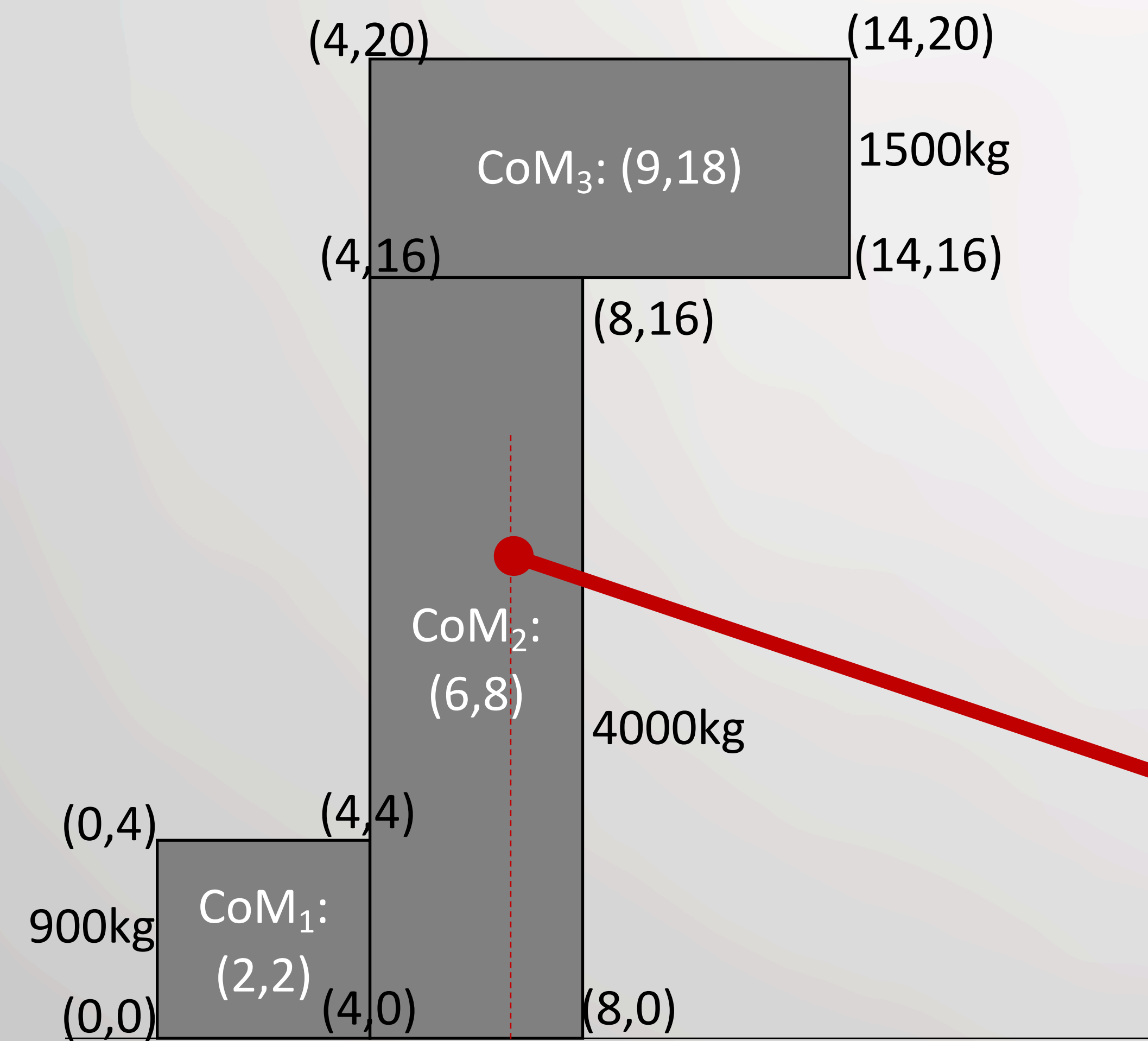
$$\text{CoM}_{TX} = ((m_1 \cdot \text{CoM}_{1X}) + (m_2 \cdot \text{CoM}_{2X}) + (m_3 \cdot \text{CoM}_{3X})) / (m_1 + m_2 + m_3)$$

$$\text{CoM}_{TY} = ((m_1 \cdot \text{CoM}_{1Y}) + (m_2 \cdot \text{CoM}_{2Y}) + (m_3 \cdot \text{CoM}_{3Y})) / (m_1 + m_2 + m_3)$$

Halla el CoM (x,y) y determina si el siguiente “edificio” es estable.

De momento, definiremos que un objeto es estable si proyecta su Peso (CoM) sobre la base de sustentación.

El edificio se puede “descomponer” en 3 bloques geométricos (cada bloque tiene una distribución de masa homogénea), y no hay problemas de unión entre bloques.



$$\text{CoM}_{TX} = \Sigma(m_i \cdot \text{CoM}_{iX}) / \Sigma m$$

$$\text{CoM}_{TY} = \Sigma(m_i \cdot \text{CoM}_{iY}) / \Sigma m$$

$$0 < \text{CoM}_{TX} < 8$$

$$\text{CoM}_{TX} = ((m_1 \cdot \text{CoM}_{1X}) + (m_2 \cdot \text{CoM}_{2X}) + (m_3 \cdot \text{CoM}_{3X})) / (m_1 + m_2 + m_3)$$

$$\text{CoM}_{TX} = ((900 \cdot 2) + (4000 \cdot 6) + (1500 \cdot 9)) / (900 + 4000 + 1500)$$

$$\text{CoM}_{TX} = (1800 + 24000 + 13500) / (6400) = 6,14$$

$$\text{CoM}_{TY} = ((m_1 \cdot \text{CoM}_{1Y}) + (m_2 \cdot \text{CoM}_{2Y}) + (m_3 \cdot \text{CoM}_{3Y})) / (m_1 + m_2 + m_3)$$

$$\text{CoM}_{TY} = ((900 \cdot 2) + (4000 \cdot 8) + (1500 \cdot 18)) / (900 + 4000 + 1500)$$

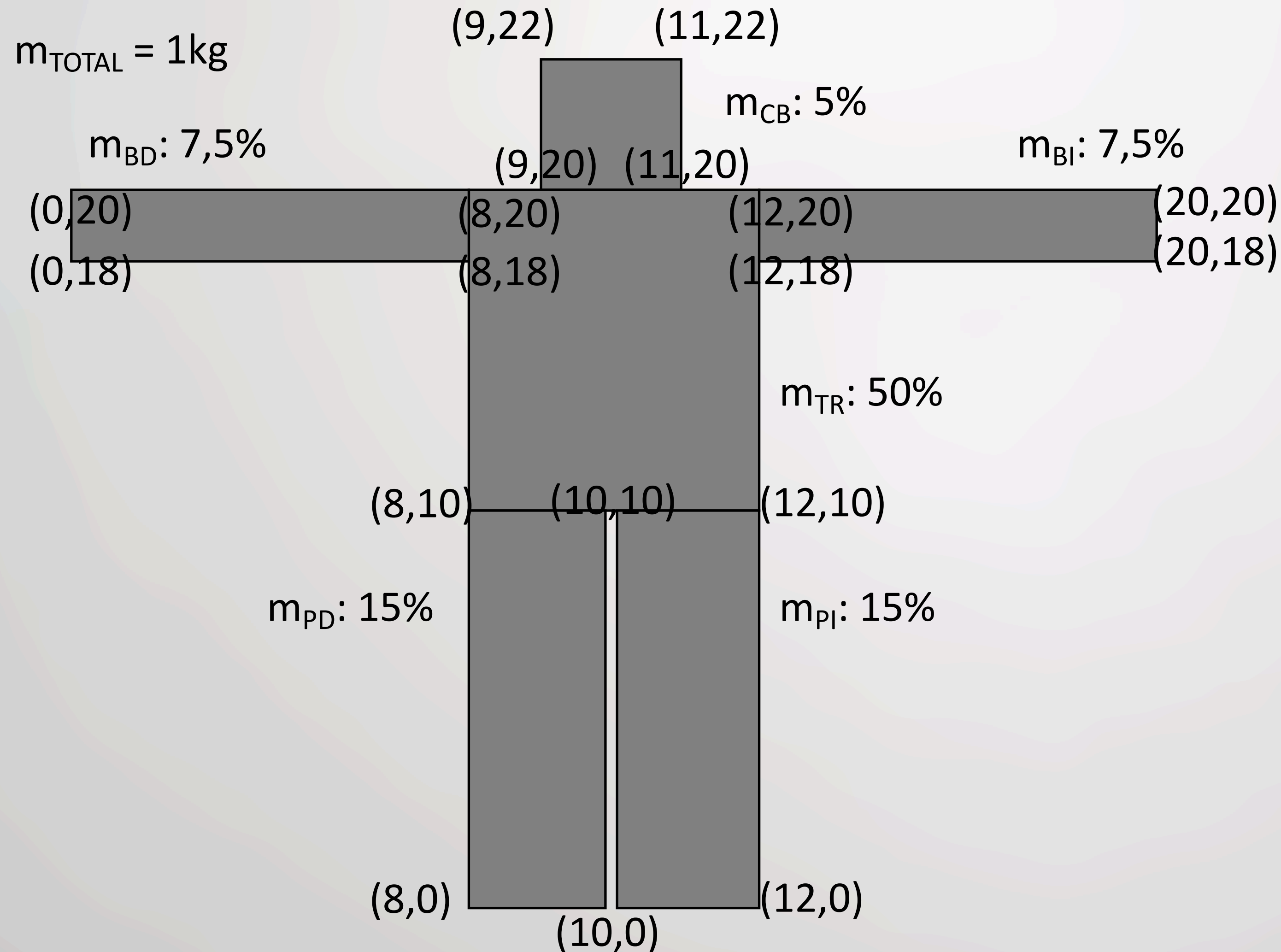
$$\text{CoM}_{TY} = (1800 + 32000 + 27000) / (6400) = 9,5$$

$$\text{CoM: } (6,14 , 9,5)$$

PROBLEMA 4 CoM HUMANOIDE

Halla el CoM (x,y) del siguiente juguete con forma humanoide.

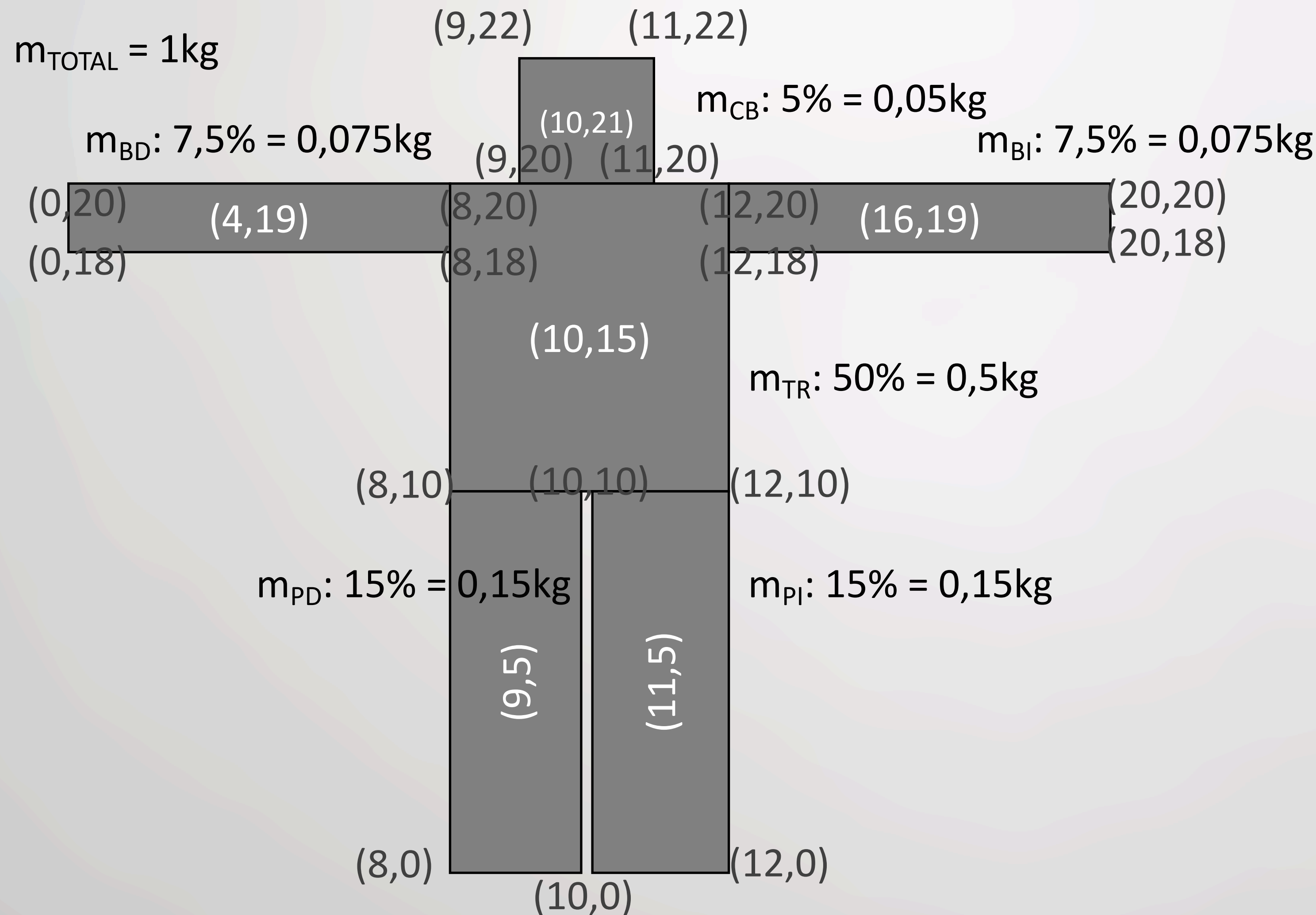
El juguete está compuesto de 6 bloques geométricos (cada bloque tiene una distribución de masa homogénea), y conocemos la masa total (1kg) y las relativas (% del total) de cada bloque.



