

Esquema

16:30 Modelización y matematización
 17:00 Sentido estocástico
 17:30 Diversas estrategias con sentido estocástico
 18:00 Pausa
 18:30 Thinking classroom
 19:00 Pensamiento computacional
 19:30 Exploding Dots y pensamiento computacional
 10:00 Gapminder y pensamiento computacional
 11:30 Pausa
 11:30 Problemas de Fermi para modelar
 12:30 CODAP y modelos de simulación

1

¿Qué es un
modelo en
matemáticas?

Luis J. Rodríguez Muñiz



@lrguezmuniz



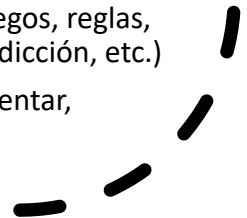
MATHEMATICS
EDUCATION
RESEARCH GROUP



2

Seis actividades matemáticas esenciales (Bishop, 1988)

- **Contar** (números, sistemas y patrones numéricos, representaciones algebraicas, combinatoria, frecuencias, etc.)
- **Localizar** (posición, orientación, coordenadas, ángulos, rectas, lugares geométricos, transformaciones, etc.)
- **Medir** (comparar, ordenar, magnitudes, unidades, estimación, aproximación, etc.)
- **Dibujar** (formas, patrones, dibujos, esquemas, gráficos, figuras, escalas, similitudes, etc.)
- **Jugar** (puzles, paradojas, modelos, juegos, reglas, procedimientos, estrategias, azar, predicción, etc.)
- **Explicar** (clasificar, generalizar, argumentar, representar, modelar, etc.)



3

Modelo matemático

Czocher (2017): tupla (S, Q, M, R) , donde:

- S = sistema
- Q = pregunta sobre S
- M = enunciados matemáticos para responder Q
- R = relación entre objetos de S y M



4



Modelo matemático

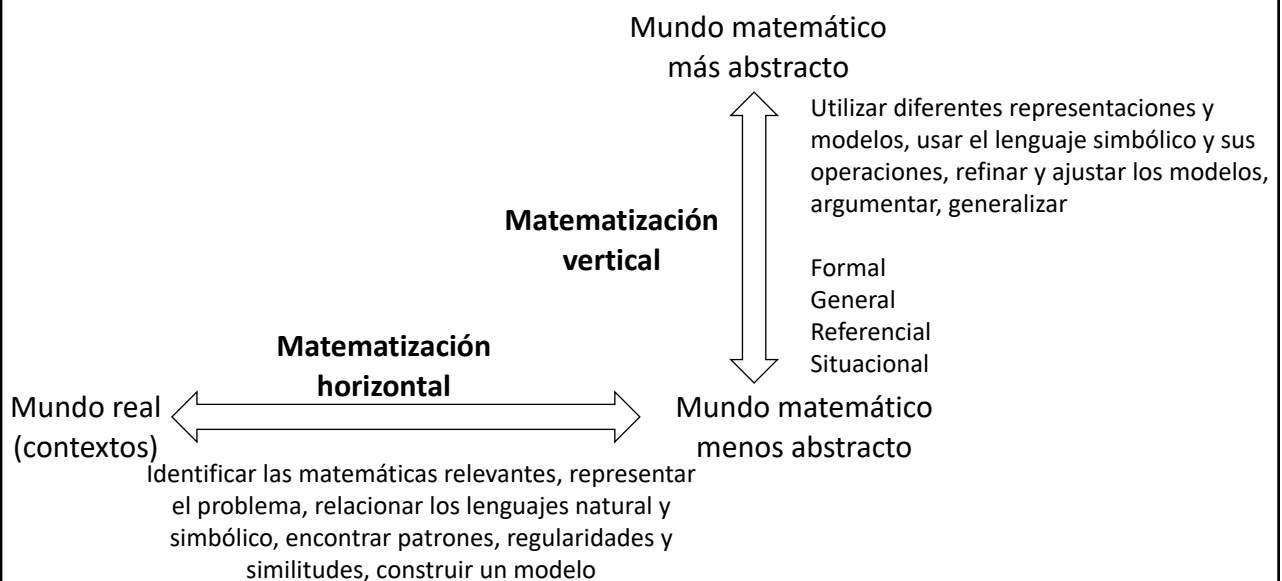
Lesh y Harel (2003)

Sistema conceptual que se expresa combinando diferentes *medios de representación* y tiene como finalidad *describir otro sistema o sistemas*

- Sistema conceptual para describir objetos matemáticos, relaciones, patrones, etc.
- Procedimientos para generar construcciones, manipulaciones o predicciones útiles para los objetivos

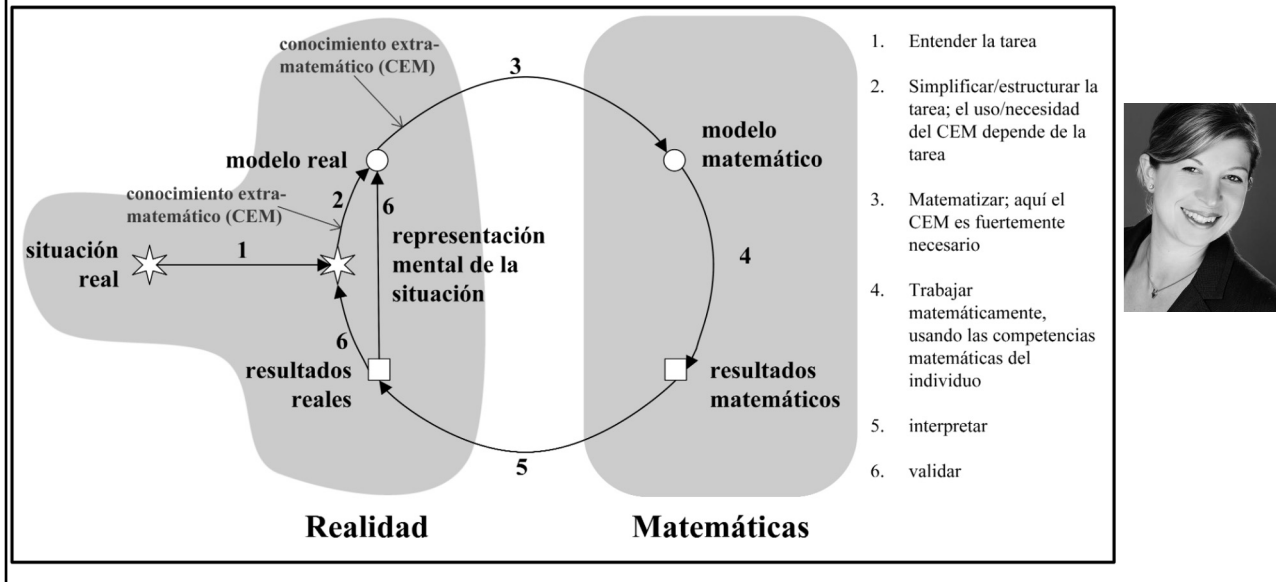
5

Los procesos de matematización (Freudenthal y Treffers)



6

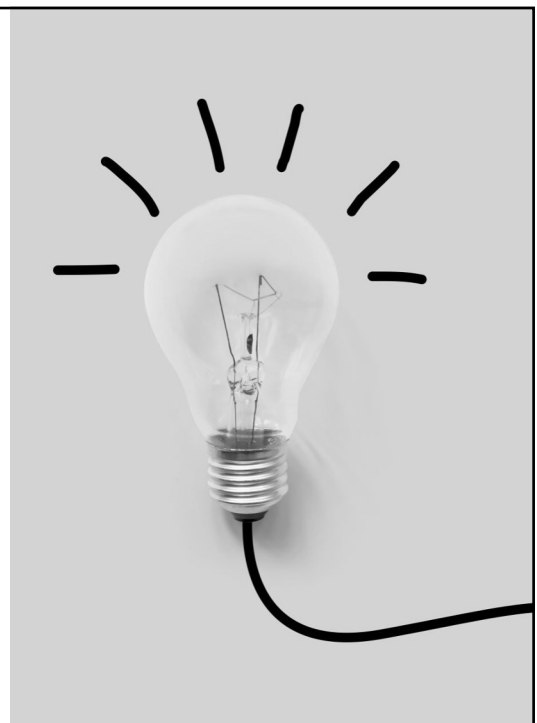
Esquema de la modelización matemática (Borromeo-Ferri, 2018)



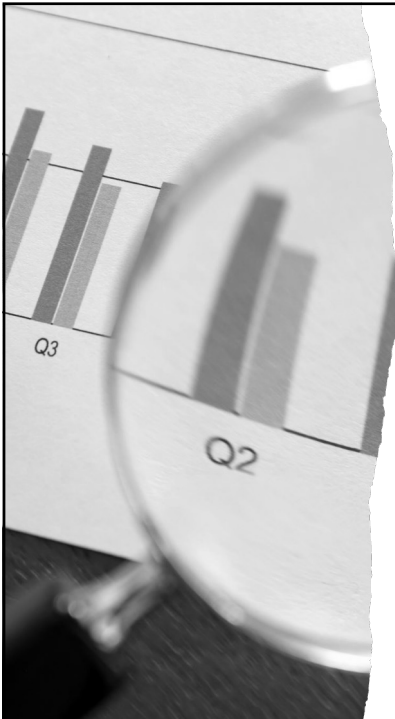
7

Documento de bases para el currículo (CEMat, 2021)

Saber construir modelos matemáticamente es una competencia matemática que se refiere a la capacidad de ir del mundo real al modelo y del modelo al mundo real, obteniendo e interpretando los resultados. Esto conlleva el análisis de los modelos ya existentes y realizar actividades de modelización en un contexto determinado.