$$\text{CoM}_{\text{TX}} = \frac{\sum(m_i \cdot \text{CoM}_{iX})}{\sum m}$$

$$\text{CoM}_{\text{TY}} = \frac{\sum(m_i \cdot \text{CoM}_{iY})}{\sum m}$$

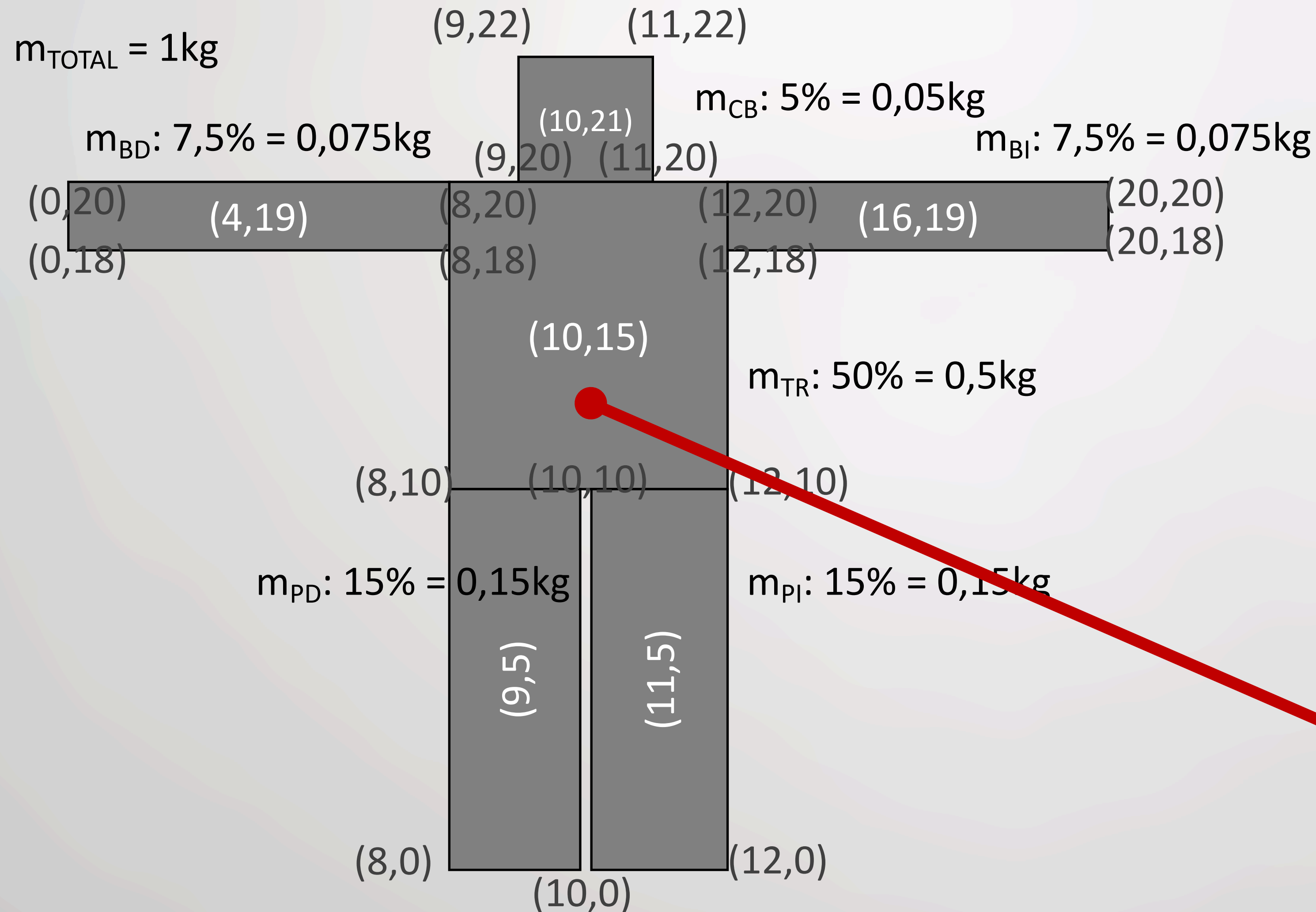
Halla el CoM (x,y) del siguiente juguete con forma humanoide.
El juguete está compuesto de 6 bloques geométricos (cada bloque tiene una distribución de masa homogénea), y conocemos la masa total (1kg) y las relativas (% del total) de cada bloque.



$$\text{CoM}_{TX} = \frac{\sum(m_i \cdot \text{CoM}_{iX})}{\sum m}$$
$$\text{CoM}_{TY} = \frac{\sum(m_i \cdot \text{CoM}_{iY})}{\sum m}$$

Halla el CoM (x,y) del siguiente juguete con forma humanoide.

El juguete está compuesto de 6 bloques geométricos (cada bloque tiene una distribución de masa homogénea), y conocemos la masa total (1kg) y las relativas (% del total) de cada bloque.



$$\text{CoM}_{TX} = \Sigma(m_i \cdot \text{CoM}_{iX}) / \Sigma m$$

$$\text{CoM}_{TY} = \Sigma(m_i \cdot \text{CoM}_{iY}) / \Sigma m$$

$$\text{CoM}_{TX} = ((0,05 \cdot 10) + (0,075 \cdot 4) + (0,075 \cdot 16) + (0,5 \cdot 10) + (0,15 \cdot 9) + (0,15 \cdot 11)) / (1)$$

$$\text{CoM}_{TX} = (0,5 + 0,3 + 1,2 + 5 + 1,35 + 1,65) / 1$$

$$\text{CoM}_{TX} = 10$$

$$\text{CoM}_{TY} = ((0,05 \cdot 21) + (0,075 \cdot 19) + (0,075 \cdot 19) + (0,5 \cdot 15) + (0,15 \cdot 5) + (0,15 \cdot 5)) / (1)$$

$$\text{CoM}_{TY} = (1,05 + 1,425 + 1,425 + 7,5 + 0,75 + 0,75) / 1$$

$$\text{CoM}_{TY} = 12,9$$

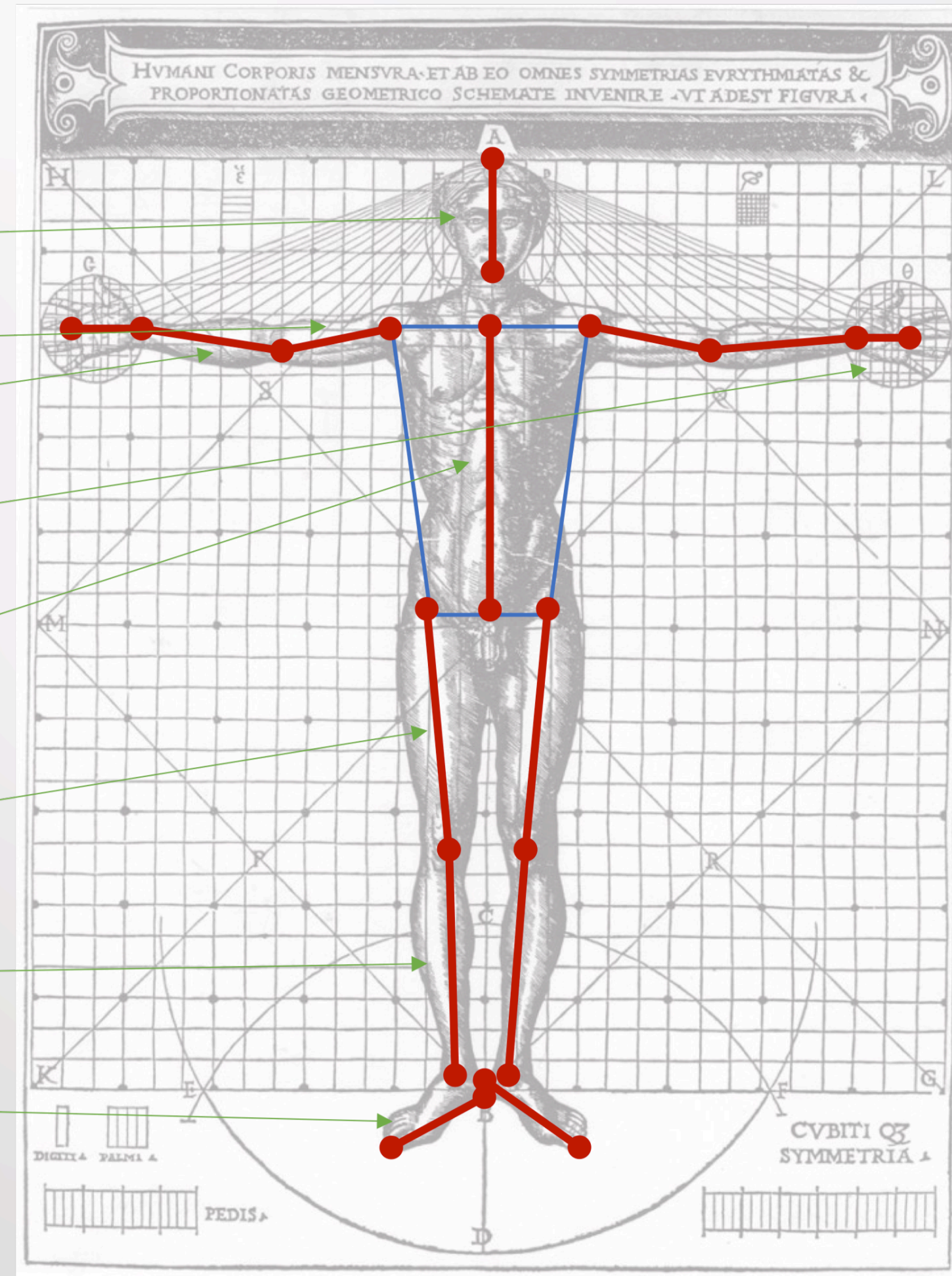
$$\text{CoM}: (10, 12,9)$$

#CLAUSER (MODELO)

MODELO HUMANO (SEGMENTOS RÍGIDOS ARTICULADOS)

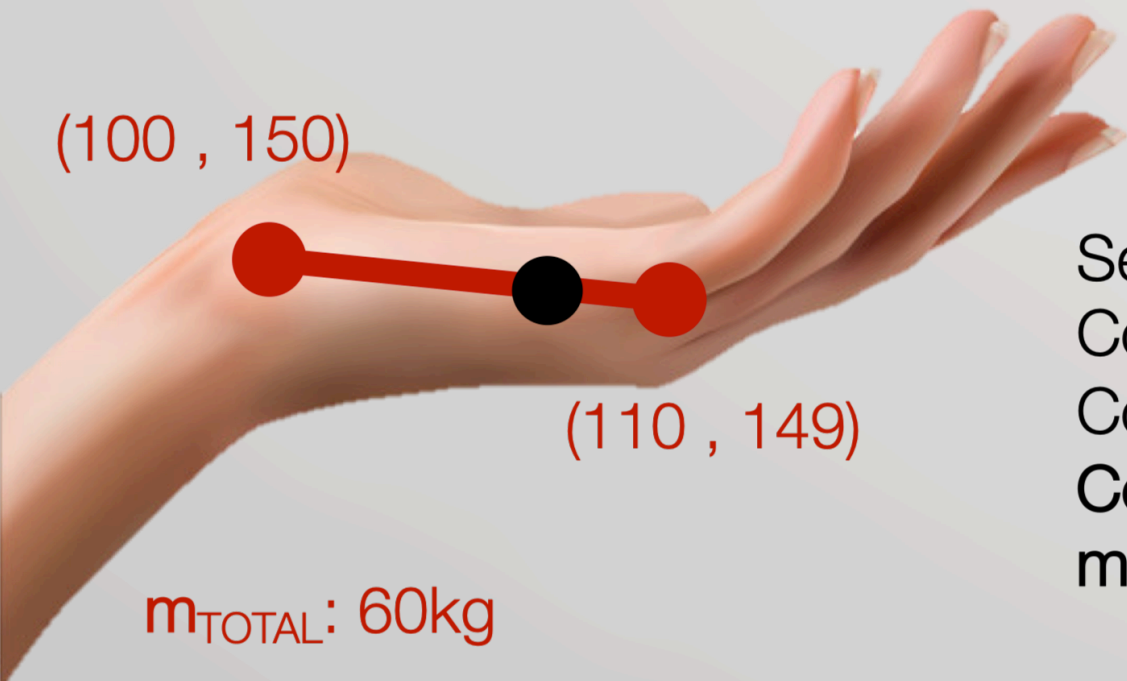
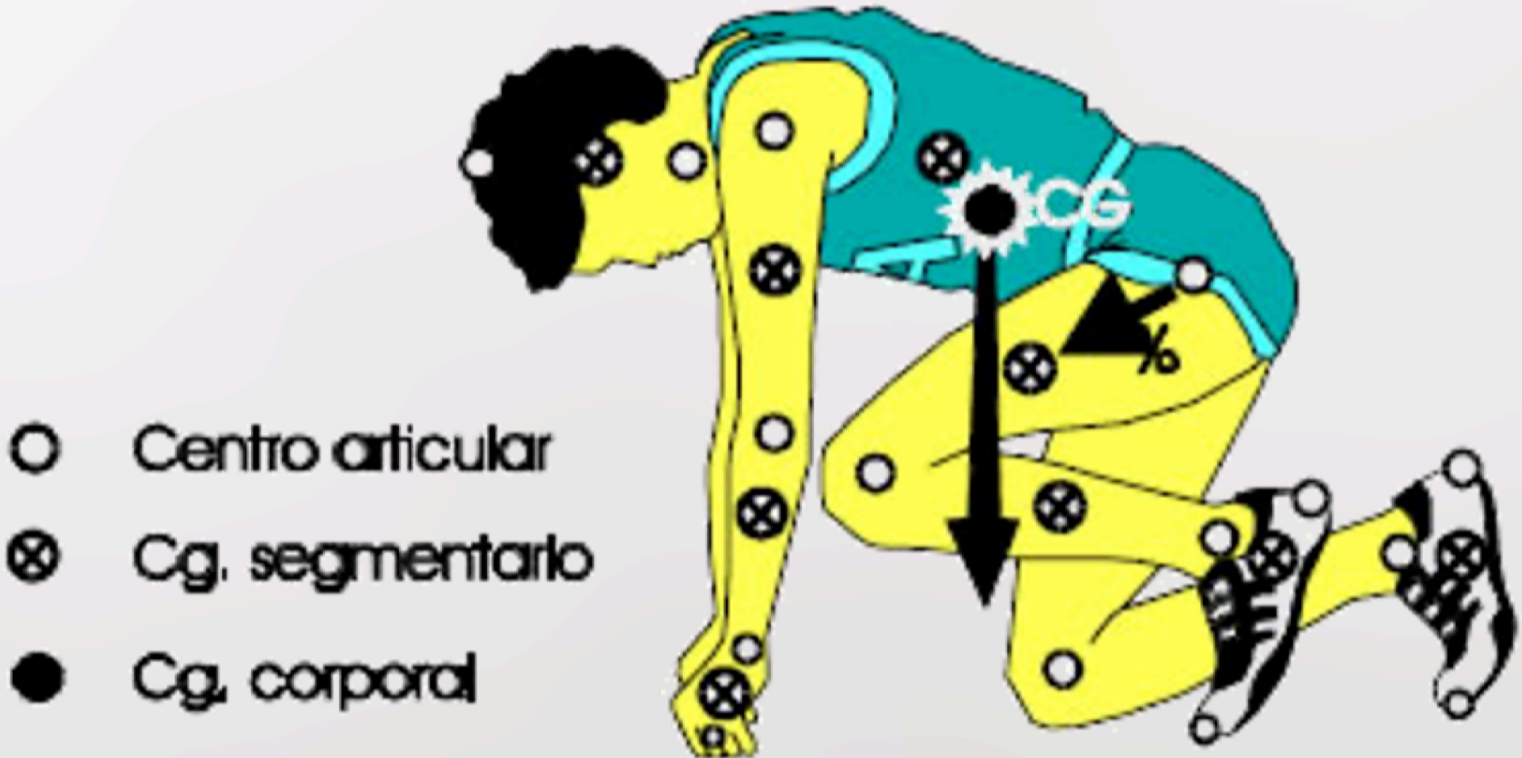
MODELO DE CLAUSER (14 segmentos):

- Cabeza:
 - del vértice a la mandíbula.
- Brazo (2):
 - del hombro al codo.
- Antebrazo (2):
 - del codo a la muñeca.
- Mano (2):
 - de la muñeca al inicio del 3r dedo.
- Tronco:
 - del esternón (1/2 de los 2 hombros) a la cadera (1/2 de las 2 caderas).
- Muslo (2):
 - de la cadera a la rodilla.
- Pierna (2):
 - de la rodilla al tobillo (maléolo).
- Pie (2):
 - del talón a la punta (1r dedo).



#CLAUSER (MODELO)

Segmento	Masa relativa (%)		Localización CoM respecto extremos del segmento	
Cabeza	0,073	(7,3%)	46,4% del Vértice	(53,6% de la Mandíbula)
Tronco	0,507	(50,7%)	38% del Esternón	(62% de la Cadera)
Brazo (2)	0,026	(2,6%)	51,3% del Hombro	(48,7% del Codo)
Antebrazo (2)	0,016	(1,6%)	39% del Codo	(61% de la Muñeca)
Mano (2)	0,007	(0,7%)	82% de la Muñeca	(18% del Metacarpo del 3r Dedo)
Muslo (2)	0,103	(10,3%)	37,2% de la Cadera	(62,8% de la Rodilla)
Pierna (2)	0,043	(4,3%)	37,1% de la Rodilla	(62,9% del Tobillo)
Pie (2)	0,015	(1,5%)	44,9% del Talón	(55,1% del final del 1r Dedo)



Segmento **mano**: (10, -1)
CoM_x mano: a 8,2 de la muñeca, o a -1,8 del Metacarpo del 3r dedo (en X)
CoM_y mano: a -0,82 de la muñeca, o a +0,18 del Metacarpo del 3r dedo (en Y)
CoM mano: (108,2, 149,18)
m_{MANO}: 0,7% de 60kg = 0,42kg

m_{TOTAL}: 60kg

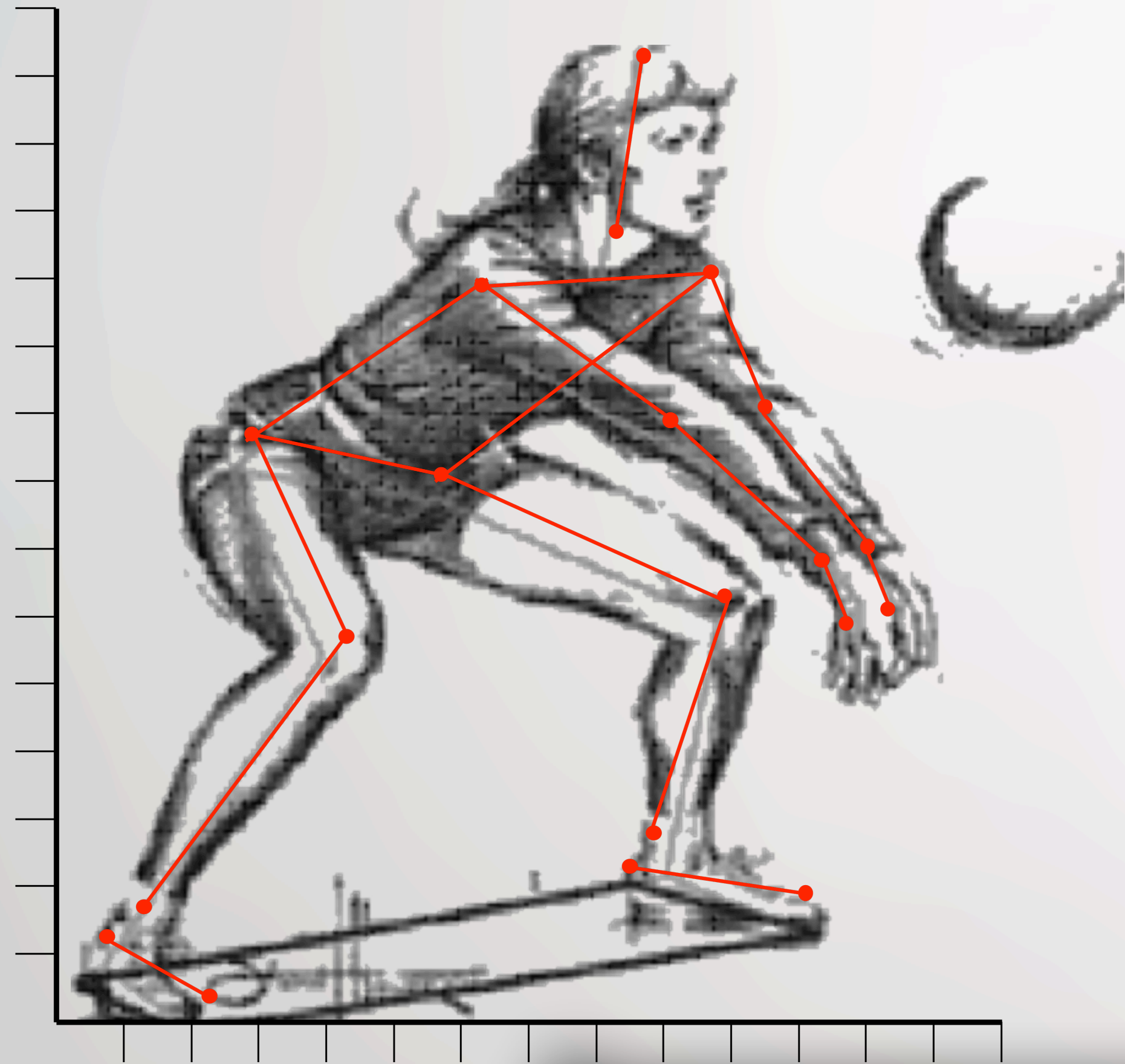
#EJEMPLO ($m=60\text{kg}$)



#EJEMPLO ($m=60\text{kg}$)