8



Documento de bases para el currículo (CEMat, 2021)

Gran idea sobre sentido algebraico	Infantil	Primaria			ESO	Bachillerato
		1 y 2	3 y 4	5 y 6		
Patrones						
Modelo matemático						
Operadores						
Variable						
Igualdad y desigualdad						
Relaciones y funciones						

9

¿Qué ejemplos de modelos matemáticos o de modelización matemática identificas en tu práctica de aula?

10

El sentido estocástico y los modelos

Luis J. Rodríguez Muñiz



@lrguezmuniz



MATHEMATICS
EDUCATION
RESEARCH GROUP



1

στόχος

probabilis

Statistik

2

Sentido estocástico (Batanero, 2019)



Siguiendo la tradición europea, prefiero hablar de estocástica, porque la estadística y la probabilidad están ligadas indisolublemente. Usamos el termino estocástica para enfatizar la dependencia mutua del conocimiento y razonamiento sobre probabilidad y estadística, que están interconectadas y deben enseñarse conjuntamente



(Rico, 2016)

Usar las nociones de estadística y probabilidad para:

- abordar situaciones de incertidumbre;
- formular preguntas, para después recoger, organizar y presentar datos;
- seleccionar, utilizar y validar métodos con los que analizar datos, conjeturar y evaluar inferencias y predicciones;
- estudiar y abordar situaciones de aleatoriedad para evaluar la posibilidad, imposibilidad o seguridad de determinados hechos y sucesos

3

Formación insuficiente en ESO y Bachillerato

Formación instrumental en la universidad

**Aprendizaje memorístico
y basado en aplicación de fórmulas**

Último bloque de la asignatura

4

IV Moda, mediana y media

La **moda**, la **mediana** y la **media** de un conjunto de datos son medidas centrales que nos dan, en un solo valor, información sobre todo el conjunto.

EDAD DE LOS AMIGOS DE LAURA

EDAD	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
FRECUENCIA	0	0	1	0	1	1	0	1	3	0
SUMA DE LAS EDADES	0	0	3	0	5	6	0	8	27	0

• La moda es el valor que más se repite, es decir, el de mayor frecuencia.
MODA = 9 (se repite tres veces)

• La mediana es el valor que ocupa el centro de la lista de los datos cuando estos están colocados en orden.
 Si el número de datos es par, la mediana se calcula sumando los dos centrales y dividiendo entre dos.
 Ordenamos los datos anteriores: 3 - 5 - 6 - 8 - 9 - 9 - 9 - 9
MEDIANA = 8

• La media es el cociente de la suma de todos los datos entre el número de datos.
MEDIA = $\frac{\text{Suma de todas las edades}}{\text{N.º de amigos}} = \frac{3 + 5 + 6 + 8 + 27}{7} = 7$

5

1 Las edades de los invitados a la fiesta de cumpleaños de Berta, incluyendo los primos pequeños, son:

10 - 11 - 10 - 8 - 11 - 16 - 7 - 10 - 5 - 11 - 11

• Calcula la media de edad de los invitados.

2 Los huevos que han puesto en esta semana las gallinas de Julián son:



4 5 4 7 6 4

• Calcula la moda, la mediana y la media de los huevos que pone una gallina.

3 Calcula la moda, la mediana y la media de cada conjunto de datos:

a) 1 1 1 1 8 9 9

b) 4 5 5 5 5 5 6

6

3 Cálculo de $\bar{x}$ y σ en tablas de frecuencias

Cuando los datos estadísticos vienen dados mediante tablas de frecuencias, los cálculos pueden disponerse para que los parámetros se obtengan con gran comodidad.

■ CÁLCULO DE $\bar{x}$

Veámoslo con un ejemplo: la tabla de frecuencias de la derecha corresponde a las notas obtenidas por los 33 alumnos de una clase en el último examen.

x_i	f_i
4	1
5	10
6	14
7	5
8	2
9	1

Para calcular la media de las notas, tendríamos que sumar:

$$4 + \underbrace{(5 + 5 + \dots + 5)}_{10 \text{ veces}} + \underbrace{(6 + 6 + \dots + 6)}_{14 \text{ veces}} + \underbrace{(7 + 7 + \dots + 7)}_{5 \text{ veces}} + 8 + 8 + 9$$

y dividir el resultado por $1 + 10 + 14 + 5 + 2 + 1 = 33$.

Sin embargo, la suma de arriba se obtiene más eficazmente así:

$$4 \cdot 1 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 14 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 1$$

Es decir, cada valor de la variable se multiplica por la frecuencia asociada y se suman todos los resultados.

Para facilitar estos cálculos, añadimos una nueva columna a la tabla, $f_i \cdot x_i$.

El total de individuos se obtiene sumando la columna f_i .

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = 33 \rightarrow \sum f_i = 33$$

La suma de todas las notas se halla sumando la columna $f_i \cdot x_i$.

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n = 198 \rightarrow \sum f_i x_i = 198$$

$$\text{La media es: } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{198}{33} = 6$$

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
4	1	4
5	10	50
6	14	84
7	5	35
8	2	16
9	1	9
	33	198
	$\sum f_i$	$\sum f_i x_i$

7

■ Con fórmulas

8 Esta es la distribución bidimensional dada por la nube de puntos B del ejercicio 2:

x	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10
y	0	2	2	4	3	6	4	5	7	7	9	10

Halla:

- $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x , σ_y , σ_{xy} .
- El coeficiente de correlación, r . Interpretalo.
- Las ecuaciones de las dos rectas de regresión.

9 a) Representa la nube de puntos correspondiente a la siguiente distribución bidimensional:

x	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	9
y	1	4	6	2	4	8	6	5	3	6	9

b) Comprueba con la calculadora que sus parámetros son:

$$\bar{x} = 4,4 \quad \bar{y} = 4,9 \quad \sigma_{xy} = 3,67$$

$$\sigma_x = 2,77 \quad \sigma_y = 2,31 \quad r = 0,58$$

c) Halla las ecuaciones de las dos rectas de regresión, X sobre Y e Y sobre X , y represéntalas junto con la nube de puntos.

10 Una distribución bidimensional en la que los valores de x son 12, 15, 17, 21, 22 y 25, tiene una correlación $r = 0,99$ y su recta de regresión es $y = 10,5 + 3,2x$.

- Calcula $\hat{y}(13)$, $\hat{y}(20)$, $\hat{y}(30)$, $\hat{y}(100)$.
- ¿Cuáles de las estimaciones anteriores son fiables, cuál poco fiable y cuál no se debe hacer?
- Expresa los resultados en términos adecuados.

Por ejemplo:

$\hat{y}(13) = 52,1$. "Para $x = 13$ es muy probable que el valor

8

Gráficos de sectores

Cuando los datos se representan sobre un círculo, el gráfico recibe el nombre de **diagrama** (o **gráfico**) **de sectores**.

Para construir un diagrama de sectores:

- Primero, se divide el círculo en un número de partes igual a la suma de las frecuencias de los datos.
- Después, se colorea, asignando a cada color un número de partes igual a cada una de las frecuencias.

VOTOS PARA DELEGADO

ÁLVARO	14
NAIARA	6
DAVID	4
TOTAL	24

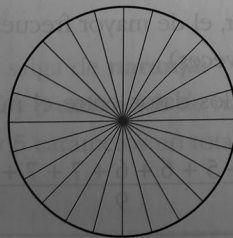
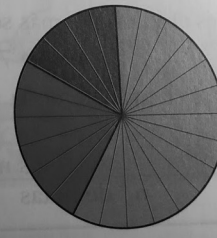


DIAGRAMA DE SECTORES



1 Observa el gráfico anterior y contesta:

9

En las son muy dispa-
diagrama de barras.