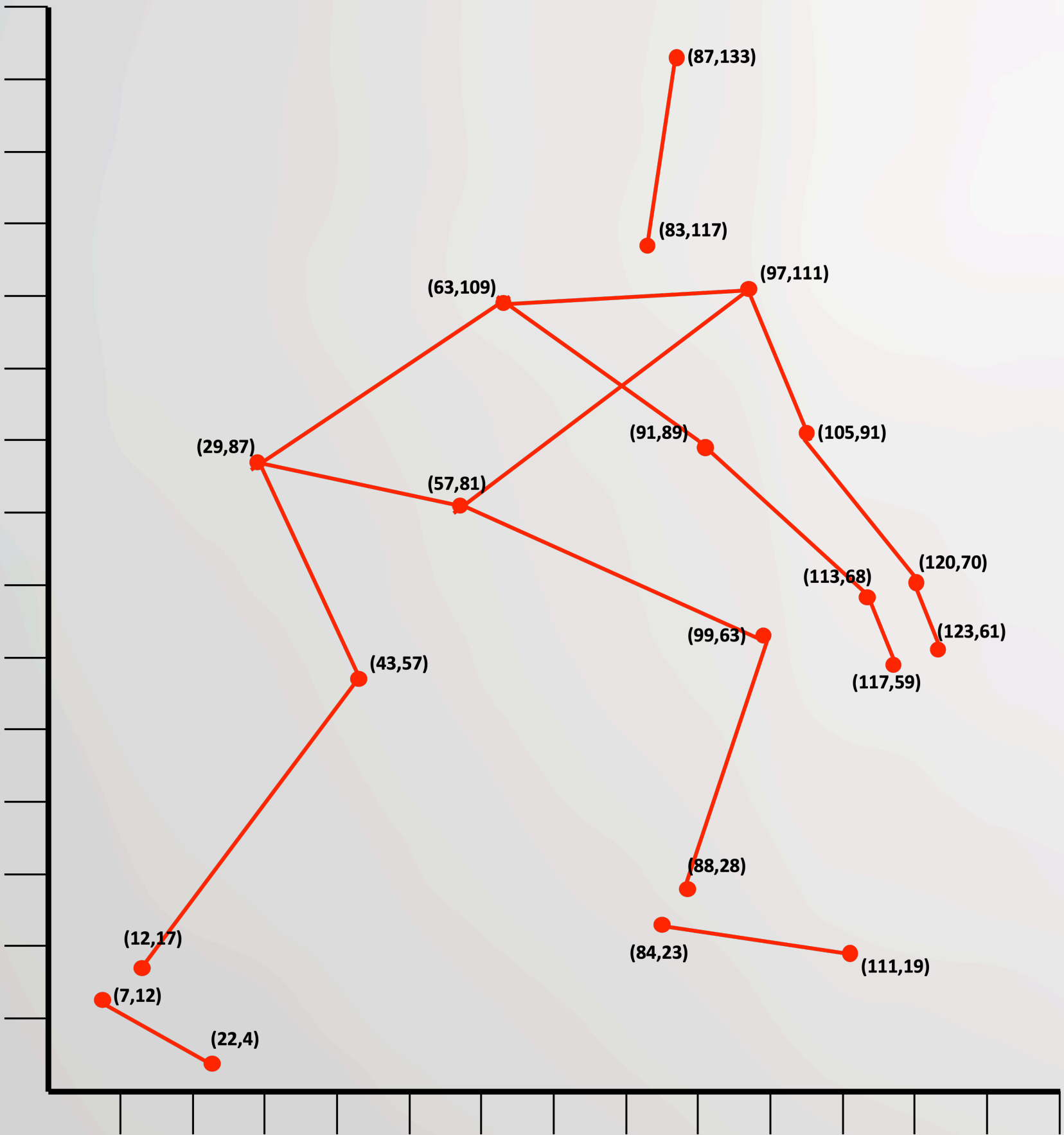


#EJEMPLO ($m=60\text{kg}$)

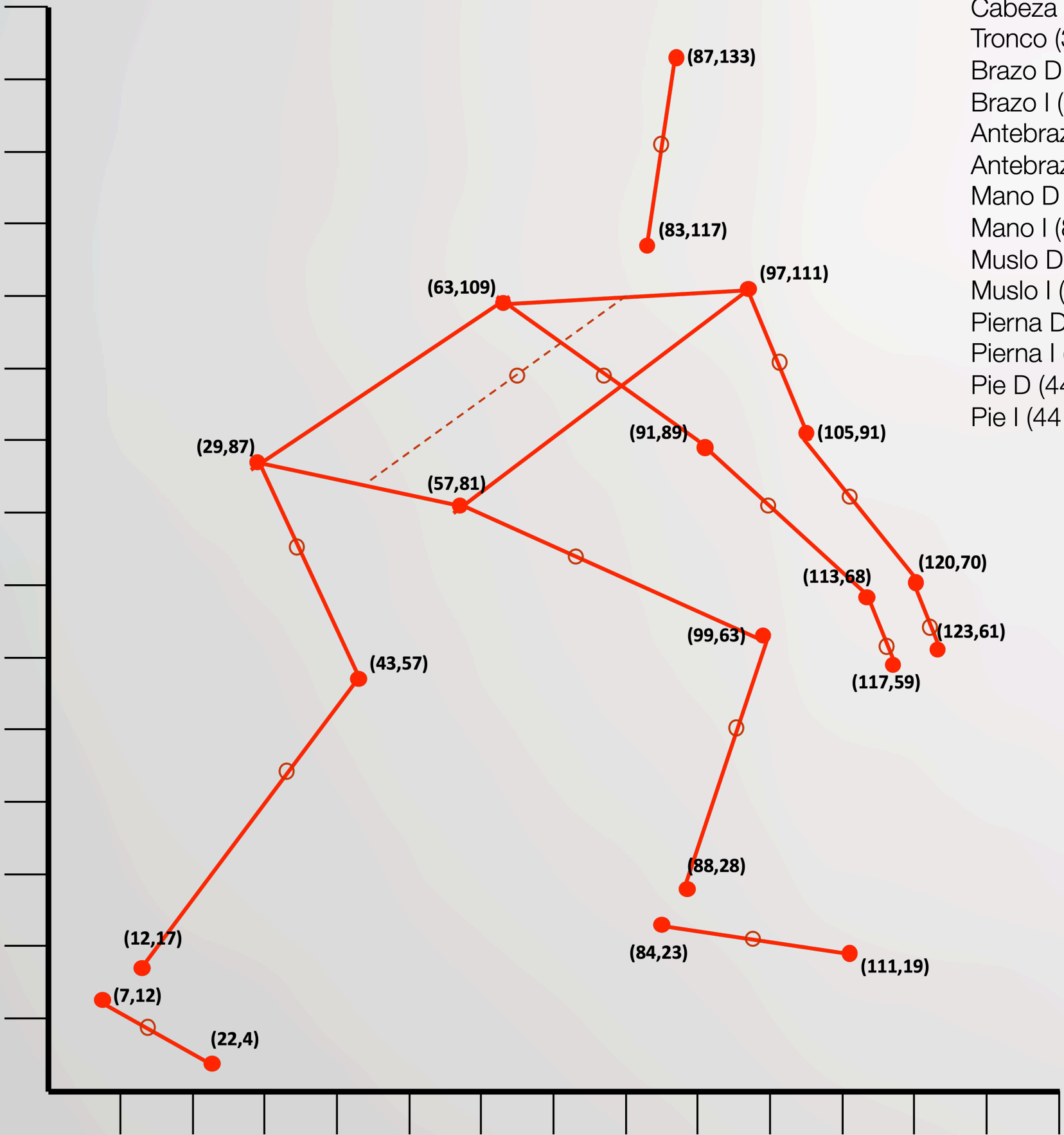


La «FOTO» no está en el Plano (x,y), por lo que no tenemos verdadera magnitud 2D

#EJEMPLO (m=60kg)

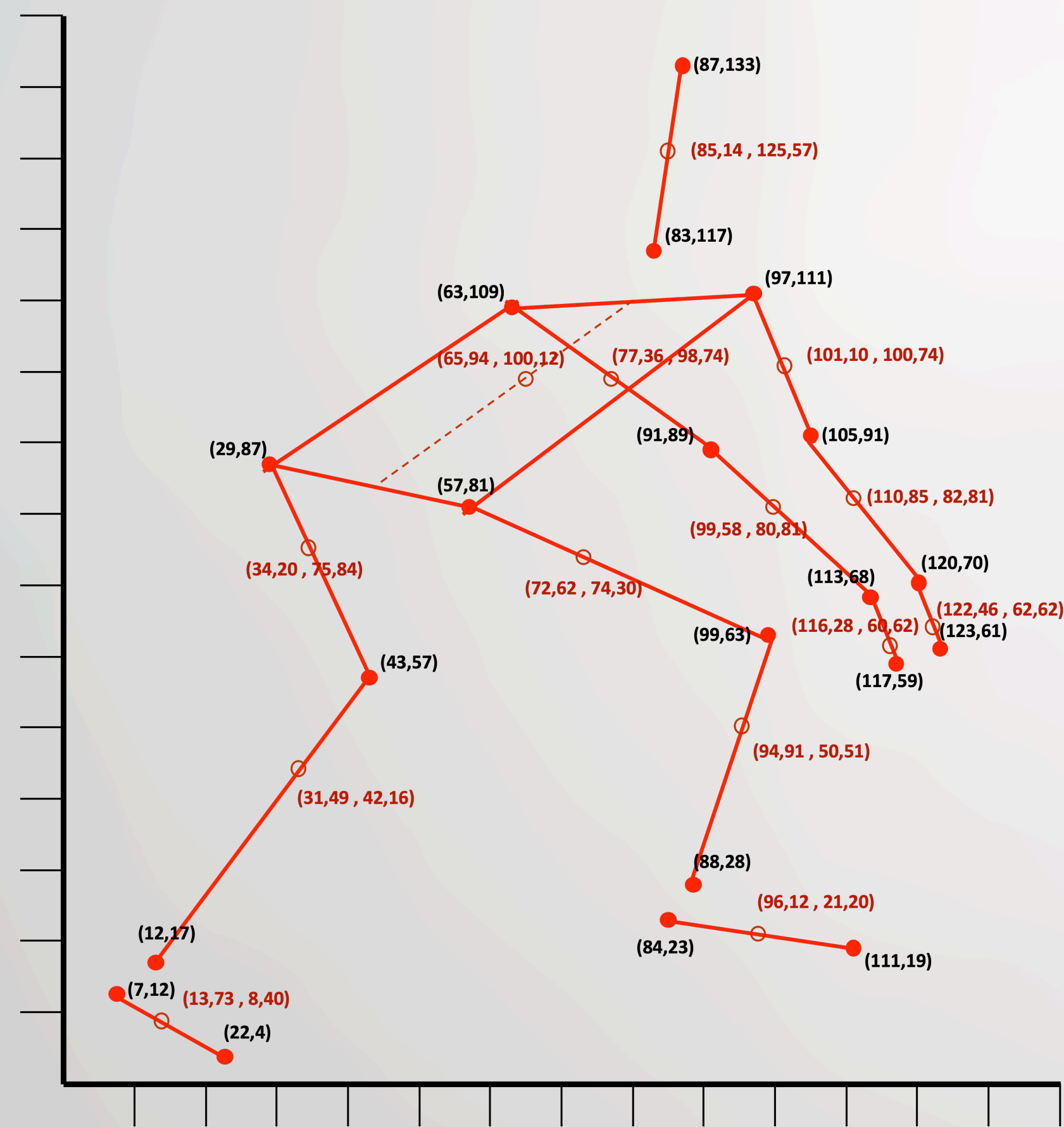


#EJEMPLO (m=60kg)



Cabeza (46,4% del Vértice): (85,14 , 125,57)
Tronco (38% del Esternón): (65,94 , 100,12)
Brazo D (51,3% del Hombro D): (77,36 , 98,74)
Brazo I (51,3% del Hombro I): (101,10 , 100,74)
Antebrazo D (39% del Codo D): (99,58 , 80,81)
Antebrazo I (39% del Codo I): (110,85 , 82,81)
Mano D (82% de la Muñeca D): (116,28 , 60,62)
Mano I (82% de la Muñeca I): (122,46 , 62,62)
Muslo D (37,2% de la Cadera D): (34,20 , 75,84)
Muslo I (37,2% de la Cadera I): (72,62 , 74,30)
Pierna D (37,1% de la Rodilla D): (31,49 , 42,16)
Pierna I (37,1% de la Rodilla I): (94,91 , 50,51)
Pie D (44,9% del Talón D): (13,73 , 8,40)
Pie I (44,9% del Talón I): (96,12 , 21,20)