- 2 ☐ ☐ La siguiente tabla muestra el número de hermanos que tienen los alumnos de un centro escolar. Construye un diagrama de barras y otro de sectores que refleje estos datos.

Número de hermanos	0	1	2	3
Número de alumnos	120	260	80	20

- 3 ☐ ☐ La siguiente tabla recoge la opinión de un grupo de personas entrevistadas sobre su situación económica actual con respecto a la del año anterior.

3 REPRESENTACIONES GRÁFICAS

Existe gran cantidad de modos de representar una serie de datos estadísticos. Los más utilizados son los **diagramas de barras**, los **polígonos de frecuencias** y los **gráficos de sectores**.

EJEMPLOS

2 Los datos del ejemplo anterior se representan de la forma:

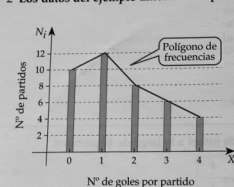


Diagrama de barras y polígono de frecuencias

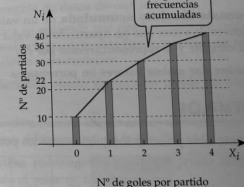


Diagrama de frecuencias acumuladas y polígono de frecuencias acumuladas

Un **gráfico de sectores** reparte los 360° del ángulo centr

10

DISTICOS

Una vez efectuado el recuento de datos y confeccionada la tabla de frecuencias, los parámetros estadísticos resumen la información de la misma.

Algunos de los parámetros más usuales son los siguientes:

A) Media aritmética

La media aritmética $\bar{x}$ de una serie de valores $x_1, x_2, \dots, x_k$ con frecuencias absolutas $n_1, n_2, \dots, n_k$ es el valor:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \times n_1 + x_2 \times n_2 + \dots + x_k \times n_k}{N} = \frac{\sum x_i \times n_i}{N}$$

Una forma práctica para calcular la media consiste en añadir una nueva columna que contenga los productos de los datos de las dos primeras columnas.

media aritmética

Para analizar los datos recogidos, además de las tablas y los gráficos, se utilizan **parámetros** como la media, la mediana y la moda, llamados **parámetros de centralización** porque nos dan una idea de los valores en torno a los que se distribuyen los datos recogidos.

4.1. Media aritmética

La **media aritmética** de una variable estadística es el valor medio de los datos recogidos. Se representa por $\bar{x}$.

Por tanto, la media aritmética solo se puede calcular en caracteres cuantitativos. El cálculo se efectúa dividiendo la suma de todos los datos recogidos entre el número de datos.

EJEMPLO

Las notas obtenidas en Matemáticas por un alumno de 2.º de ESO son 5, 6, 5, 6, 6, 8 y 4. Calcula su nota media.

11

ERCIICIO RESUELTO

1. Calcula los parámetros de la distribución del número de años de antigüedad en una empresa y el salario diario que tienen 40 trabajadores. Interpreta los resultados.

Años: x_i	Salario: y_i	n_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot x_i^2$	$n_i \cdot y_i$	$n_i \cdot y_i^2$	$n_i \cdot x_i \cdot y_i$
4	52	3	12	48	156	8 112	624
5	54	4	20	100	216	11 664	1 080
7	55	5	35	245	275	15 125	1 925
6	54	7	42	252	378	20 412	2 268
5	53	3	15	75	159	8 427	795
7	56	5	35	245	280	15 680	1 960
5	55	4	20	100	220	12 100	1 100
9	58	3	27	243	174	10 092	1 566
3	51	2	6	18	102	5 202	306
6	55	4	24	144	220	12 100	1 320
Total		40	236	1 470	2 180	118 914	12 944

$$\bar{x} = \frac{236}{40} = 5.9 \quad \bar{y} = \frac{2180}{40} = 54.5$$

Ejercicios resueltos

Determinación de la mediana

1. Calcula la mediana de una muestra de 75 bombillas en la que se han obtenido los siguientes datos relativos a su duración en horas:

Duración	N.º de bombillas
250-300	3
300-350	6
350-400	21
400-450	28
450-500	11
500-550	6

La mitad de 75 bombillas es 37,5, las bombillas 37 y 38 están en la clase (400-450) determinar el valor exacto de la mediana aplicaremos su expresión:

$$Me = L_i + a \cdot \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} = 400 + 50 \cdot \frac{37,5 - 30}{28} = 413,4 \text{ horas}$$

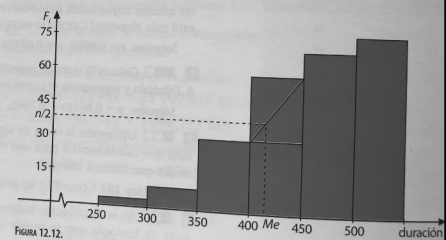


Figura 12.12.

12

b) Caso: $k > 0$, $P(z \geq k)$; se tiene que $P(z \geq k) = 1 - P(z \leq k)$

EJERCICIO RESUELTO
13 Calcula: $P(z \geq 1,25)$
 $P(z \geq 1,25) = 1 - P(z \leq 1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056$
 Para restar mentalmente, 1 menos el decimal, se comienza por la izquierda, se resta cada cifra de 9 y la última de 10.

c) Caso: $k < 0$, $P(z \leq k)$; se tiene que $P(z \leq k) = P(z \geq -k) = 1 - P(z \leq -k)$

EJERCICIO RESUELTO
19 Calcula: $P(z \leq -0,75)$
 $P(z \leq -0,75) = P(z \geq 0,75) = 1 - P(z \leq 0,75) = 1 - 0,7734 = 0,2266$

d) Caso: $P(k_1 \leq z \leq k_2)$; se tiene que $P(k_1 \leq z \leq k_2) = P(z \leq k_2) - P(z \leq k_1)$

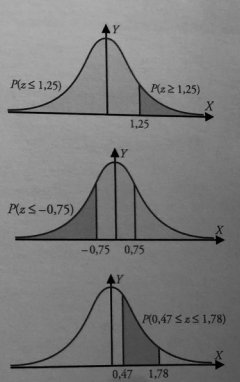
EJERCICIO RESUELTO
20 Calcula: $P(0,47 \leq z \leq 1,78)$
 $P(0,47 \leq z \leq 1,78) = P(z \leq 1,78) - P(z \leq 0,47) = 0,9625 - 0,6808 = 0,2817$

14 Tipificación de la variable

Tipificar una variable consiste en transformar una distribución $N(\mu, \sigma)$ en una normal $N(0, 1)$. Para ello se aplica el cambio de variable:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Estrategia de resolución de problemas
 a) Se escribe la variable aleatoria:
 $x = \dots$



13

La siguiente tabla relaciona las variables
 x : gastos en publicidad (miles de euros)
 y : ventas (miles de euros)
 durante los 6 primeros meses de promoción
 de un cierto producto:

x	1	2	3	4	5	6
y	10	17	30	28	39	47

- Hallar las dos rectas de regresión.
- Efectuar la estimación $\hat{y}(5,5)$ y explicar su significado.
- Para obtener unas ventas de 20 000 €, ¿cuántos miles de euros se estima que hay que gastar en publicidad? ¿Serán fiables estas estimaciones?

- Confecciona una tabla con las columnas x_i , y_i , x_i^2 , y_i^2 , $x_i \cdot y_i$ y halla el valor de los parámetros $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x , σ_y y σ_{xy} .
- Halla la pendiente de la recta de regresión de Y sobre X , $m_{yx} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$, y escribe la ecuación de esta recta.
- Halla la pendiente de la recta de regresión de X sobre Y , $m_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$, y escribe la ecuación de esta recta.

b) Para calcular la estimación $\hat{y}(5,5)$, da a x el valor 5,5 en la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X .

c) Tienes que calcular $\hat{x}(20)$ en la ecuación de la recta de regresión de X sobre Y .

Halla el valor de $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$ para decidir sobre la "calidad" de las estimaciones.

Solución:

a) $\bar{x} = 3,5$; $\bar{y} = 28,5$; $\sigma_x = 1,71$; $\sigma_y = 12,45$; $\sigma_{xy} = 20,75$

Recta de regresión de Y sobre X : $y = 7,1x + 3,65$

Recta de regresión de X sobre Y : $y = 7,47x + 2,36$

b) $\hat{y}(5,5) = 42,7$. Significa que para un gasto en publicidad de 5 500 €, las ventas serán próximas a 42 700 €.

c) Estimamos con la recta de regresión X sobre Y , el valor de x que le corresponde a $y = 20$. Es decir, $\hat{x}(20) = 2,36$.

14

¿Qué piensan nuestros/as estudiantes para maestro/a?