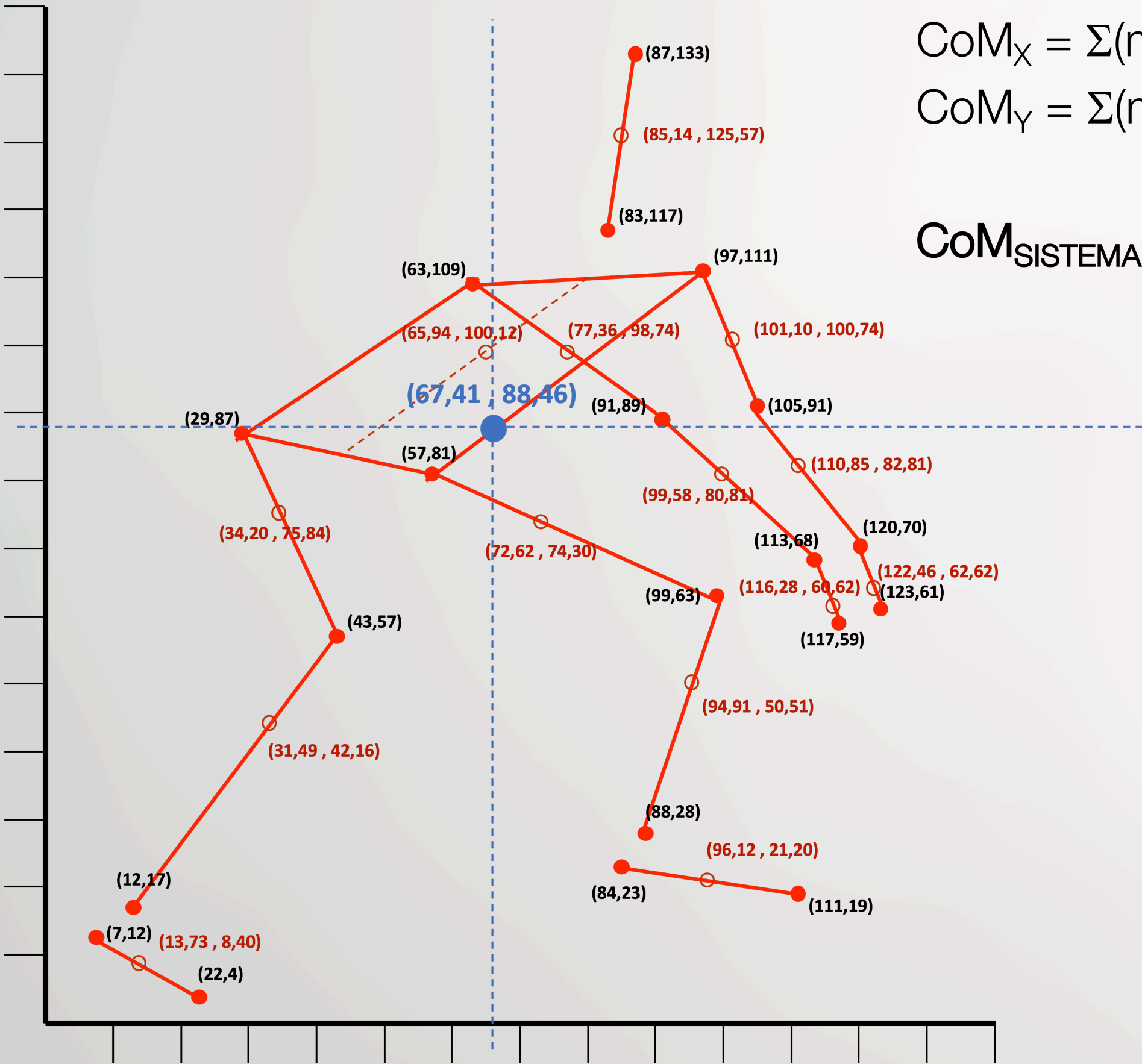
#EJEMPLO (m=60kg)



Cabeza	(7,3%):	4,38 kg
Tronco	(50,7):	30,42 kg
Brazo D	(2,6%):	1,56 kg
Brazo I	(2,6%):	1,56 kg
Antebrazo D	(1,6%):	0,96 kg
Antebrazo I	(1,6%):	0,96 kg
Mano D	(0,7%):	0,42 kg
Mano I	(0,7%):	0,42 kg
Muslo D	(10,3%):	6,18 kg
Muslo I	(10,3%):	6,18 kg
Pierna D	(4,3%):	2,58 kg
Pierna I	(4,3%):	2,58 kg
Pie D	(1,5%):	0,90 kg
Pie I	(1,5%):	0,90 kg

$$\text{CoM}_X = \frac{\sum(m_i \cdot \text{CoM}_{iX})}{\sum m}$$
$$\text{CoM}_Y = \frac{\sum(m_i \cdot \text{CoM}_{iY})}{\sum m}$$

#EJEMPLO (m=60kg)

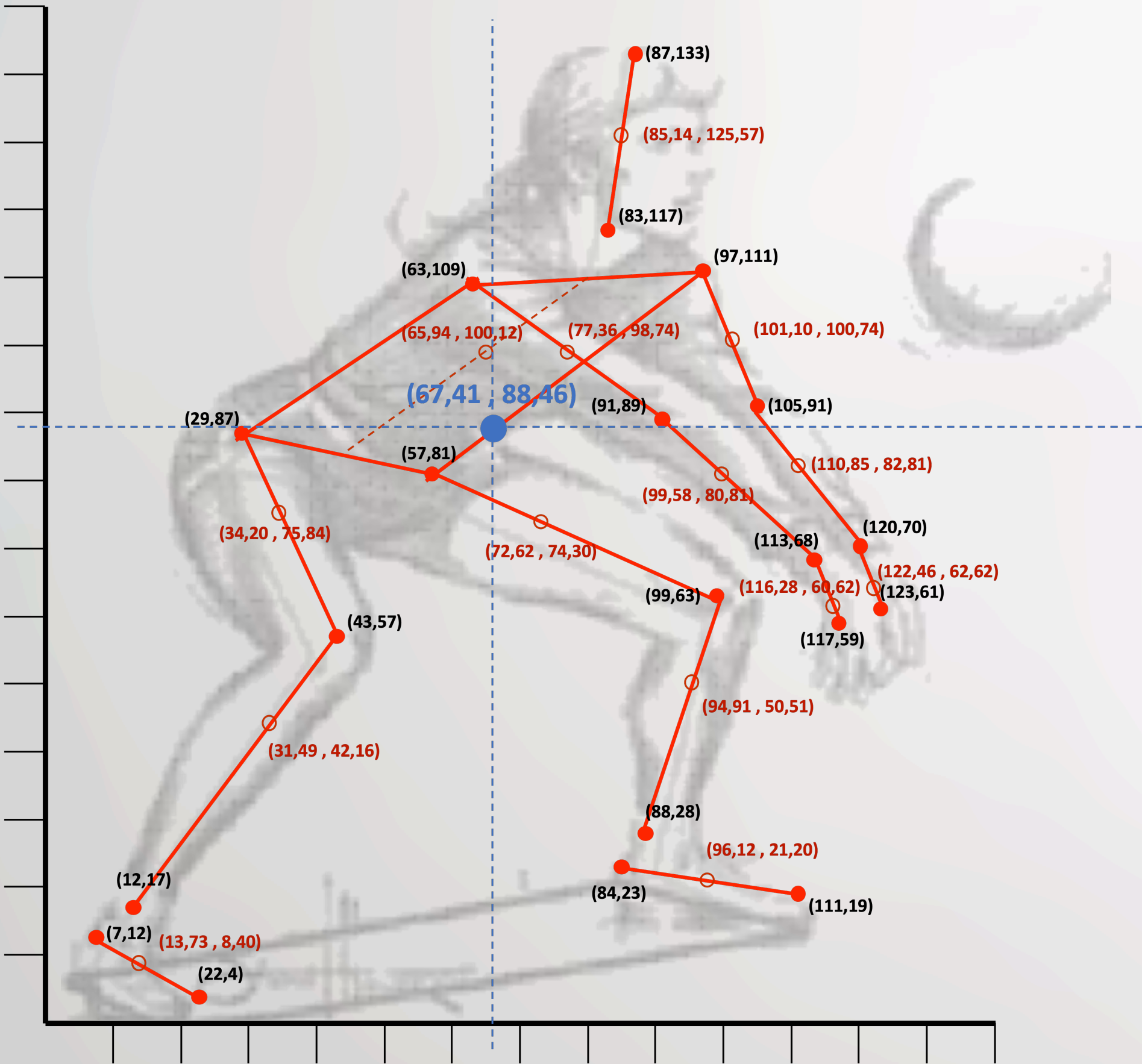


$$\text{CoM}_X = \frac{\sum(m_i \cdot \text{CoM}_{iX})}{\sum m}$$

$$\text{CoM}_Y = \frac{\sum(m_i \cdot \text{CoM}_{iY})}{\sum m}$$

CoM_{SISTEMA} : (67,41 , 88,46)

#EJEMPLO (m=60kg)

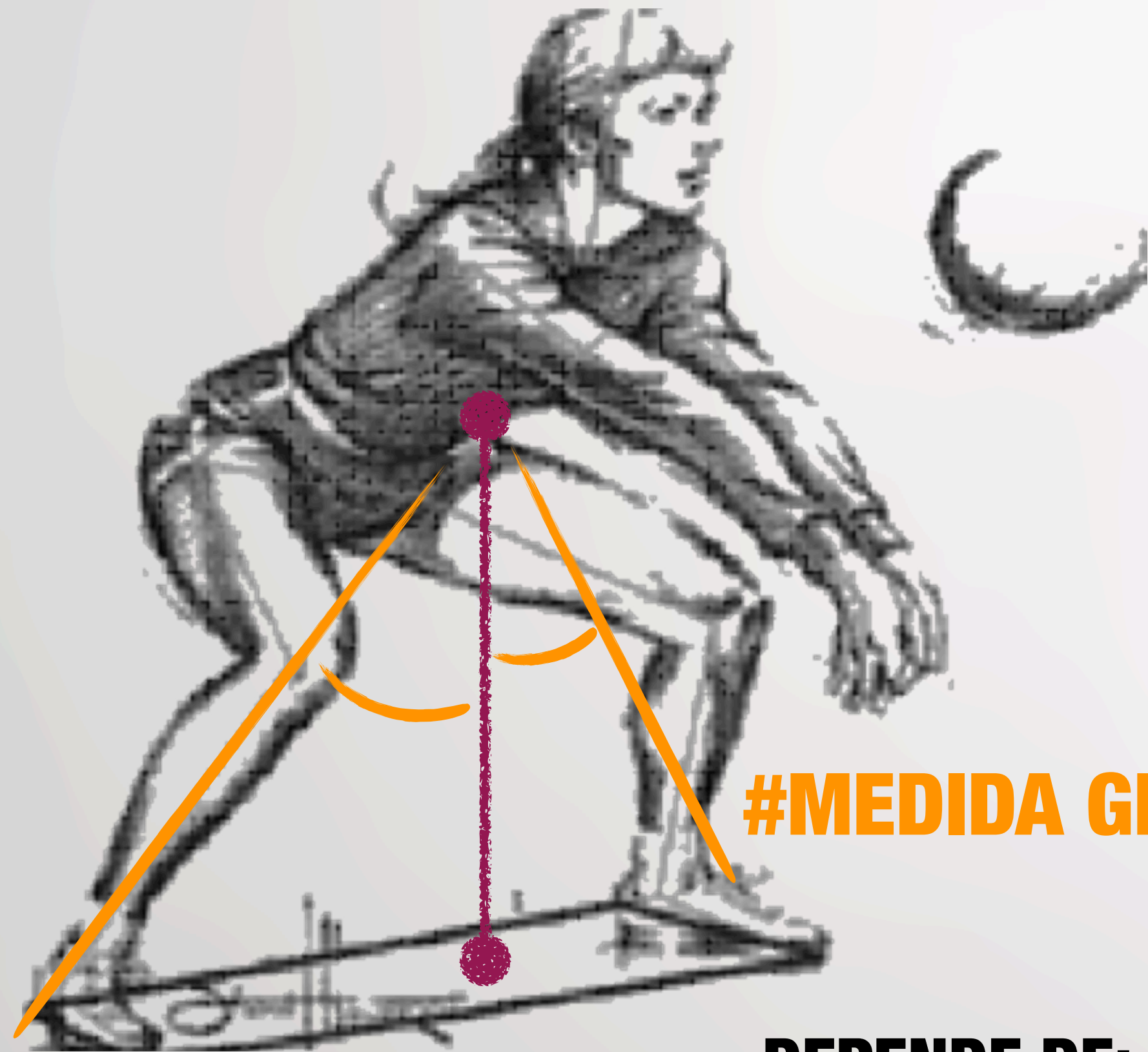


#EJEMPLO ($m=60\text{kg}$)