15

*Me gustaba darlo en clase, porque **fue algo que entendí muy bien y me parecía entretenido**, no como otros temas de Matemáticas que me costaba más entender*

*lo he percibido como **más útil y cercano a lo que me rodea** en mi día a día, por tanto, diría que mi relación ha sido mejor que con otra parte de las matemáticas*

*Durante la ESO **era un respiro para mí llegar a final de curso** y poder estudiar estas matemáticas. Era como que durante todo el curso me mataba por entender y estudiar los demás contenidos y ya cuando estaba por llegar el verano y las vacaciones **lo último que teníamos que estudiar** en la asignatura era esta parte que para mí era más fácil de llevar o de entender*

16

*me parecía interesante y entretenido de trabajar, además, **los procesos eran mecánicos y sencillos** lo que aumentaba mi interés*

*Cuando más me ha gustado es en bachiller con la distribución normal y binomial **ya que me parecía mecánico y por ello fácil.***

*algunas cosas me costó entenderlas al principio, pero luego **lo entendí bien y al ser algo mecánico** y una vez que entendías un problema luego **el resto eran similares***

*En comparación con otras asignaturas pese a ser la más sencilla también me parecía **la más aburrida, ya que todo me parecía lo mismo y no sentía que avanzase** o que me aportara algo que de verdad me sirviese en mi vida*

17

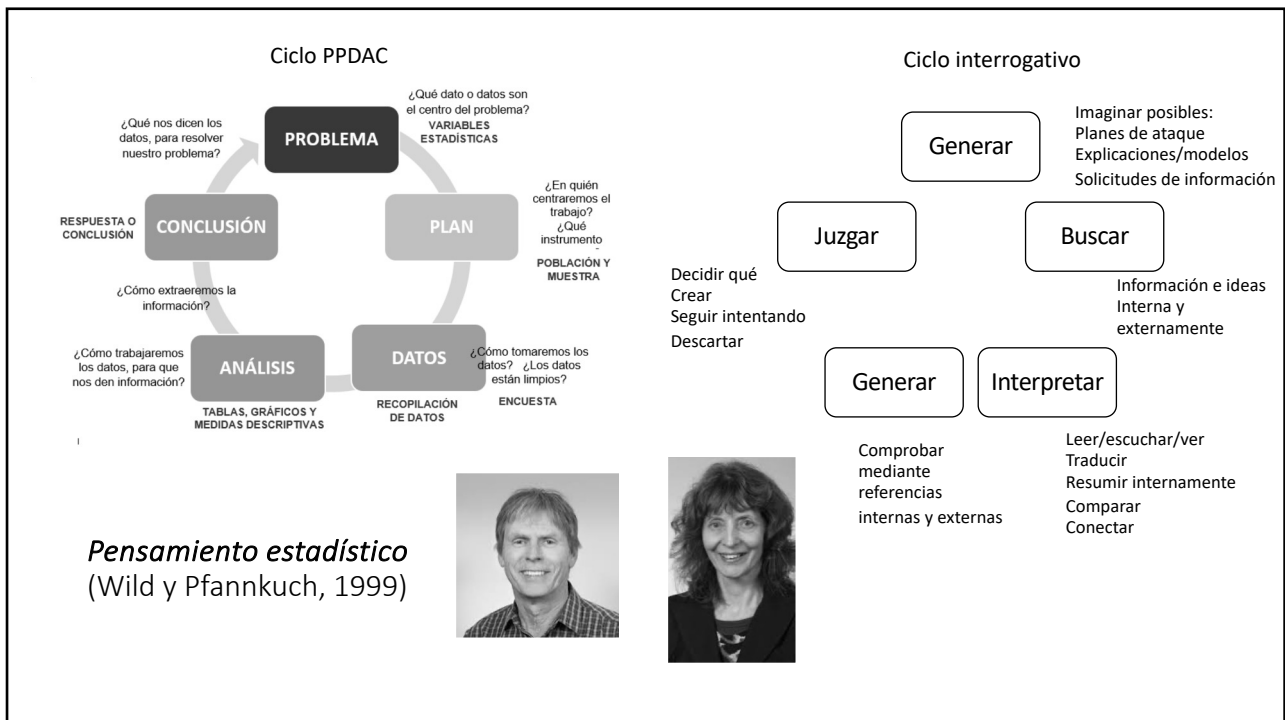
*me resultaba entretenido hacer ejercicios de ese tema (mucho más que hacer derivadas, integrales o ecuaciones). **Lo encontraba práctico y realista,** procedimientos que podía utilizar en la vida cotidiana.*

*tuve una experiencia positiva con esta parte ya que **nuestro profesor realizaba bastantes experimentos reales con juegos de cartas, monedas, bolas...** por lo que podías ver que era aplicable a un ámbito real y de este modo prestarle mucha más atención,*

*las clases eran mucho más amenas que las demás, gracias a que esta parte de las matemáticas es la más dinámica en cuanto a la representación, ya que **se experimenta con bolas o cartas,** por ejemplo.*

*mi recuerdo de la estadística es bueno, dentro de un marco negativo en mi vida que han sido las matemáticas (hasta el año pasado con Juanjo, **que descubrí que quizás podrían ser amenas**)*

18



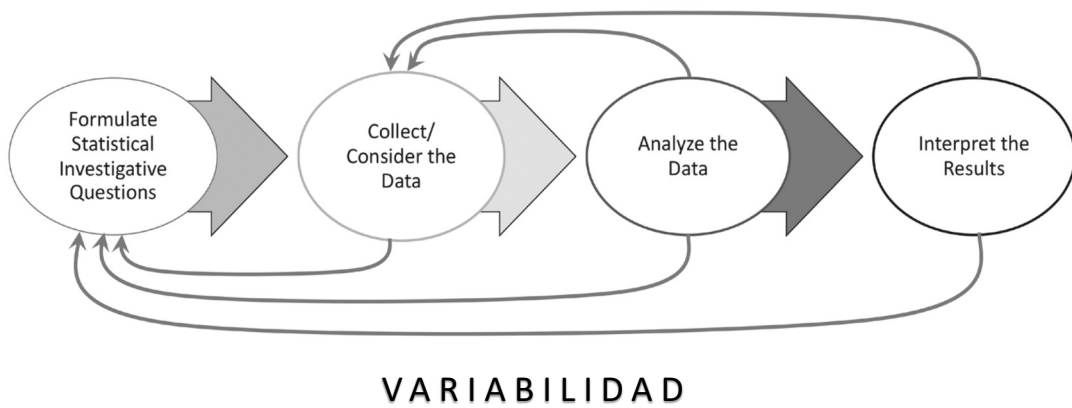
19

**Pre-K–12 Guidelines
for Assessment and
Instruction in
Statistics Education
II (GAISE II). A
Framework for
Statistics and Data
Science Education**

- Formular preguntas durante todo el proceso estadístico de resolución de problemas
- Considerar diferentes tipos de datos y de variables, relevantes para las preguntas y el problema
- Incluir el pensamiento multivariante
- El pensamiento probabilístico para cuantificar la aleatoriedad
- La tecnología está entrelazada con la práctica estadística
- Comunicar de forma clara y precisa la información estadística
- Evaluación para medir la comprensión conceptual y el razonamiento estadístico, vinculados a la resolución de problemas

20

El proceso estadístico (GAISE II)



21

Pero...¿y la probabilidad?

Se lanza un dado diez veces, ¿cuál es el número esperado de caras con valor impar que se obtendrá tras los diez lanzamientos?

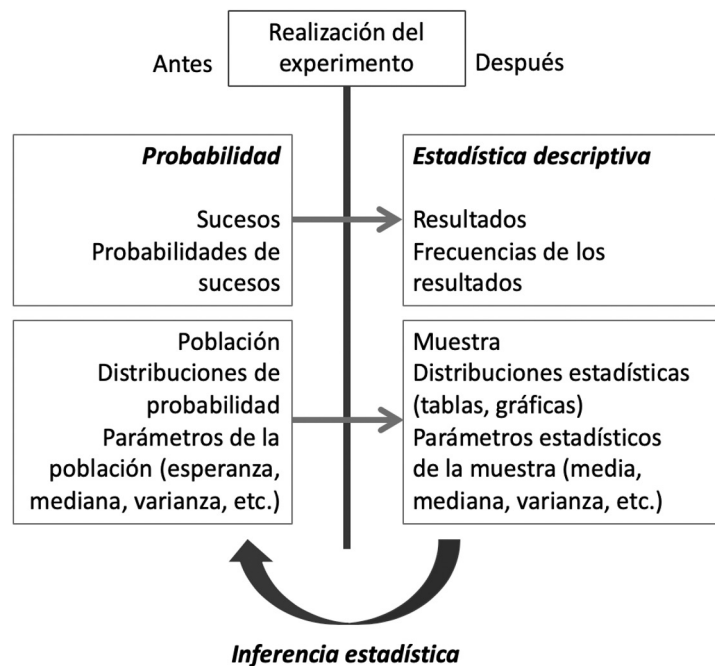
Observa este dado, ¿es un dado perfecto? ¿Tienes las mismas posibilidades de obtener todas las caras?

22

Mapa conceptual de la estocástica

Rodríguez-Muñiz, Muñiz-Rodríguez, Vásquez y Alsina (2020)

¿Cómo promover la alfabetización estadística y de datos en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Secundaria. *Números*, 104, 217-238



23

Experimento con policubos de colores

- ¿Qué información sobre el contenido nos aportan las tablas de frecuencias? ¿Cómo lo vinculo con la probabilidad?
- ¿Qué conjeturas puedo ir formulando y contrastando dinámicamente?
- ¿Generamos una gráfica con Excel?

Santaengracia, J. J., Rodríguez-Muñiz, L. J., y Palop, B. (2023).

Una situación de aprendizaje para el desarrollo del sentido estocástico en Educación Primaria. *Números*, 113, 63-80.

24

Formular
preguntas durante
todo el proceso

- What's going on in this graph?
- Slow reveal graphs



25

High Consumption:



Medium Consumption:



Low Consumption:



Figure 24: Doors for different consumptions

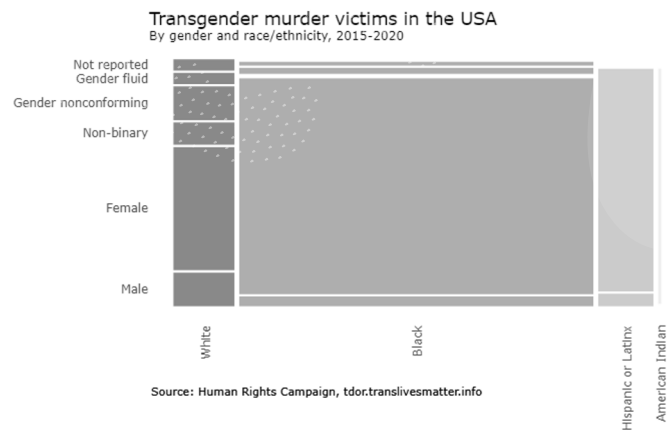
Diferentes tipos de datos y variables

- Trabajo con datos cualitativos (análisis de datos): posición, gráficas
- Otros tipos de datos (organización de la recogida de datos)

26

Pensamiento multivariante

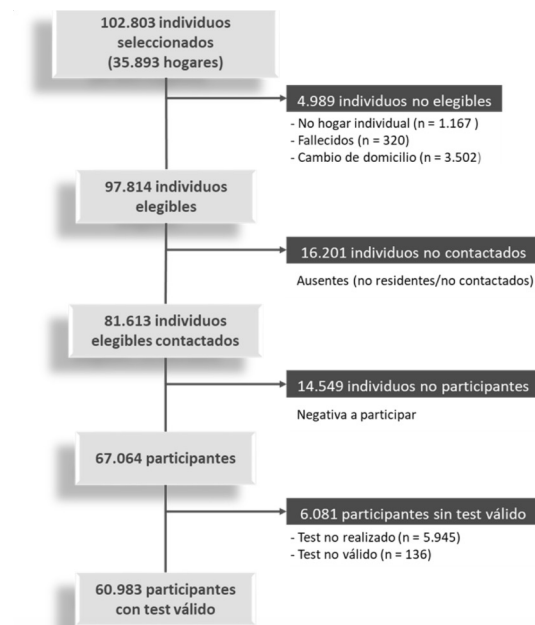
- No solo correlación y regresión: asociación (a partir de la representación gráfica)
- Diseño de la experimentación para recoger datos válidos
- Análisis de tendencias
- Exploración:
<https://www.geogebra.org/m/XJ4t8bch>



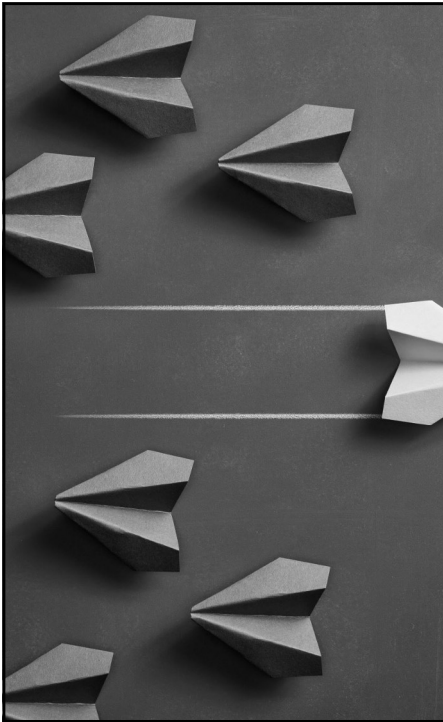
27

Comunicar de forma clara

Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L., Vázquez, C., y Alsina, A. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y de datos en contexto? *Números*, 104, 217-238.



28



Pensamiento probabilístico

- Toma de decisiones
- Significado subjetivo y coherencia entre los significados
- Sesgos en el razonamiento probabilístico
- Concepto de independencia y su representación
- Concepto de distribución de probabilidad
- Razonamiento inferencial informal

29

Evaluación (LOCUS, STEW)

L	M	X	J	V
18	21	19	20	22
25	17	18	19	18
19	20	21	21	23
23	21	20	23	19

Durante el mes de febrero, en el comedor escolar anotaron cuántas personas acudían a comer

Si la directora quiere saber cuántas personas comen en el comedor, aproximadamente, ¿qué respuesta le darías y por qué?

El cocinero dice que los lunes suele haber más personas, ¿qué te parece?

30



Evaluación

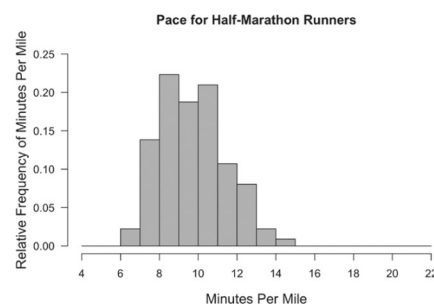
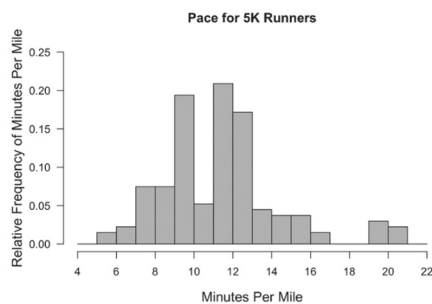
Jaime pidió a cada compañero de clase que ordenase de más a menos cuatro tipos de galletas, indicando del 1 al 4.

- ¿Cómo podrías representar los datos en una gráfica?
- ¿Cuál es la galleta que resulta más preferida? ¿Qué criterio usarías?
- ¿Habría resultado lo mismo si usamos la puntuación media? ¿Y la puntuación mediana?

31

Evaluación

- Sasha cree que los tiempos medios por milla de los corredores de 5mil son más parecidos que los de media maratón, ¿crees que los datos le dan la razón?
- Yago dice que, en promedio, los corredores de media maratón corren más lento que los de 5mil, ¿crees que tiene razón?
- Si tienes que elegir, a priori, si corres la media maratón o los 5mil y sueles hacer medias de 8 minutos por milla, ¿dónde crees que quedarías en un mejor puesto?



32

Evaluación

Los estudiantes del consejo escolar deben proponer una actividad extraescolar para el próximo curso. Como su centro es bastante grande, deciden realizar una encuesta a 100 estudiantes y preguntarles su preferencia entre: tenis, yoga, baile o jazz.

- ¿Qué deberían preguntar en la encuesta?
- ¿Cómo deberían elegir a las 100 personas encuestadas? Describe el proceso
- Simula una tabla o una gráfica de posibles resultados
- ¿Cómo se elegiría, según la pregunta que has formulado, cuál es la actividad preferida? (apóyate en la tabla o gráfica simulada)

33



Un grupo juega a la pelota de modo tal que se necesita un total de 60 puntos para ganar el juego. La apuesta es de 22 ducados.

Por algún incidente no pueden terminar el juego y un bando queda con 50 puntos y el otro con 30.

Se quiere saber qué participación del dinero del premio le corresponde a cada bando.

34

La probabilidad como medida subjetiva de la incertidumbre

- Vamos en julio de excursión a Llanes, ¿qué tiempo crees que habrá? ¿Qué información usas o necesitas para responder? ¿Cómo la usas? ¿Cómo de fiable es tu predicción?
- Conociendo el histórico de pluviometría del mes de julio en Llanes, ¿cambia tu pronóstico? ¿Cómo y por qué? ¿Podrías estimar cuál es la probabilidad de que haga buen tiempo en Llanes el 8 y 9 de julio?
- El mes anterior la predicción da 16º C y 10 días de lluvia, con 94 mm en media, ¿cambias tu estimar?
- El día antes de la excursión está nublado y llueve toda la mañana, ¿cambiarías la estimación de la probabilidad de tener buen tiempo?