La «FOTO» no está en el Plano (x,y) , por lo que no sabemos dónde proyecta

#ESTABILIDAD

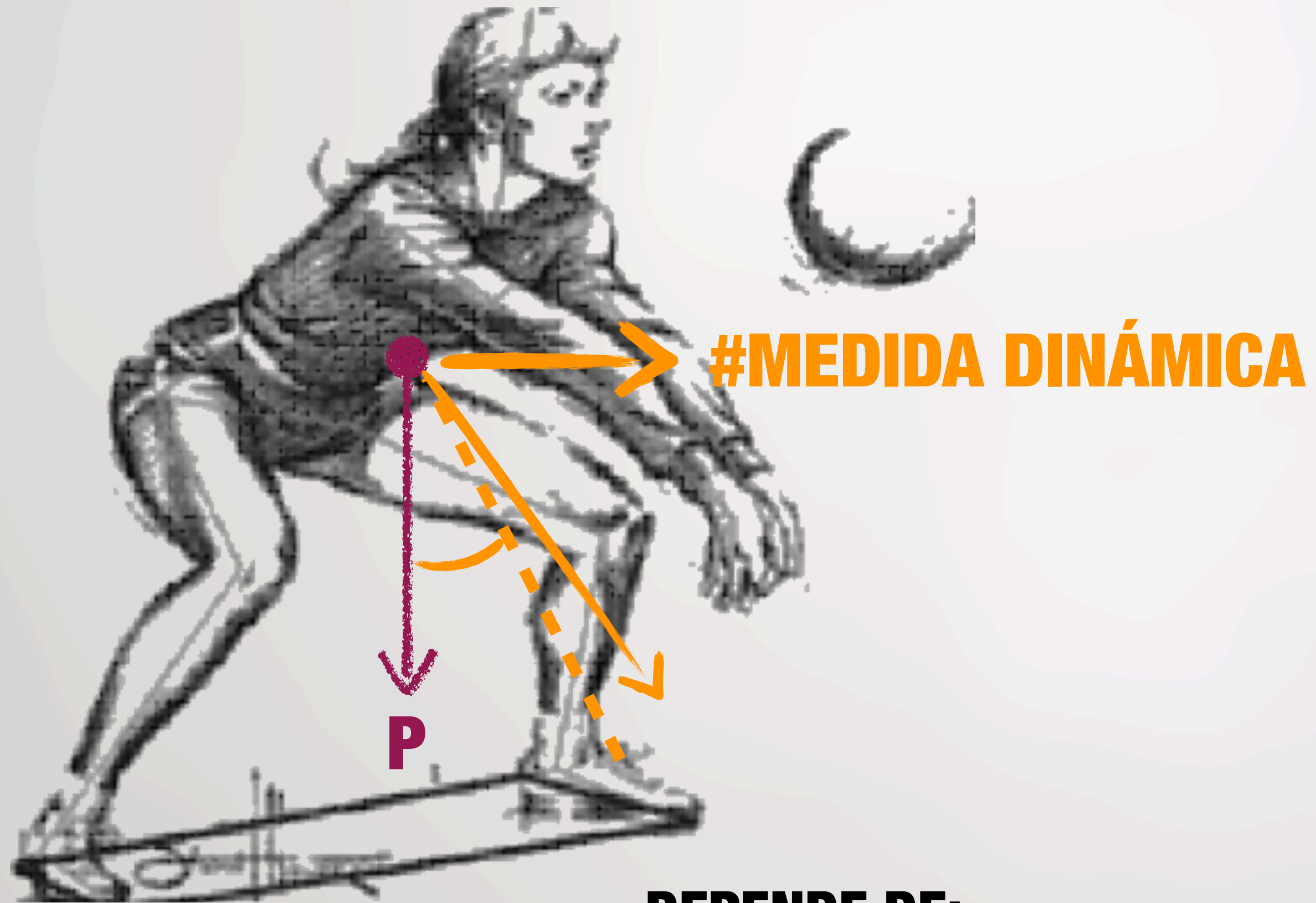


#MEDIDA GEOMÉTRICA

DEPENDE DE:

- **BASE DE SUSTENTACIÓN**
- **ALTURA CoM**

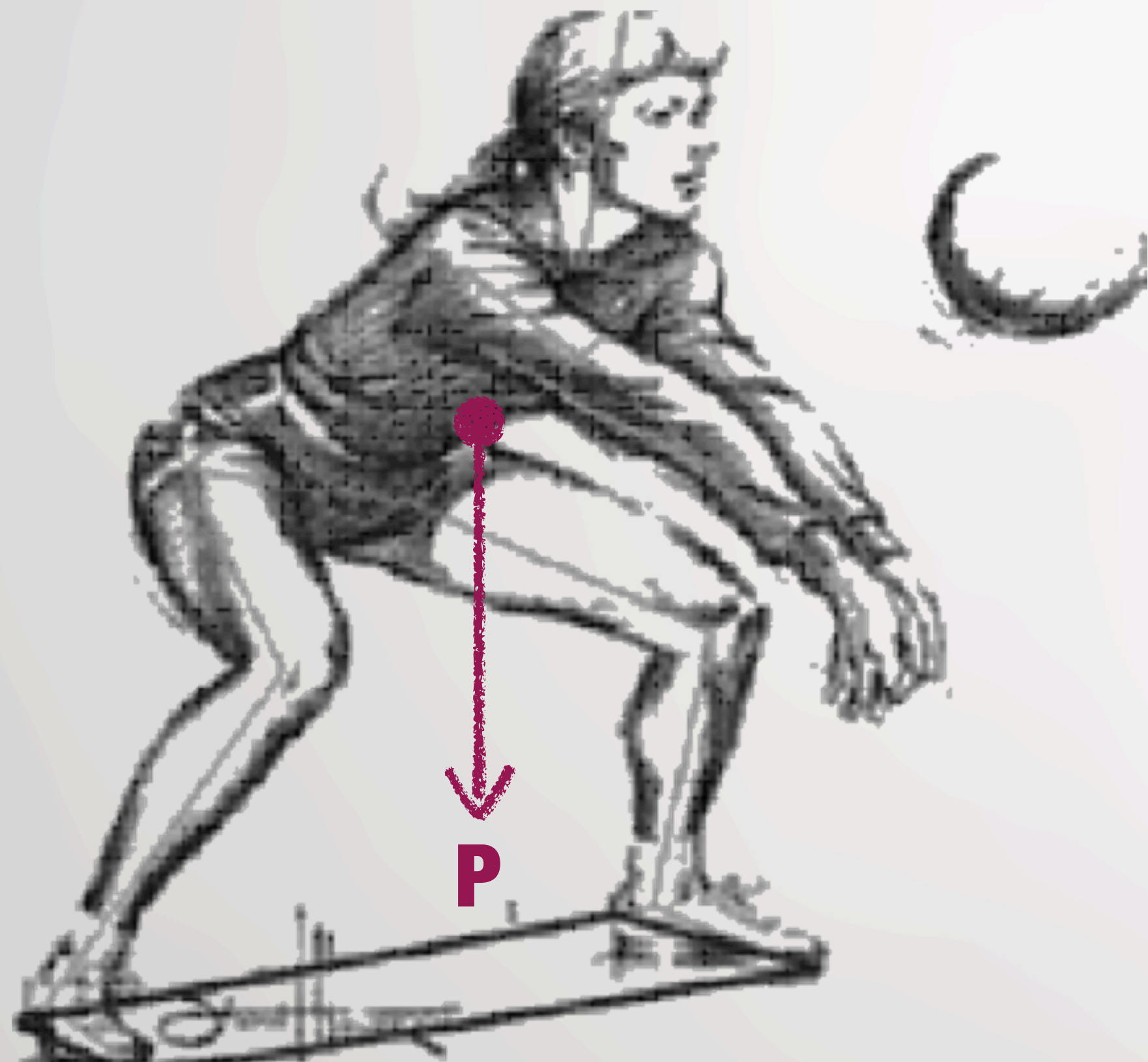
#ESTABILIDAD



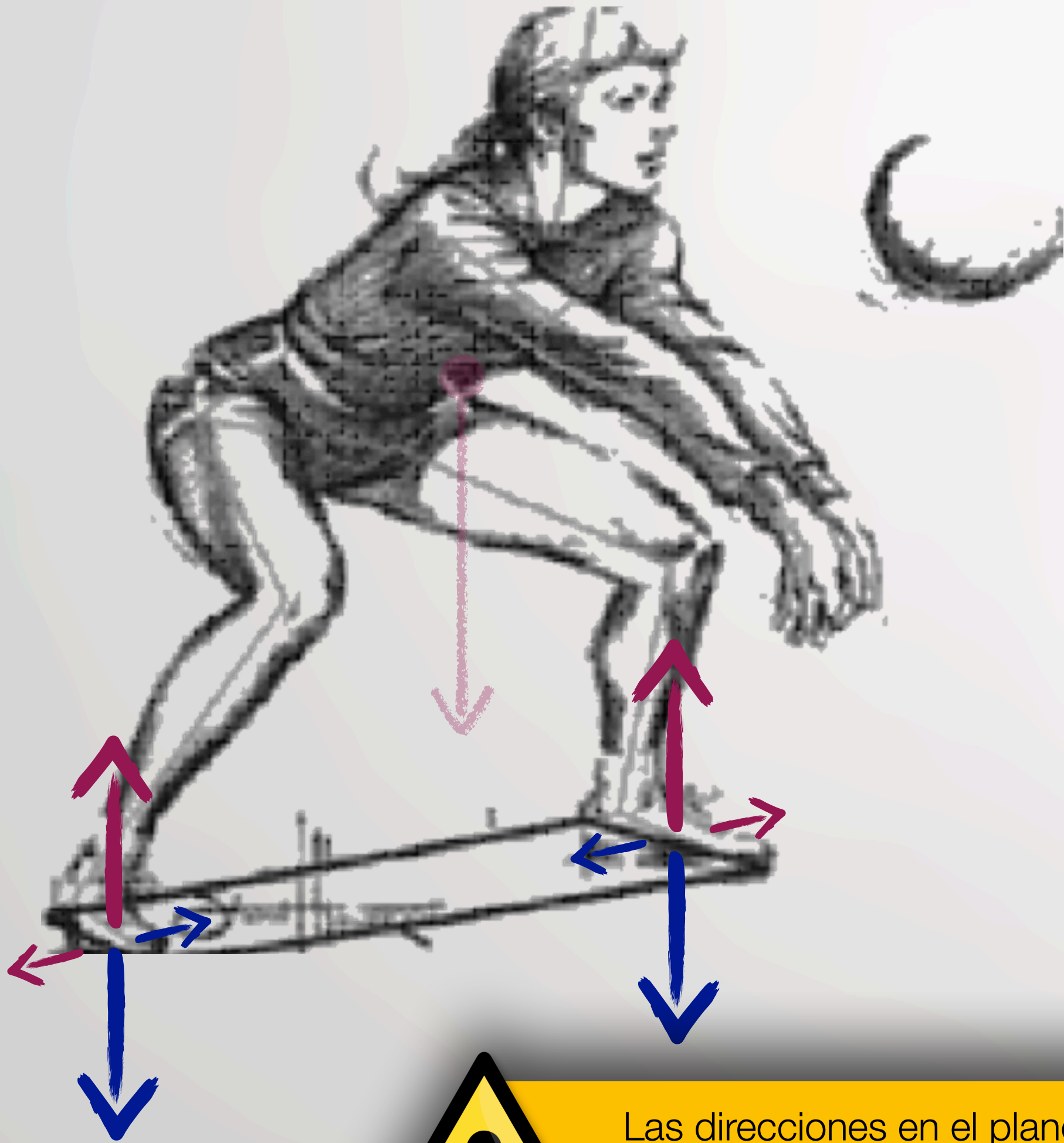
DEPENDE DE:

- **BASE DE SUSTENTACIÓN**
- **ALTURA CoM**
- **PESO (& OTRAS FUERZAS)**

#ANÁLISIS DE FUERZAS



#ANÁLISIS DE FUERZAS



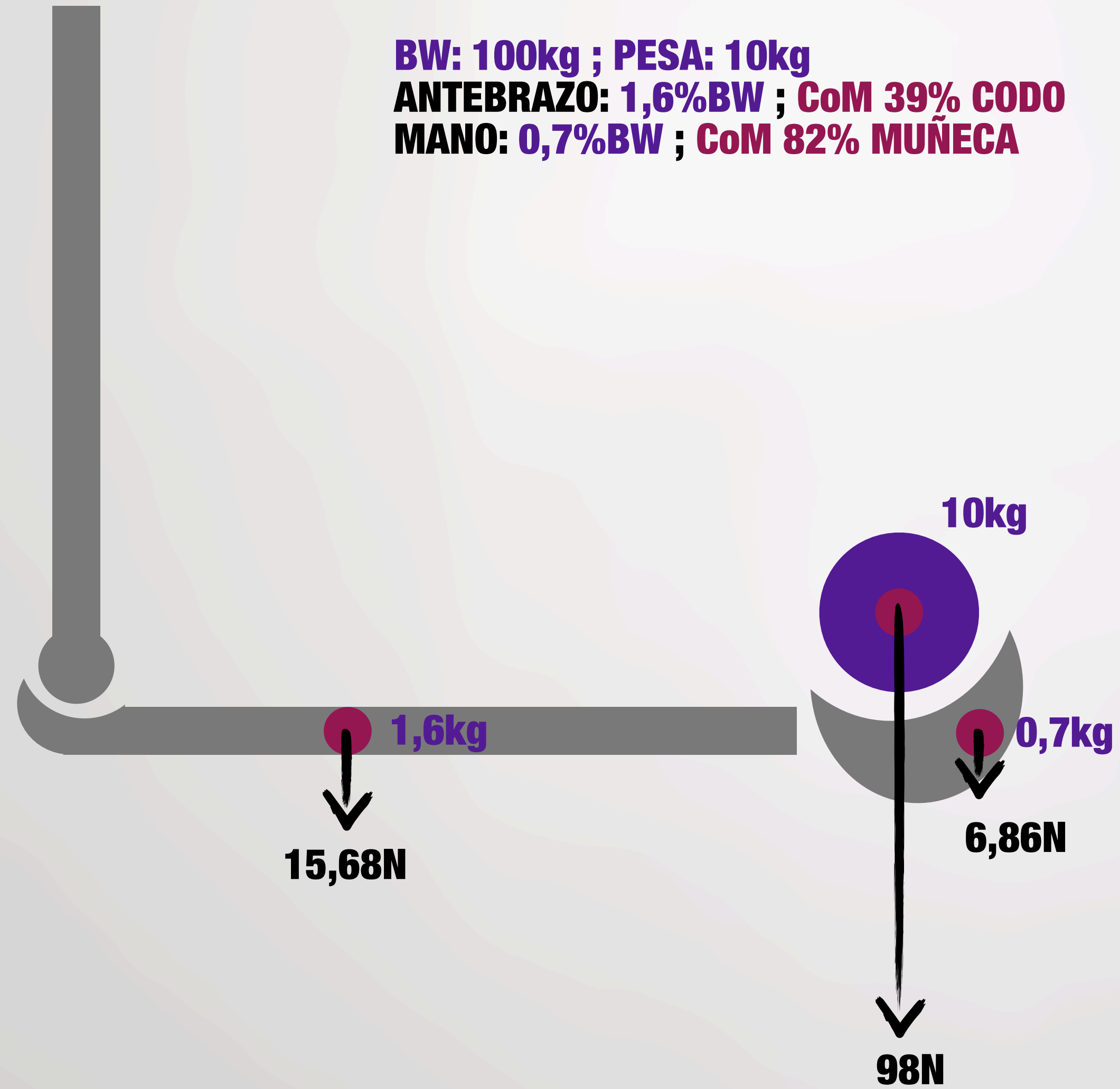
Las direcciones en el plano transversal
(y la fricción) están puestas «a ojo»

#EJEMPLOS SENCILLOS

BW: 100kg ; PESA: 10kg

ANTEBRAZO: 1,6%BW ; CoM 39% CODO

MANO: 0,7%BW ; CoM 82% MUÑECA

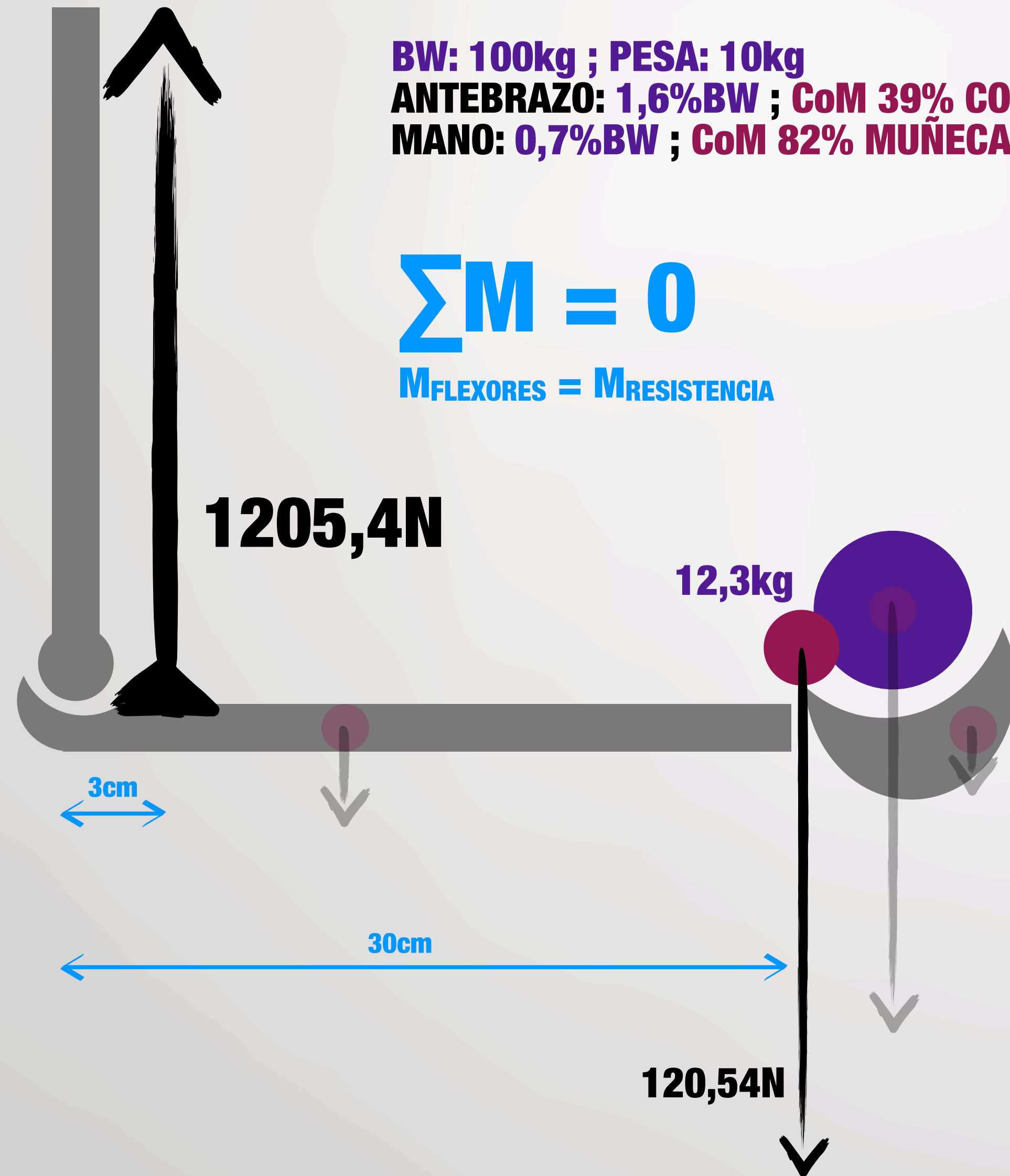


#EJEMPLOS SENCILLOS

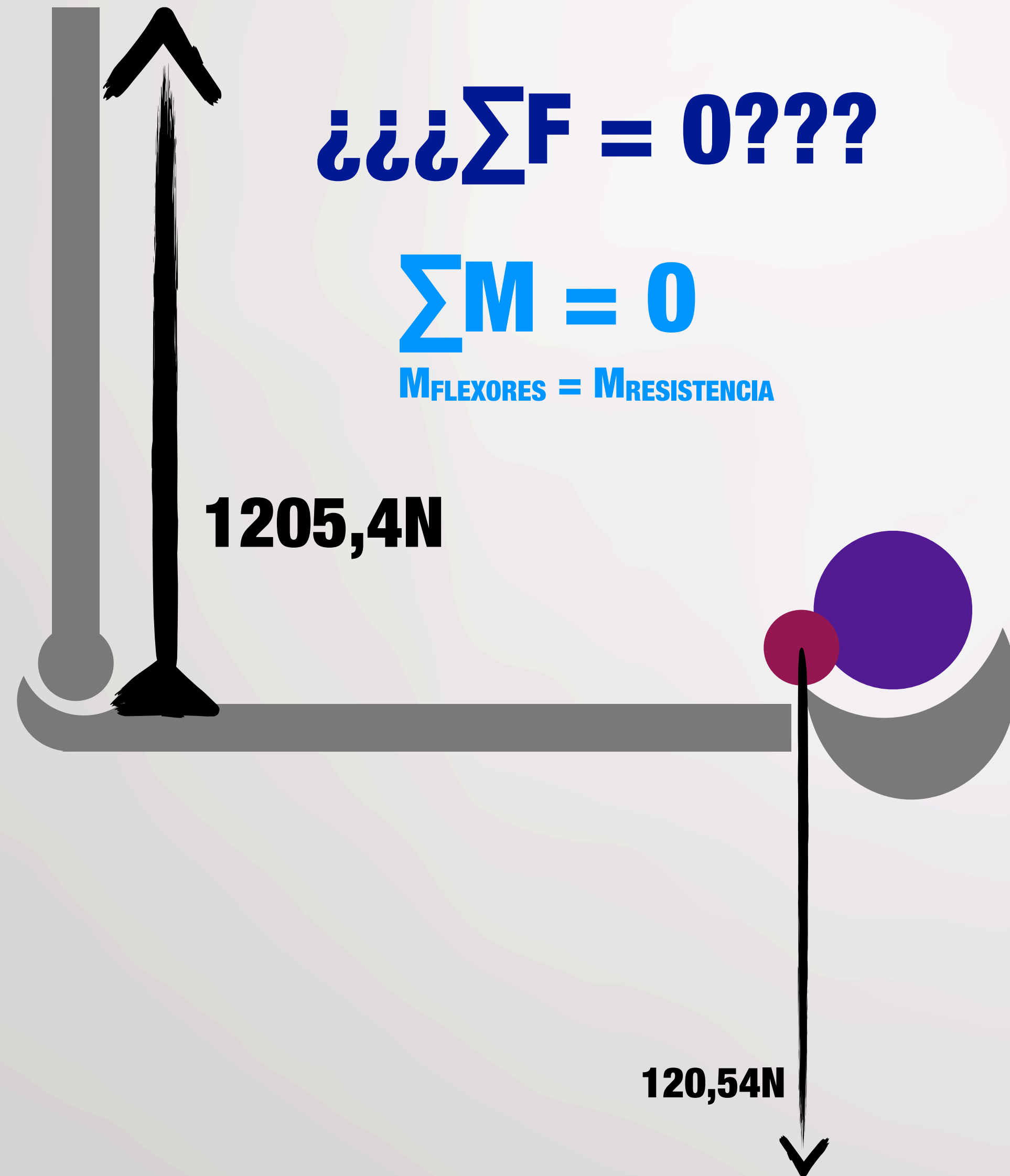
BW: 100kg ; PESA: 10kg
ANTEBRAZO: 1,6%BW ; CoM 39% CODO
MANO: 0,7%BW ; CoM 82% MUÑECA