35

La paradoja de Allais

Primer experimento

Opción 1A: recibir 1 millón de dólares con probabilidad 100 %

Opción 1B: recibir 1 millón de dólares con probabilidad 89 %, o 5 millones con probabilidad 10 %, o nada con probabilidad 1 %

Segundo experimento

Opción 2A: recibir 1 millón de dólares con probabilidad 11 %, o nada con probabilidad 89 %

Opción 2B: recibir 5 millones de dólares con probabilidad 10 %, o nada con probabilidad 90 %

36

En una clase hay 25 chicas. La estatura media de las chicas es 130 cm.

- a) Si una de las chicas de la clase mide 132 cm, tiene que haber una chica de 128 cm de estatura.**
- b) La estatura de la mayoría de las chicas es de 130 cm.**
- c) Si se ordenan las chicas de la más baja a la más alta, entonces la estatura de la que ocupa la posición central tiene que ser igual a 130 cm.**
- d) La mitad de las chicas de la clase deben medir menos de 130 cm, y la otra mitad deben medir más de 130 cm.**

37

Un día, en clase de matemáticas, se mide la estatura de todos los alumnos. La estatura media de los chicos es de 160 cm y la estatura media de las chicas es de 150 cm. Elena ha sido la más alta (mide 180 cm). Pedro ha sido el más bajo (mide 130 cm).

Dos estudiantes faltaron a clase ese día, pero fueron a clase al día siguiente. Se midieron sus estaturas y se volvieron a calcular las medias. Sorprendentemente, la estatura media de las chicas y la estatura media de los chicos no cambió.

- a) Los dos estudiantes son chicas.
- b) Uno de los estudiantes es un chico y el otro es una chica.
- c) Los dos estudiantes tienen la misma estatura.
- d) La estatura media de todos los estudiantes no cambió.
- e) Pedro sigue siendo el más bajo.

38

¿Qué propiedades hemos aprendido respecto a la media? ¿Y respecto a la mediana?

¿Somos capaces de formular verbalmente estas propiedades?

¿Cómo podemos aplicar lo aprendido en la resolución de otros problemas?

39

He tirado el dado 20 veces y
no me sale un 5,
¿esto es muy raro, no?

40

¿Puedes diferenciar un
dado trucado de uno
limpio?

41

¿Es muy extraño que
me haya salido cara
un 58 % de las veces?

42



CODAP

Pensamiento computacional

Luis J. Rodríguez Muñiz



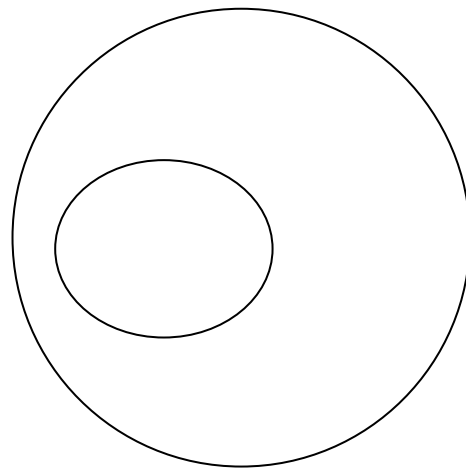
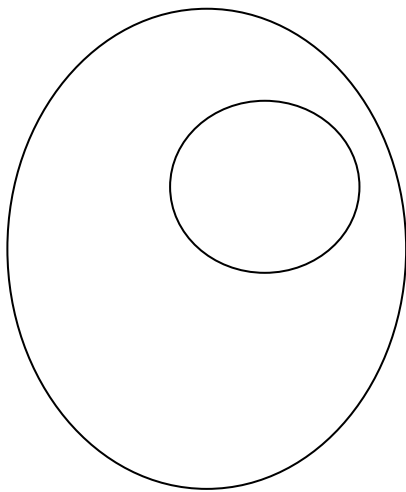
@lrguezmuniz



1

Pensamiento computacional

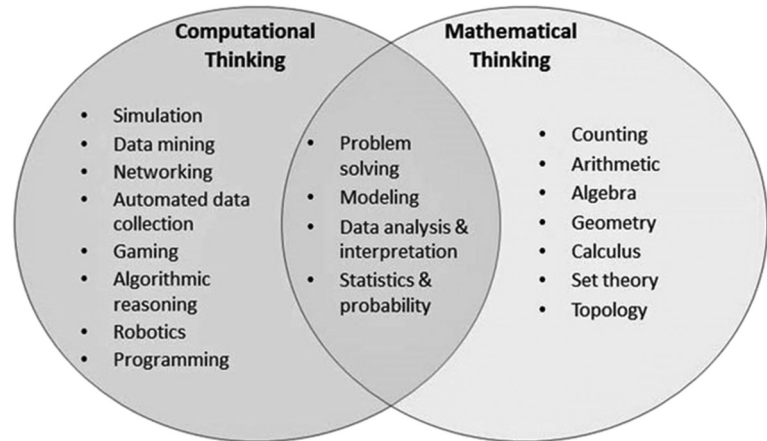
Pensamiento matemático



2

Pensamientos computacional y matemático

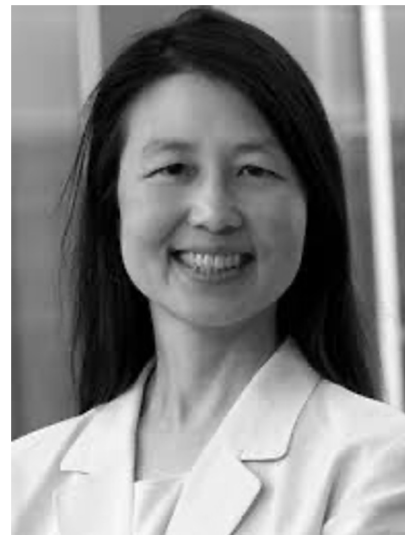
Shute et al.
(2017)



3

Wing (2010):

Computational Thinking is the thought processes involved in formulating problems and their solutions so that the solutions are represented in a form that can be effectively carried out by an information-processing agent



4

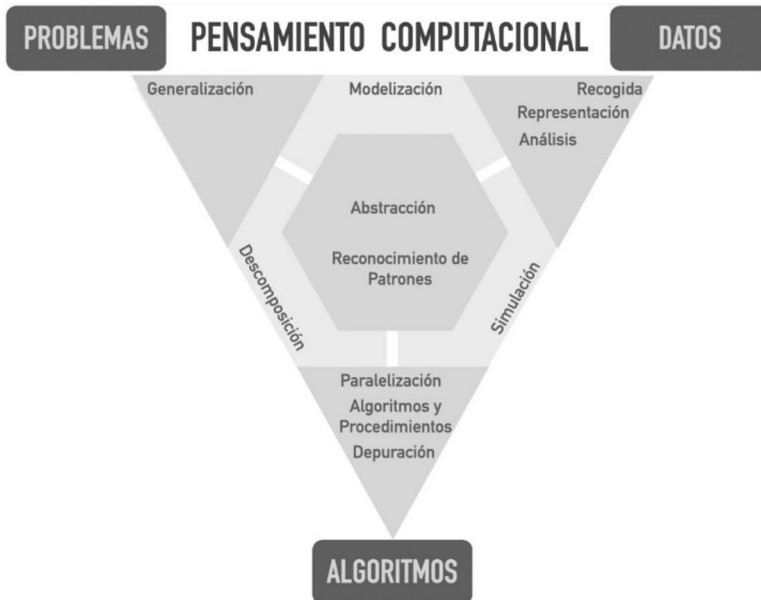


Palop y Díaz (2024):

Pensamiento Computacional es la manera de razonar que nos permite enfrentarnos a un problema sobre unos datos con el objetivo de que un ordenador lo resuelva



5



Palop, Díaz, Rodríguez-Muñiz y Santaengracia (2025). Redefining computational thinking: A holistic framework and its implications for K-12 education. *Education and Information Technologies*, 1-26.

6

Ejemplos en los libros de texto

- Uso de calculadora
- Uso de software de geometría dinámica (GeoGebra)
- Programación en bloques (Scratch)
- Programación de robots
- Secuenciación de un algoritmo
- Debugging



7

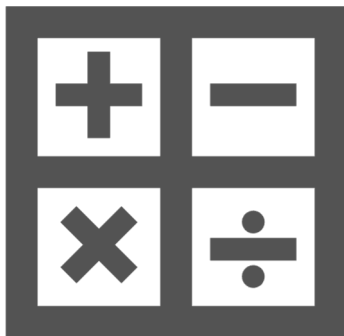
Otras propuestas de pensamiento computacional

- Expresión algorítmica de procedimientos conocidos (aritmética, manipulación algebraica, ordenación, etc.)
- Trabajo con autómatas
- Trabajo con grafos
- Formulación computacional de problemas de matemáticas
- Representación de datos
- Descomposición de problemas y algoritmos

8

Dados las coordenadas de los puntos (no alineados) A, B, C y D, ¿cómo puedo comprobar si el punto P está dentro o fuera del cuadrilátero que forman los cuatro puntos?

9



¿Cómo resta un ordenador?

10

4520-3025

Expresa el complemento al 9 del número menor

Súmale 1

Súmalo al número mayor

Desecha el primer dígito

¿Por qué funciona?

¿Cómo puedo hacerlo para restar el número mayor al menor?

125-5348

11



Una máquina
aritmética...

...y de la aritmética al álgebra

12



GLOBAL MATH PROJECT
Uplifting Mathematics for All



EXPLORATION 1: A MYSTERIOUS MACHINE ▼

Here we introduce and interact with a mysterious machine that sets the scene for the entire Exploding Dots story and a transformational mindset for mathematics.

Topic: Discovering place-value Grades: All

Written guide for this Experience:

[CLICK HERE](#)

Student Handouts for this Experience:

[CLICK HERE](#)

Interactive web app for this Experience:

[CLICK HERE](#)



Lesson 1.1
Getting started with the story.



Lesson 1.2
Encountering our first machine.



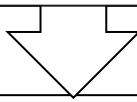
Lesson 1.3
Encountering more machines.

13

Calcula
(con policubos)

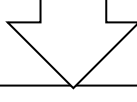
En binario, $4+9 = ?$

¿cuál la representación numérica de la operación en binario?



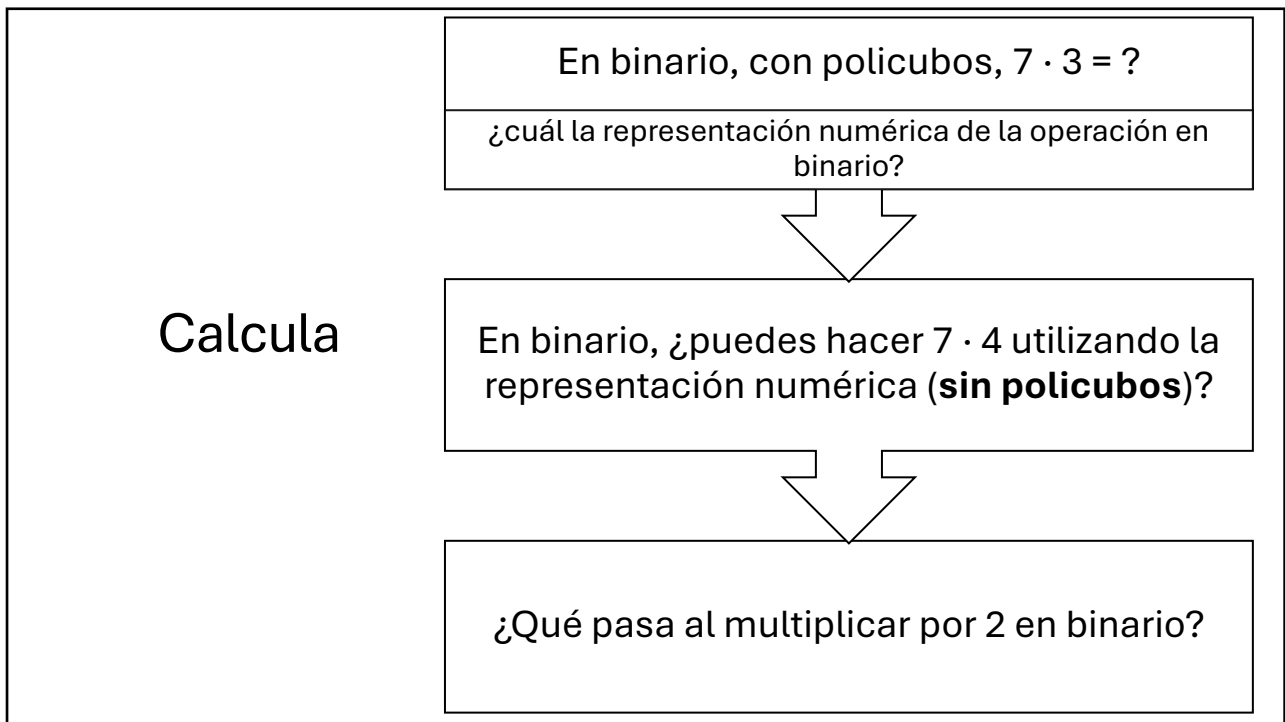
En ternario, $8+11 = ?$

¿cuál la representación numérica de la operación en ternario?

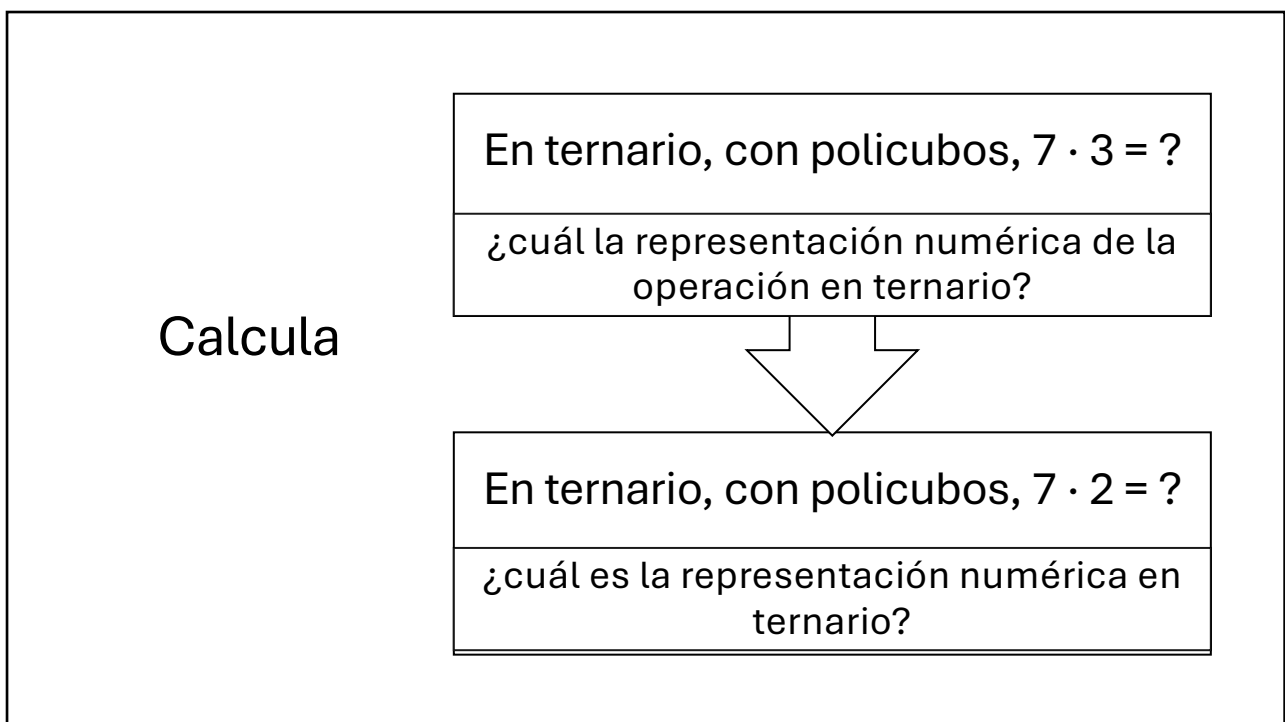


En ternario, ¿puedes hacer $7+4$ utilizando la representación numérica (**sin policubos**)?