$$\Sigma M = 0$$

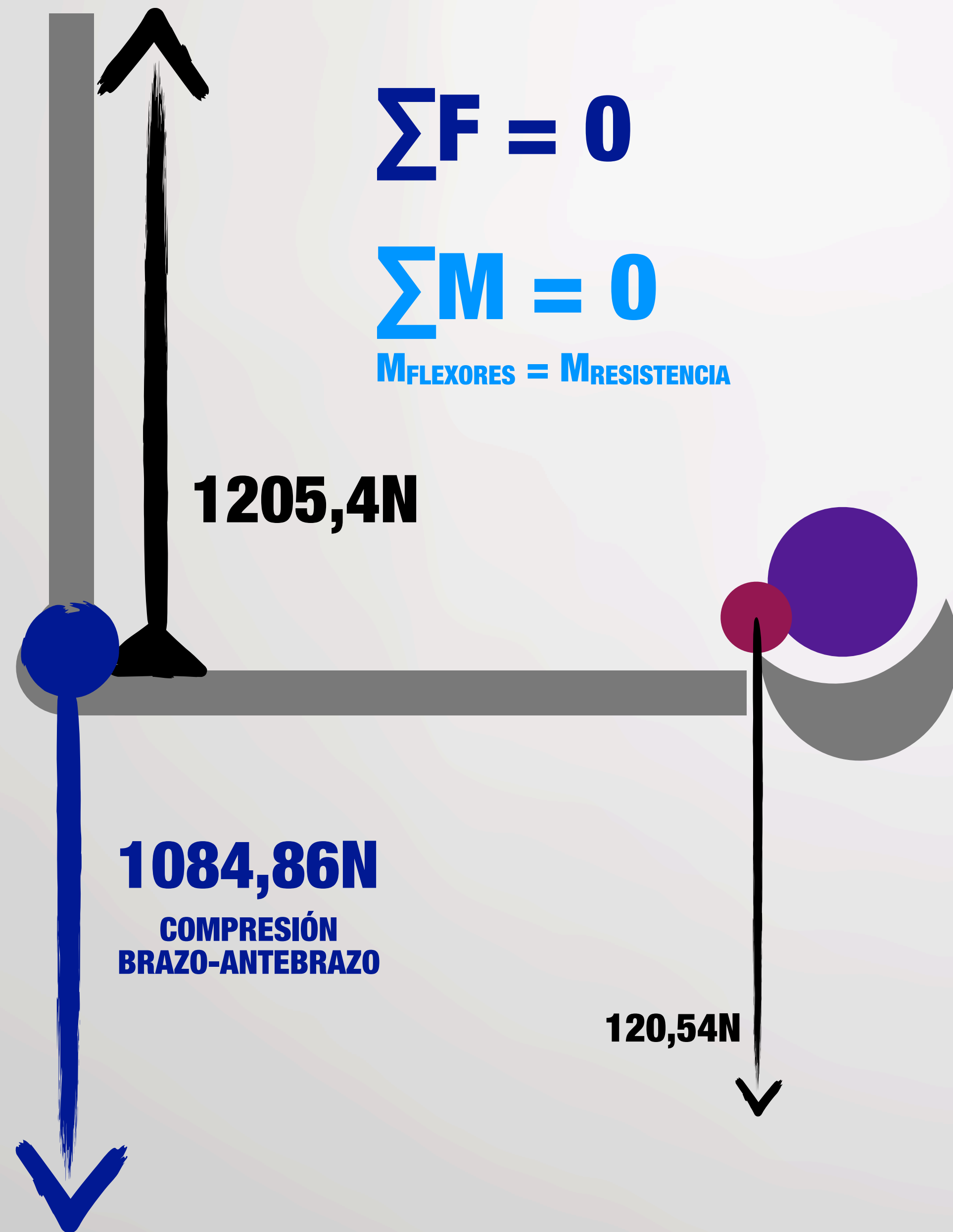
$$M_{\text{FLEXORES}} = M_{\text{RESISTENCIA}}$$



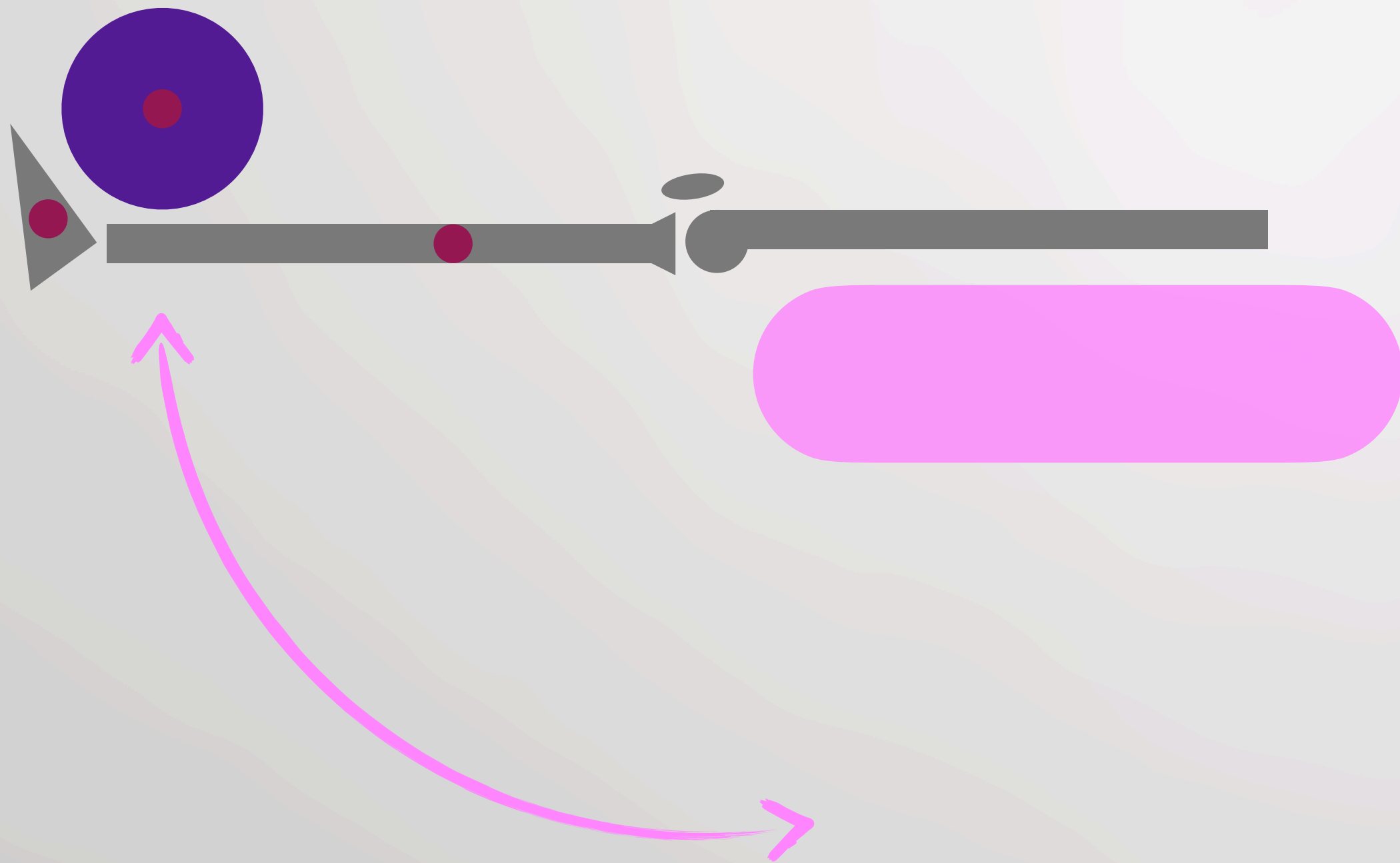
#EJEMPLOS SENCILLOS



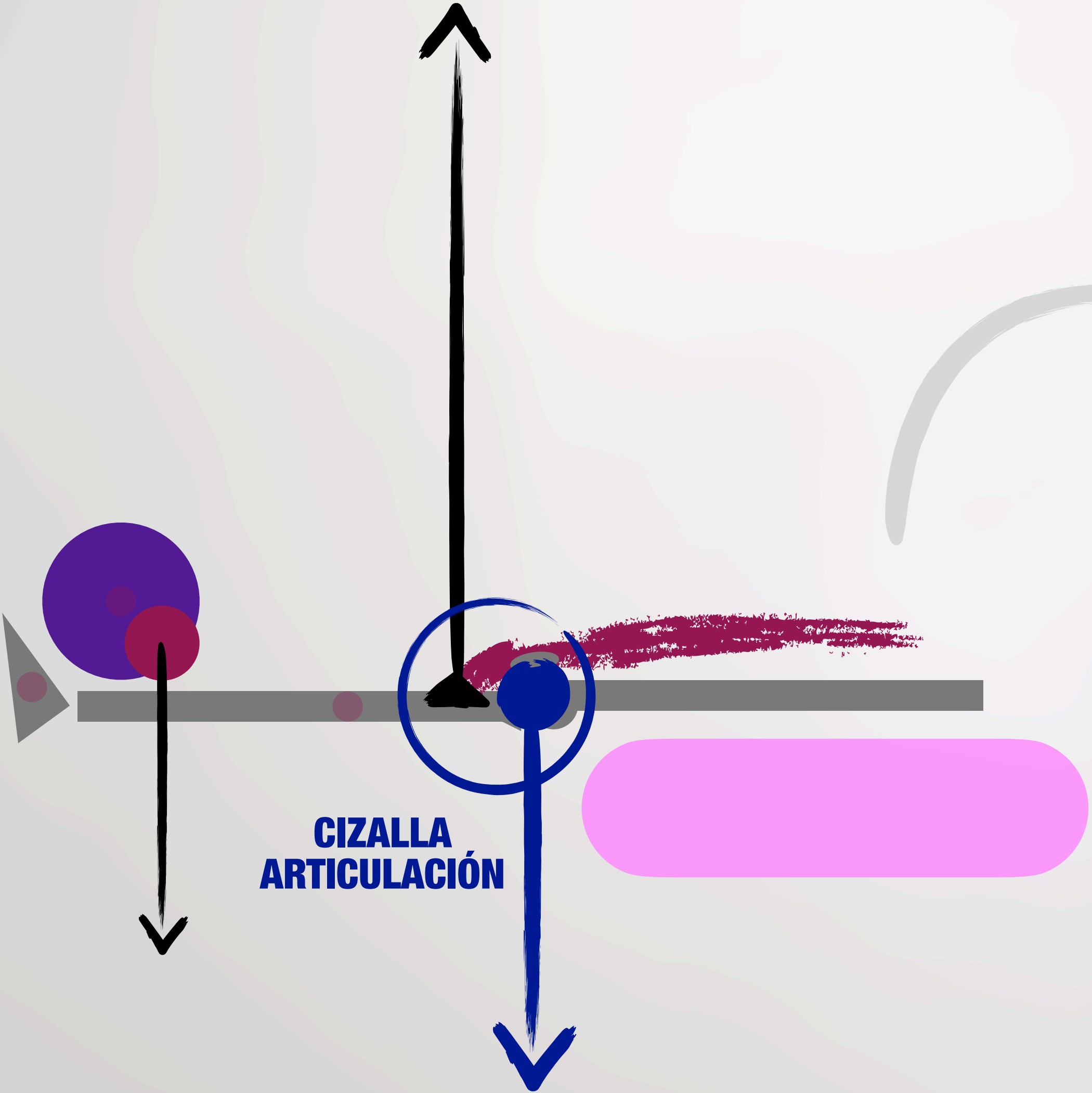
#EJEMPLOS SENCILLOS



#EJEMPLOS SENCILLOS



#EJEMPLOS SENCILLOS



MISMOS MOMENTOS
DISTINTAS CIZALLAS