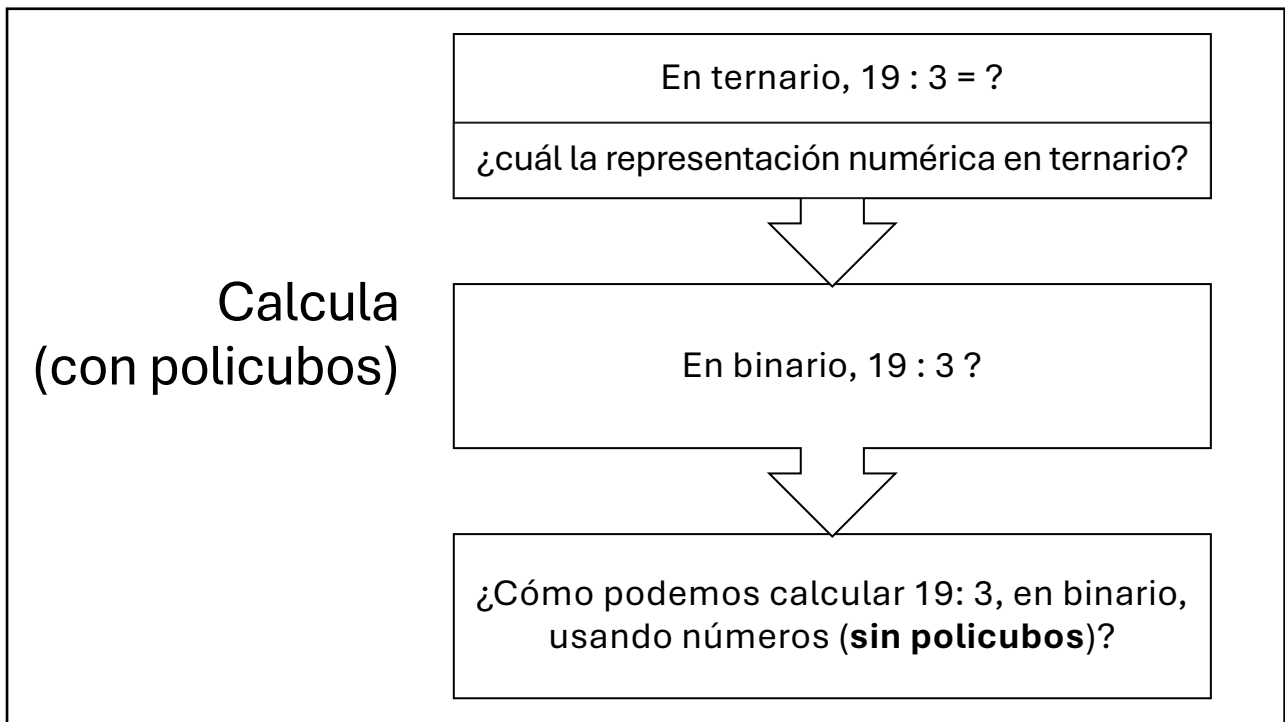
14



15



16



17

¿Cómo podemos hacer la resta?

18

Últimos retos

- ¿Qué significa multiplicar por 3 en binario? ¿Qué patrón siguen los múltiplos de 3 en binario?
- ¿Cómo usar esta máquina para las operaciones con potencias?
- ¿Por qué al multiplicar dos potencias con la misma base se suman los exponentes?

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^5$$



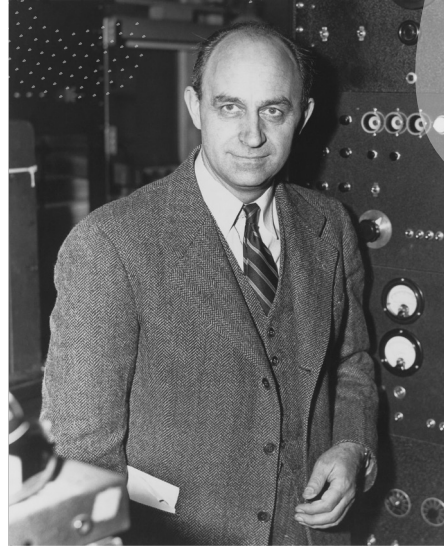
Problemas de Fermi

Estimación de grandes cantidades

Luis J. Rodríguez Muñiz



@ljrguezmuniz



1

¿Qué son los problemas de Fermi?

Son problemas abiertos, no estándares, que requieren hacer suposiciones sobre la situación del problema y estimar cantidades relevantes antes de realizar, a menudo, cálculos sencillos (Ärlebäck, 2009)



2

Primaria

¿A dónde llegamos si hacemos una cadena humana?

Si la cadena la hace todo el pueblo, ¿podremos rodearlo?

¿Cuánto papel de aluminio se gasta en el colegio en un mes?

Si lo reutilizamos, ¿cuánto nos ahorraríamos?

¿Cuántas personas viven en mi barrio?

¿Hay más o menos que en otro barrio?

3



Secundaria
(Ferrando,
Albarracín,
Segura y
Gallart, 2024)

- ¿Cuántas baldosas recubren el suelo de tu clase?
- ¿Cuánta gente cabe en el patio de tu instituto?
- ¿Cuántos coches pueden aparcar en el descampado que hay al lado del instituto?
- ¿Cuántas briznas de hierba hay en el jardín del instituto?
- ¿Cuánto tiempo tardas en ir del aula al patio del instituto?
- ¿Cuánto tiempo tardarías en ir andando desde un extremo al otro de tu ciudad?
 - ¿Cuánto tiempo se tardaría en ir desde Barcelona a París andando?
 - ¿Cuánto se tarda en ir desde Barcelona a París en bicicleta?

4

Problemas

- ¿Cuántos pelos hay en la cabeza?
- ¿Cuántas veces respiras en tu vida?
- ¿Cuántas bases de ambulancia y dónde tienen que estar ubicadas para reducir los traslados de las urgencias?

5

¿Identificas los elementos?

(S, Q, M, R)

S = sistema

Q = pregunta sobre S

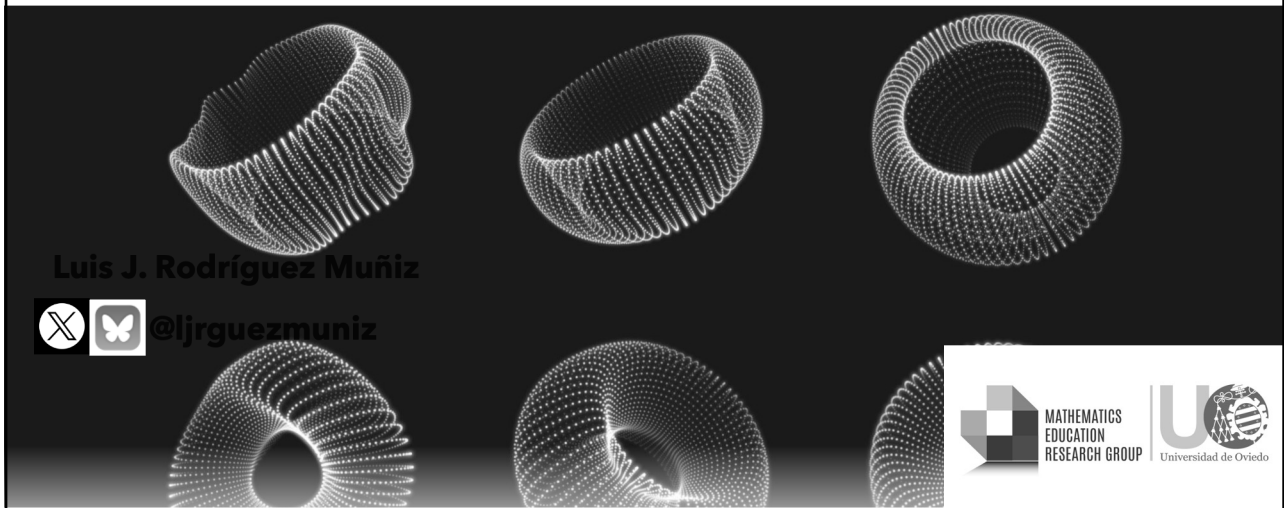
M = enunciados matemáticos para responder Q

R = relación entre objetos de S y M

6

Pensamiento computacional y
sentido estocástico

El vértice de los datos



1

Dollar Street (Gapminder)



2

¿Cómo convertimos las imágenes en datos para que los pueda manejar un ordenador?

- ¿Cuáles son las variables (características)?
- ¿Cuáles son sus valores (observados o posibles)?
- ¿Cuáles o quiénes son los individuos?
- ¿Cómo se codifica la información?
- ¿Cómo se guarda?
- ¿Cómo se estructura?

3

Individuo	Variable 1	Variable 2	Variable 3
1	Valor 1_a	Valor 2_a	Valor 3_a
2	Valor 1_a	Valor 2_b	Valor 3_a
3	Valor 1_b	Valor 2_b	Valor 3_a
4	Valor 1_b	Valor 2_a	Valor 3_b

4

- Objetivo: hacer búsquedas, ordenar, filtrar, etc.
- ¿Cuál es la casa que tiene más platos?
- ¿Cuál es la forma más habitual de los platos? ¿Y el color?
- ¿Puedo buscar platos en buen estado?
- ¿Qué otras preguntas puedo responder con los datos que he utilizado? ¿Cuáles no se pueden responder?

